

ЛИНЕЙНАЯ ТЕОРИЯ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ПУЧКОВ ВНУТРЕННИХ ВОЛН В ПРОИЗВОЛЬНО СТРАТИФИЦИРОВАННОЙ ЖИДКОСТИ

Ю. В. Кистович, Ю. Д. Чашечкин

Институт проблем механики РАН, 117526 Москва

В приближении Буссинеска рассчитаны пучки гармонических внутренних волн в жидкости с плавно меняющейся стратификацией с учетом эффектов диффузии и вязкости. Построена процедура локального сведения распространения пучка в среде с произвольной гладкой стратификацией к случаю экспоненциально стратифицированной жидкости. Рассчитан коэффициент энергетических потерь при отражении пучка от критического уровня. Определены параметры внутренних пограничных течений с расщепленными масштабами изменчивости скорости и плотности, формируемых пучком волн на разрывах частоты плавучести и ее более высоких производных.

Введение. Традиционно принято различать два типа внутренних волн: локализованные на слоях разрыва плотности и объемные, распространяющиеся во всей толще жидкости [1], свойства которых изучаются в приближении идеальной [2] или вязкой [3] жидкостей. В среде с экспоненциальным распределением плотности волны распространяются вдоль радиус-векторов, угол наклона которых к горизонту θ определяется отношением частоты волны ω к частоте плавучести N : $\sin \theta = \omega/N$. В среде с произвольной стратификацией регулярные волны существуют в областях, где $\omega < N$. При подходе к критическому уровню $\omega = N$ волновой луч отклоняется к вертикали, волновые векторы становятся горизонтальными, дальнейшее распространение волн невозможно, и происходит отражение луча [4].

Учет вязкости и диффузии существенно меняет описание внутренних волн. В этом случае компактный источник генерирует регулярное во всем пространстве поле внутренних волн [3]. Значимые возмущения сосредоточены в узких волновых пучках, содержащих полторы-две пространственные осцилляции. Асимптотические решения согласуются с измерениями и наблюдениями внутренних волн в лабораторных условиях даже вблизи источника [5].

При отражении пучков внутренних волн от плоской жесткой поверхности в связи с эффектами вязкости и диффузии возникают пограничные течения с расщепленными масштабами изменчивости скорости и плотности [6–8], причем заметная доля энергии падающего волнового пучка переходит в периодическое по времени пограничное течение [9].

В большинстве случаев модели внутренних волн строятся для гладких распределений плотности [10]. В естественных условиях наблюдается тонкая структура среды с выраженными слоями разрыва плотности и ее производных (вплоть до высоких) [11]. В этой связи представляет интерес исследование влияния разрывов градиента плотности и ее более высоких производных (в отсутствие скачка плотности) на распространение пучков внутренних волн с учетом эффектов вязкости и диффузии и расчет порождаемых ими возмущений на неоднородностях стратификации. По аналогии с [8, 9] здесь также можно ожидать, что волновой пучок будет трансформироваться в другие формы пространственно локализованных движений с неволновыми собственными масштабами.

Целью настоящей работы является динамическое рассмотрение задачи распространения пучков внутренних волн в произвольно стратифицированной среде с учетом диссипативных эффектов (вязкости и диффузии), их отражения от критического уровня, вычисление энергетических потерь при таком отражении, а также исследование распространения пучков в окрестности разрывов производных плотности среды.

1. Основные уравнения. Математическая постановка задачи распространения волновых пучков в среде с произвольной стратификацией следующая. Пусть несжимаемая вязкая жидкость с произвольной стратификацией приведенной солености $s_0(z)$, в которую включен коэффициент солевого сжатия, диффундирующей солевой компоненты находится в поле силы тяжести с ускорением g , направленным против вертикальной оси z . Зависимость невозмущенной плотности от вертикальной координаты z дается выражением $\rho_0(z) = \rho_{00}[1 + s_0(z)]$. Исследуется двумерная задача, в которой все величины зависят, кроме z , только от одной горизонтальной координаты x . Рассматриваются монохроматические волны с зависимостью от времени вида $e^{-i\omega t}$, которая везде в дальнейшем опускается.

В этом случае в приближении Буссинеска можно записать следующую линеаризованную систему уравнений [13], описывающую движения жидкости:

$$\begin{aligned} -i\omega v_x &= -\frac{1}{\rho_{00}} \frac{\partial P}{\partial x} + \nu \Delta v_x, & -i\omega v_z &= -\frac{1}{\rho_{00}} \frac{\partial P}{\partial z} + \nu \Delta v_z - sg, \\ -i\omega s + v_z \frac{ds_0}{dz} &= D\Delta s, & \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_z}{\partial z} &= 0. \end{aligned}$$

Здесь v_x , v_z — компоненты скорости жидких частиц; P и s — переменные давление и соленость; ν и D — кинематический коэффициент вязкости и коэффициент диффузии соли соответственно; $\Delta = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial z^2$ — двумерный лапласиан.

Из этой системы следует уравнение для вертикальных смещений частиц h , связанных с вертикальной скоростью соотношением $v_z = -i\omega h$

$$\left[(\omega - iD\Delta)(\omega - i\nu\Delta)\Delta - N^2(z) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right] h = 0, \quad (1.1)$$

где $N^2(z) = -(g/\rho_0(z))(d\rho_0(z)/dz)$ — квадрат частоты плавучести, которая в общем случае зависит от z .

Пучки внутренних волн от локализованного источника распространяются в четырех направлениях [3]: вправо вверх, вправо вниз, влево вверх и влево вниз. Не ограничивая общности, далее будем рассматривать только распространяющиеся вправо пучки, для которых горизонтальная компонента волнового вектора положительна. Это позволяет искать решение уравнения (1.1) в виде

$$h = \int_0^{\infty} f(z, k) e^{ikx} dk. \quad (1.2)$$

Подставляя это выражение в (1.1), получим обыкновенное дифференциальное уравнение для $f(z, k)$ (дифференцирование выполняется только по z)

$$\begin{aligned} \nu D f^{(6)} + [i\omega(\nu + D) - 3\nu D k^2] f^{(4)} - [\omega^2 + 2i\omega(\nu + D)k^2 - \\ - 3\nu D k^4] f^{(2)} + [\omega^2 - N^2(z) + i\omega(\nu + D)k^2 - \nu D k^4] f = 0, \end{aligned} \quad (1.3)$$

свойства которого для случая экспоненциально стратифицированной среды исследованы в [7–9]. Арабскими цифрами в скобках обозначен порядок производных.

Уравнение (1.3) является сингулярно возмущенным дифференциальным уравнением шестого порядка (малый коэффициент при старшей производной). При $\nu = D = 0$ оно переходит в традиционное уравнение второго порядка, описывающее распространяющиеся

внутренние волны в среде без диссипации [2, 3]. Наличие ненулевых вязкости и диффузии приводит к затуханию волн вследствие диссипации энергии и вовлечения невозмущенной жидкости в волновое движение, а также вследствие формирования нового типа движений — локализованных пограничных слоев с различными масштабами пространственной изменчивости скорости и плотности. Их толщина стремится к нулю при уменьшении кинетических коэффициентов [6, 7].

С учетом изложенного линеаризованное уравнение (1.3) можно представить в следующих операторных формах:

$$\hat{L}_4 \hat{L}_w f = \hat{L}_2 \hat{L}_b f = 0,$$

где \hat{L}_4 и \hat{L}_b — сингулярно возмущенные операторы четвертого порядка, а \hat{L}_2 и \hat{L}_w — регулярные операторы второго порядка. При этом общее решение уравнения (1.3) можно представить в виде линейной комбинации решений уравнений

$$\hat{L}_w f = 0, \quad \hat{L}_b f = 0, \quad (1.4)$$

причем решениям первого уравнения соответствуют бегущие внутренние волны, а решениям второго — пространственно локализованные периодические течения, которые по аналогии с [7] можно именовать внутренними пограничными течениями.

Введенные выше операторы отыскиваются в виде разложения по степеням малых параметров ν и D . Ограничиваясь первой степенью, получаем

$$\begin{aligned} \hat{L}_4 = \hat{L}_b &= \nu D \partial^4 + i(\nu + D) \partial^2 - \omega^2 - \frac{i(\nu + D)}{\omega} k^2 (N^2 + \omega^2), \\ \hat{L}_2 &= \partial^2 - \frac{2i(\nu + D)}{\omega} k^2 (\mu^2)' \partial + k^2 \left\{ \mu^2 - \frac{i(\nu + D)}{\omega} [(\mu^2)'' + k^2(1 + \mu^2)^2] \right\}, \\ \hat{L}_w &= \partial^2 + \frac{2i(\nu + D)}{\omega} k^2 (\mu^2)' \partial + k^2 \left\{ \mu^2 + \frac{i(\nu + D)}{\omega} [(\mu^2)'' - k^2(1 + \mu^2)^2] \right\}, \\ \mu^2(z) &= \frac{N^2(z) - \omega^2}{\omega^2}, \quad \partial \equiv \frac{d}{dz} \end{aligned}$$

(штрихи означают производную по z). Операторы \hat{L}_4 и \hat{L}_b совпадают в первом порядке использованных разложений, в общем случае они не равны друг другу. Все последующие результаты являются асимптотическими по малым параметрам ν и D . Условия малости будут сформулированы ниже в п. 2.

Как следует из (1.3), функция $f(z, k)$ должна иметь непрерывные производные вплоть до пятой включительно при кусочно-непрерывной функции $N(z)$. Это требование является граничным условием при распространении пучков внутренних волн при отсутствии внешних препятствий и поверхностей разрывов градиента плотности и ее более высоких производных.

Если $N(z)$ — гладкая функция, то распространение пучков описывается только первым из уравнений (1.4), а соблюдение указанных граничных условий является следствием гладкости $N(z)$ (это доказывается дифференцированием первого уравнения из (1.4)). Если же $N(z)$ имеет разрывы или разрывы производных, то обойтись для описания распространения пучков только первым уравнением из (1.4) не удастся и придется использовать также второе уравнение. Физически это означает, что в толще жидкости на уровнях разрыва функции $N(z)$ или ее производных возникают индуцированные волной внутренние пограничные течения, толщина которых зависит от кинетических коэффициентов и частоты волны.

Таким образом, проблема распространения пучков внутренних волн в произвольно стратифицированной жидкости распадается на три основные задачи: распространение в

среде с гладкой переменной стратификацией $N(z) > \omega$; отражение от критического уровня, определяемого условием $z_c: N(z_c) = \omega$; взаимодействие пучка с разрывами $N(z)$ и ее производных.

2. Распространение пучков внутренних волн. Асимптотическое решение уравнения

$$f'' + \frac{2i(\nu + D)}{\omega} k^2 (\mu^2)' f' + k^2 \left\{ \mu^2 + \frac{i(\nu + D)}{\omega} [(\mu^2)'' - k^2(1 + \mu^2)^2] \right\} f = 0, \quad (2.1)$$

описывающего распространение внутренних волн, можно получить в случае медленно меняющейся функции $N(z)$, когда характерные ширина пучка и длина волны много меньше масштаба изменения частоты плавучести $\Lambda_N = |d \ln N(z)/dz|^{-1}$. Это эквивалентно тому, что пространственный спектр пучка $f(z, k)$ локализован вблизи некоторого значения k_0 , характеризующего длину волны в пучке, в то время как ширина спектра Δk характеризует ширину пучка. Эти величины должны удовлетворять неравенствам $k_0 \Lambda_N \gg 1$, $\Delta k \Lambda_N \gg 1$.

При выполнении дополнительных условий $k_0^2 \ll \omega/(\nu + D)$, $(\Delta k)^2 \ll \omega/(\nu + D)$ асимптотическое решение уравнения (2.1) можно искать в виде $f(z, k) = e^{ik\sigma(z, k)}$. Подставляя это выражение в (2.1), получаем уравнение для эйконала $\sigma(z, k)$:

$$\sigma'^2 - \frac{i\sigma''}{k} + \frac{2\tilde{\nu}k}{\omega} (\mu^2)' \sigma' - \mu^2 - \frac{i\tilde{\nu}}{\omega} [(\mu^2)'' - k^2(1 + \mu^2)^2] = 0, \quad (2.2)$$

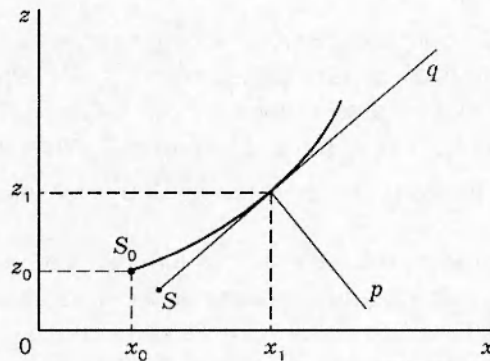
где $\tilde{\nu} = \nu + D$. В свою очередь, при решении (2.2) эйконал разлагается в ряд по степеням кинетических коэффициентов. Сохраняя члены первого порядка малости $\sigma' = \sigma'_0 + (\tilde{\nu}k^2/\omega)\sigma'_1$, подставляя это в (2.2), получим систему уравнений

$$\sigma_n'^2 - \frac{i\sigma_n''}{k} - \mu^2 = 0, \quad 2\sigma_0'\sigma_1' - \frac{i\sigma_1''}{k} + \frac{2(\mu^2)'\sigma_0'}{k} + i \left[(1 + \mu^2)^2 - \frac{(\mu^2)''}{k^2} \right] = 0. \quad (2.3)$$

Полагая $\sigma_0' = a_0 + a_1/k + \dots$, $\sigma_1' = b_0 + b_1/k + \dots$, из (2.3) найдем коэффициенты a_i , b_i и тем самым получим окончательное выражение для $f(z, k)$:

$$f(z, k) = \frac{A(k)}{\sqrt{|\mu|}} \exp \left[\frac{i\tilde{\nu}k^2(1 - 3\mu^4)}{4\omega\mu^2} \right] \exp \left\{ i\lambda k \int_{z_0}^z \left[\mu - \frac{i\tilde{\nu}k^2(1 + \mu^2)^2}{2\omega\mu} \right] dz' \right\}, \quad (2.4)$$

причем значение $\lambda = +1$ соответствует пучку, распространяющемуся вправо вниз, а $\lambda = -1$ — вправо вверх.



Геометрия пучка в лабораторной (x, z) и сопутствующей (p, q) системах координат

Поле пучка удобно представить в сопутствующей системе координат (p, q) , в которой ось q направлена по касательной к траектории пучка в точке (x_1, z_1) , а ось p нормальна к ней (см. рисунок). Связь между системами координат (x, z) и (p, q) дается формулами

$$x - x_1 = p \sin \theta + q \cos \theta, \quad z - z_1 = -p \cos \theta + q \sin \theta, \quad \operatorname{ctg} \theta = \mu(z_1).$$

Выполняя указанное преобразование координат в (2.4) и используя (1.2), получим выражение для смещений в пучке:

$$h(p, q) = \sqrt{\frac{\mu(z_0)}{\mu(z_1)}} \int_0^\infty A_0(k) \exp \left\{ ikp - \frac{\tilde{\nu} k^3 [Q(z_1) + q]}{2N(z_1) \cos \theta} \right\} dk, \quad (2.5)$$

где $A_0(k)$ — спектральная функция, определяемая свойствами источника волн, расположенного в точке S_0 (см. рисунок), а $Q(z)$ — *собственный текущий продольный масштаб пучка*, задаваемый формулой

$$Q(z) = \frac{\mu(z)}{[1 + \mu^2(z)]^{3/2}} \int_{z_0}^z \frac{[1 + \mu^2(z')]^2}{\mu(z')} dz'. \quad (2.6)$$

Его значение в произвольно стратифицированной среде отличается от геометрической длины пучка

$$L(z) = \int_{z_0}^z \sqrt{1 + \mu^2(z')} dz'$$

и связано с последней интегральным соотношением

$$Q(z) = \frac{\sqrt{L'^2(z) - 1}}{L'^3(z)} \int_{z_0}^z \frac{L'^4(z')}{\sqrt{L'^2(z') - 1}} dz',$$

где штрих при $L(z)$ означает производную по аргументу. Нетрудно убедиться, что при $N(z) = \text{const}$ $Q(z) = L(z)$.

В экспоненциально стратифицированной жидкости с постоянной частотой плавучести $N_1 = N(z_1)$ источник, расположенный в точке $(p = 0, q = -L_1)$ (рассмотрение производится в сопутствующей системе координат, изображенной на рисунке), излучает пучок, поле которого в соответствии с [12] имеет вид

$$h(p, q) = \int_0^\infty A_1(k) \exp \left\{ ikp - \frac{\tilde{\nu} k^3 (L_1 + q)}{2N_1 \cos \theta} \right\} dk. \quad (2.7)$$

Сравнение формул (2.5) и (2.7) показывает, что характеристики волнового пучка, излученного в точке S_0 в среде с заданной стратификацией $N(z)$, в окрестности точки наблюдения (x_1, z_1) такие же, как и у пучка в среде с постоянной частотой плавучести $N(z_1)$, который излучался источником того же типа, расположенным в точке S на расстоянии $Q(z_1)$ от точки наблюдения ($Q(z)$ определяется формулой (2.6)) с увеличенной в $\sqrt{\mu(z_0)/\mu(z_1)}$ раз амплитудой.

Проведенное рассмотрение позволяет свести задачу распространения пучков внутренних волн в среде с произвольной плавно меняющейся стратификацией к случаю постоянной частоты плавучести, который детально изучен теоретически [3, 5] и экспериментально [12].

3. Отражение от критического уровня. Рассматривается распространение пучка внутренних волн вблизи критического уровня $z = z_c$, на котором локальная частота плавучести среды сравнивается с частотой волны $\omega = N(z_c)$. При $z > z_c$ величина $\mu^2(z)$

становится отрицательной и в соответствии с (2.4) каждая пространственная гармоника пучка будет экспоненциально затухать. Из условий непрерывности функции $f(k, z)$ и ее производной при $z = z_c$ следует, что, кроме падающего, возникают еще два пучка: отраженный и частично проникающий в неволновую зону.

Из общего рассмотрения с учетом (1.2) и (2.4) следует, что для вертикальных смещений в падающем $h_i(x, z)$, отраженном $h_r(x, z)$ и прошедшем $h_t(x, z)$ пучках можно записать выражения

при $z < z_c$

$$h_i(x, z) = \frac{1}{\sqrt{|\mu|}} \int_0^\infty A(k) \exp \left[\frac{i\tilde{\nu}k^2(1-3\mu^4)}{4\omega\mu^2} \right] \exp \left\{ -ik \int_{z_0}^z \left[\mu - \frac{i\tilde{\nu}k^2(1+\mu^2)^2}{2\omega\mu} \right] dz \right\} e^{ikx} dk,$$

$$h_r(x, z) = \frac{1}{\sqrt{|\mu|}} \int_0^\infty B(k) \exp \left[\frac{i\tilde{\nu}k^2(1-3\mu^4)}{4\omega\mu^2} \right] \exp \left\{ ik \int_{z_c}^z \left[\mu - \frac{i\tilde{\nu}k^2(1+\mu^2)^2}{2\omega\mu} \right] dz \right\} e^{ikx} dk,$$
(3.1)

при $z > z_c$

$$h_t(x, z) = \frac{1}{\sqrt{|\mu|}} \int_0^\infty C(k) \exp \left[\frac{i\tilde{\nu}k^2(1-3\mu^4)}{4\omega\mu^2} \right] \exp \left\{ -k \int_{z_c}^z \left[|\mu| + \frac{i\tilde{\nu}k^2(1+\mu^2)^2}{2\omega|\mu|} \right] dz \right\} e^{ikx} dk.$$

Задача состоит в том, чтобы выразить пространственные спектры $B(k)$ и $C(k)$ отраженного и прошедшего пучков через спектр $A(k)$ падающего пучка.

Решения (3.1) расходятся при $\mu(z_c) = 0$. Для сращивания асимптотик находятся точные решения уравнения (2.1) при $z \sim z_c$ и сшиваются между собой.

Функция $N(z)$ при $z \sim z_c$ может быть представлена в виде разложения в ряд Тейлора, в котором оставлено два члена:

$$N(z) = \omega \left(1 - \frac{z - z_c}{\Lambda_N} \right), \quad \mu^2(z) = -\frac{2(z - z_c)}{\Lambda_N}, \quad \Lambda_N = \left| \frac{1}{N(z)} \frac{dN(z)}{dz} \right|_{z=z_c}^{-1}, \quad (3.2)$$

где Λ_N — характерный масштаб изменения $N(z)$ вблизи критического уровня. Подставляя (3.2) в (2.1), получим уравнение для $f(z, k)$

$$f'' - \frac{4i\tilde{\nu}k^2}{\omega\Lambda_N} f' - k^2 \left\{ \frac{2(z - z_c)}{\Lambda_N} + \frac{i\tilde{\nu}k^2}{\omega} \left[1 - \frac{4(z - z_c)}{\Lambda_N} \right] \right\} f = 0,$$

которое с помощью замен

$$f = \exp \left[\frac{2i\tilde{\nu}k^2(z - z_c)}{\omega\Lambda_N} \right] g(y, k), \quad y = (z - z_c) \left(1 - \frac{2i\tilde{\nu}k^2}{\omega} \right) + \frac{i\tilde{\nu}k^2\Lambda_N}{2\omega}$$

сводится к уравнению Эйри для введенной функции g (при выводе этого уравнения квадратичные члены $\sim \tilde{\nu}^2$ опущены):

$$\frac{d^2g}{dy^2} - \frac{2k^2}{\Lambda_N} \left(1 + \frac{4i\tilde{\nu}k^2}{\omega} \right) yg = 0. \quad (3.3)$$

Учитывая, что падающая волна должна затухать при увеличении z , а отраженная — при уменьшении z , запишем решения уравнения (3.3) в виде

$$g_i = \alpha \sqrt{-y} H_{1/3}^{(1)}[\varepsilon(-y)^{3/2}], \quad g_r = \beta \sqrt{-y} H_{1/3}^{(2)}[\varepsilon(-y)^{3/2}], \quad \varepsilon = \frac{2k}{3} \left(1 + \frac{2i\tilde{\nu}k^2}{\omega} \right) \sqrt{\frac{2}{\Lambda_N}}, \quad (3.4)$$

где $H_{1/3}^{(1)}$ и $H_{1/3}^{(2)}$ — функции Ханкеля первого и второго рода. Для прошедшей волны, которая тоже должна затухать при увеличении z , имеем

$$g_t = \gamma \sqrt{y} K_{1/3}[\varepsilon y^{3/2}], \quad (3.5)$$

где $K_{1/3}$ — функция Макдональда, отличающаяся от обычно вводимой [14] отсутствием множителя $\pi/2$.

Обеспечивая непрерывность функций $(g_i + g_r)$ и g_t при $z = z_c$ и их первых производных, сохраняя члены до первой степени включительно по $\tilde{\nu}$, найдем

$$\beta = \alpha e^{-i\pi/3}, \quad \gamma = \alpha e^{-i\pi/6}. \quad (3.6)$$

Подставляя (3.2) в (3.1) и выполняя интегрирование, осуществляя асимптотическое разложение при $|\epsilon y^{3/2}| \gg 1$ в (3.4) и (3.5) и сравнивая полученные выражения, найдем связь между величинами $\{\alpha, \beta, \gamma\}$ и $\{A(k), B(k), C(k)\}$:

$$\alpha = \sqrt{\frac{\pi k}{3}} A(k) e^{-i\varphi_0} e^{5i\pi/12}, \quad \beta = \sqrt{\frac{\pi k}{3}} B(k) e^{-5i\pi/12}, \quad \gamma = \sqrt{\frac{\pi k}{3}} C(k),$$

где

$$\varphi_0 = k \int_{z_0}^{z_c} \left[\mu - \frac{i\tilde{\nu}k^2(1 + \mu^2)^2}{2\omega\mu} \right] dz'.$$

Вместе с равенствами (3.6) это позволяет найти

$$B(k) = A(k) e^{-i\varphi_0} e^{i\pi/2}, \quad C(k) = A(k) e^{-i\varphi_0} e^{i\pi/4}. \quad (3.7)$$

Из (3.7) следует, в частности, что при отражении от критического уровня пучок, сохраняя свою структуру, увеличивает фазу на $\pi/2$.

Пучок, прошедший в неволновую область $z > z_c$, переносит с собой энергию, которая переходит в тепло. Техника вычисления коэффициента энергетических потерь η , равного отношению потока энергии, уходящего в неволновую область, к потоку энергии в падающем пучке, аналогична расчетам потерь энергии при отражении от жесткой плоскости, которые детально изложены в [6, 7]. Проводя аналогичные вычисления, получаем

$$\eta = \frac{\tilde{\nu}}{\omega \sin(\pi/3)} \left(\int_0^\infty k |A(k)|^2 e^{-\psi(k)} dk / \int_0^\infty (|A(k)|^2/k) e^{-\psi(k)} dk \right),$$

где

$$\psi = \frac{\tilde{\nu}k^3}{\omega} \int_{z_0}^{z_c} \frac{(1 + \mu^2)^2}{\mu} dz'.$$

Оценки коэффициента энергетических потерь для случая солевой стратификации в лабораторных условиях (когда $N \sim 1 \text{ с}^{-1}$, $dN/dz \sim 0,1 \text{ с}^{-1}/\text{см}$ и для $l = 10 \text{ см}$) и верхней атмосферы (период плавучести $T_b \approx 30 \text{ мин}$, $dT_b/dz \approx 5 \text{ мин}/\text{км}$ и для $l \approx 1 \text{ км}$) показывают, что его величина составляет $\eta \approx 10\%$ в первом случае и $\eta \approx 0,03\%$ во втором. В реальных условиях в большинстве случаев можно ожидать, что его величина составляет несколько процентов с учетом турбулентного характера движений, вызывающих дополнительное затухание волновых процессов.

4. Внутренние пограничные течения на разрывах производных плотности.

Если частота плавучести — достаточно гладкая функция координаты z (непрерывна вместе со своими производными вплоть до пятой включительно), то распространение волновых пучков описывается уравнением второго порядка (2.1). Когда частота плавучести разрывна (или какие-то ее производные, не выше пятого порядка), то для обеспечения необходимой гладкости спектральной функции необходимо использовать решения сингулярно возмущенного уравнения

$$\hat{L}_b f \equiv \nu D f'''' + i\omega(\nu + D) f'' - \left[\omega^2 + \frac{i(\nu + D)}{\omega} k^2 (N^2 + \omega^2) \right] f = 0.$$

Его решения, как и волнового уравнения (2.1), можно представить в эйкональном виде

$$f_\nu = e^{i\sigma_\nu}, \quad f_D = e^{i\sigma_D},$$

$$\sigma'_\nu = \pm \frac{1+i}{l_\nu} \left[1 + \frac{i}{4} \frac{\nu + D}{\nu - D} k^2 l_\nu^2 (\mu^2 + 2) \right], \quad \sigma'_D = \pm \frac{1+i}{l_D} \left[1 + \frac{i}{4} \frac{D + \nu}{D - \nu} k^2 l_D^2 (\mu^2 + 2) \right] \quad (4.1)$$

(штрих означает производную по координате z). В решения (4.1) входят внутренние вязкий и диффузионный масштабы $l_\nu = \sqrt{2\nu/\omega}$, $l_D = \sqrt{2D/\omega}$, которые характеризуют толщину расщепленного пограничного течения. Именно такие масштабы возникают в задаче отражения внутренних волн от жесткой стенки [8], их отношение определяется значениями коэффициентов вязкости и диффузии (числом Шмидта) и не зависит от времени, как и в задаче формирования индуцированного диффузией пограничного течения на непроницаемой стенке [15].

Без ограничения общности можно считать, что разрыв частоты плавучести (или ее производных) находится на уровне $z = 0$. Пусть снизу от этого уровня частота плавучести есть гладкая функция $N_1(z)$, а сверху — гладкая функция $N_2(z)$, причем $\mu_i(z) = \sqrt{N_i^2(z) - \omega^2/\omega}$.

Схема течений в окрестности разрыва частоты плавучести (или ее более высокой производной), образующихся при падении волнового пучка снизу на этот разрыв, включает, кроме падающего, пучок, прошедший вверх, пучок, отраженный вниз, и две пары пограничных течений (над и под разрывом) с расщепленными масштабами изменчивости скорости и плотности (солёности). Пространственная структура волновых пучков описывается формулами (1.2) и (2.4), а пограничных течений — формулами (4.1). Поэтому спектральные функции полного поля можно записать в виде

$$f = Ae^{i\sigma_1^+} + Be^{i\sigma_1^-} + D_{1\nu}e^{i\sigma_{1\nu}} + D_{1D}e^{i\sigma_{1D}}, \quad z < 0, \quad f = Ce^{i\sigma_2} + D_{2\nu}e^{i\sigma_{2\nu}} + D_{2D}e^{i\sigma_{2D}}, \quad z > 0.$$

Здесь A , B и C — амплитуды падающей, прошедшей и отраженной волн; $D_{1\nu}$, $D_{2\nu}$ — амплитуды скоростных пограничных слоев снизу и сверху от границы разрыва; D_{1D} , D_{2D} — амплитуды плотностных пограничных слоев. Эйконалы в соответствии с предыдущими результатами выражаются соотношениями

$$\sigma_1^{+\prime} = \varphi_{11}^+ + k^2(l_\nu^2 + l_D^2)\varphi_{12}^+, \quad \sigma_1^{-\prime} = \varphi_{11}^- + k^2(l_\nu^2 + l_D^2)\varphi_{12}^-, \quad \sigma_2' = \varphi_{21} + k^2(l_\nu^2 + l_D^2)\varphi_{22},$$

$$\sigma_{1\nu}' = -\frac{1+i}{l_\nu} (1 + ik^2 l_\nu^2 \psi_1), \quad \sigma_{2\nu}' = \frac{1+i}{l_\nu} (1 + ik^2 l_\nu^2 \psi_2),$$

$$\sigma_{1D}' = -\frac{1+i}{l_D} (1 - ik^2 l_D^2 \psi_1), \quad \sigma_{2D}' = \frac{1+i}{l_D} (1 - ik^2 l_D^2 \psi_2).$$

Здесь штрих означает производную по координате z и введены обозначения

$$\varphi_{11}^\pm = \mp k\mu_1 + \frac{i\mu_1'}{2\mu_1}, \quad \varphi_{12}^\pm = \pm \frac{ik(1 + \mu_1^2)^2}{4\mu_1} - \frac{(1 + 3\mu_1^4)\mu_1'}{4\mu_1^3}, \quad \varphi_{21} = -k\mu_2 + \frac{i\mu_2'}{2\mu_2},$$

$$\varphi_{22} = \frac{ik(1 + \mu_2^2)^2}{4\mu_2} - \frac{(1 + 3\mu_2^4)\mu_2'}{4\mu_2^3}, \quad \psi_1 = \frac{1}{4} \frac{\nu + D}{\nu - D} (2 + \mu_1^2), \quad \psi_2 = \frac{1}{4} \frac{\nu + D}{\nu - D} (2 + \mu_2^2).$$

Входящие сюда функции $\mu_i(z)$ и их производные берутся в точке $z = 0$.

Непрерывность функции f и ее производных вплоть до пятой включительно приводит к следующей алгебраической системе шестого порядка для определения неизвестных амплитуд

$$(e^{i\sigma_1^-})^{(n)} B - (e^{i\sigma_2})^{(n)} C + (e^{i\sigma_{1\nu}})^{(n)} D_{1\nu} + (e^{i\sigma_{1D}})^{(n)} D_{1D} - (e^{i\sigma_{2\nu}})^{(n)} D_{2\nu} - (e^{i\sigma_{2D}})^{(n)} D_{2D} = \\ = -(e^{i\sigma_1^+})^{(n)} A_0, \quad n = 0, 1, \dots, 5, \quad (4.2)$$

где (n) — соответствующая производная по z при $z = 0$, а $A_0 = A \exp\left(i \int_{z_0}^0 \sigma_1^+ dz\right)$. Эле-

менты матрицы системы (4.2), а также элементы вектора правых частей записывались в виде конечных разложений по степеням малых параметров l_ν и l_D . Решение системы (4.2) искалось в виде разложения амплитуд $B, C, D_{1\nu}, D_{2\nu}, D_{1D}, D_{2D}$ в ряды по степеням l_ν, l_D . Для простоты ниже приводятся решения этой системы в отсутствие диффузии соли:

$$B = \frac{k(\mu_1 - \mu_2) - (i/2)(\mu_1'/\mu_1 - \mu_2'/\mu_2)}{\Delta} - \frac{ic}{2\Delta^2}, \quad C = \frac{2k\mu_1}{\Delta} - \frac{id}{2\Delta^2}, \\ D_{1\nu} = \frac{ia}{4\Delta} + \frac{(1+i)b}{8\Delta}, \quad D_{2\nu} = -\frac{ia}{4\Delta} + \frac{(1+i)b}{8\Delta},$$

где

$$\Delta = k(\mu_1 + \mu_2) + \frac{i}{2} \left(\frac{\mu_1'}{\mu_1} - \frac{\mu_2'}{\mu_2} \right), \quad a = k\mu_1 \left[2k^2(\mu_1^2 - \mu_2^2) - \frac{3}{2} \left(\frac{\mu_1'^2}{\mu_1^2} - \frac{\mu_2'^2}{\mu_2^2} \right) + \frac{\mu_1''}{\mu_1} - \frac{\mu_2''}{\mu_2} \right], \\ b = \mu_1\mu_2 k^2 \left[2k^2(\mu_1^2 - \mu_2^2) - \frac{3}{2} \left(\frac{\mu_1'^2}{\mu_1^2} - \frac{\mu_2'^2}{\mu_2^2} \right) + \left(\frac{\mu_1''}{\mu_1} - \frac{\mu_2''}{\mu_2} \right) \right] - ik\mu_1 [s + 3k^2(\mu_1\mu_1' - \mu_2\mu_2')], \\ c = \frac{k^4(\mu_1^2 - \mu_2^2)(\mu_1^2\mu_2^2 - 1)}{\mu_1\mu_2} + ik^5\mu_1 \left[\frac{\mu_1'}{\mu_1^3} - \frac{\mu_2'}{\mu_2^3} - \frac{\mu_2'(\mu_1^2 - \mu_2^2)}{\mu_2} \right] - \\ - ik\mu_1 \left[s - \frac{3\mu_2'}{4\mu_2} \left(\frac{\mu_1'^2}{\mu_1^2} - \frac{\mu_2'^2}{\mu_2^2} \right) + \frac{\mu_2'}{2\mu_2} \left(\frac{\mu_1''}{\mu_1} - \frac{\mu_2''}{\mu_2} \right) \right], \\ d = -k^4(\mu_1^2 - \mu_2^2) \left[\frac{\mu_1^2\mu_2^2 + 1}{\mu_1\mu_2} + 2\mu_1^2 \right] + ik^3\mu_1 \left[\frac{\mu_1'}{\mu_1^3} - \frac{\mu_2'}{\mu_2^3} - \frac{\mu_1'(\mu_1^2 - \mu_2^2)}{\mu_1} \right] + \\ + k^2\mu_1(\mu_1 + \mu_2) \left[\frac{3}{2} \left(\frac{\mu_1'^2}{\mu_1^2} - \frac{\mu_2'^2}{\mu_2^2} \right) - \frac{\mu_1''}{\mu_1} + \frac{\mu_2''}{\mu_2} \right] - ik\mu_1 \left[s - \frac{3\mu_1'}{4\mu_1} \left(\frac{\mu_1'^2}{\mu_1^2} - \frac{\mu_2'^2}{\mu_2^2} \right) + \frac{\mu_1'}{2\mu_1} \left(\frac{\mu_1''}{\mu_1} - \frac{\mu_2''}{\mu_2} \right) \right], \\ s = \frac{15}{4} \left(\frac{\mu_1'^3}{\mu_1^3} - \frac{\mu_2'^3}{\mu_2^3} \right) - \frac{9}{2} \left(\frac{\mu_1'\mu_1''}{\mu_1^2} - \frac{\mu_2'\mu_2''}{\mu_2^2} \right) + \frac{\mu_1'''}{\mu_1} - \frac{\mu_2'''}{\mu_2}.$$

Из полученных формул следует, что характер возникающего течения существенно зависит от тонкой структуры поля плотности среды. Если разрывны частота плавуности и/или ее первая производная, то амплитуда отраженного пучка имеет тот же порядок, что и амплитуда падающего пучка, в то время как амплитуда пограничного течения мала и определяется вязкостью среды ($\sim \nu$). Если частота плавуности и ее первая производная непрерывны, а вторая производная разрывна, то как отраженный пучок, так и пограничный слой имеют одинаковый порядок малости $\sim \nu$. Если же разрывна только третья производная частоты плавуности, то отраженный пучок имеет порядок малости $\sim \nu$, а пограничное течение $\sim \nu^{3/2}$. Если, наконец, частота плавуности непрерывна вместе со своими производными вплоть до третьей, то как отраженный пучок, так и внутреннее пограничное течение отсутствуют в соответствии с результатами пп. 1, 2.

Таким образом, прямые вычисления показывают, что на разрывах градиента плотности проходящий пучок внутренних волн не просто рассеивается, но и формирует специфическое внутреннее пограничное течение с расщепленными масштабами изменчивости скорости и плотности. В зависимости от характера разрыва меняется соотношение между долями энергии, остающимися в волновом поле и переходящими в пограничное течение, степень локализации которого растет с увеличением частоты волны.

В линейном приближении падающая волна и порождаемые ею течения не взаимодействуют между собой. В реальных условиях в силу нелинейности уравнений движения и уравнения состояния такое взаимодействие будет иметь место и порождать новые формы движений с собственными характерными масштабами. Качественно можно выделить по крайней мере два класса таких масштабов: макромасштаб, определяемый геометрией волнового пучка, и микромасштаб, задаваемый минимальным кинетическим коэффициентом задачи (в данном случае коэффициентом диффузии) и частотой волны. Стадии разрушения нелинейно взаимодействующих внутренних волн предшествует образование мелкомасштабных высокоградиентных прослоек (разрывов стратификации [16]), что свидетельствует о важности эффектов расщепления масштабов в общей волновой динамике.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 96-05-64004).

ЛИТЕРАТУРА

1. Бреховских Л. М., Гончаров В. В. Введение в механику сплошных сред. М.: Наука, 1982.
2. Габов С. А., Свешников А. Г. Задачи динамики стратифицированных жидкостей. М.: Наука, 1986.
3. Лайтхилл Дж. Волны в жидкостях. М.: Мир, 1981.
4. Тернер Дж. Эффекты плавучести в жидкостях. М.: Мир, 1977.
5. Thomas N. H., Stevenson T. N. A similarity solution for viscous internal waves // J. Fluid Mech. 1972. V. 54, pt 3. P. 495–506.
6. Кистович Ю. В., Чашечкин Ю. Д. Отражение пакетов внутренних волн в вязкой жидкости от плоской жесткой границы // Изв. РАН. Физика атмосферы и океана. 1994. Т. 30, № 6. С. 752–758.
7. Кистович Ю. В., Чашечкин Ю. Д. Отражение пакетов внутренних гравитационных волн от плоской жесткой поверхности // Докл. РАН. 1994. Т. 337, № 3. С. 401–404.
8. Кистович Ю. В., Чашечкин Ю. Д. Отражение пучков внутренних гравитационных волн от плоской жесткой поверхности // Прикл. математика и механика. 1995. Т. 59, вып. 4. С. 607–613.
9. Кистович Ю. В., Чашечкин Ю. Д. Геометрия и энергетика пучков внутренних волн // Докл. РАН. 1995. Т. 344, № 5. С. 684–686.
10. Нестеров С. В. Собственные частоты внутренних волн в жидкости с произвольной частотой Брента — Вяйсяля // Докл. АН СССР. 1983. Т. 271, № 3. С. 570–573.
11. Федоров К. Н. Тонкая термохалинная структура вод океана. Л.: Гидрометеиздат, 1976.
12. Макаров С. А., Неклюдов В. И., Чашечкин Ю. Д. Пространственная структура пучков двумерных монохроматических внутренних волн в экспоненциально стратифицированной жидкости // Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана. 1990. Т. 26, № 7. С. 744–754.
13. Океанология. Физика океана. Т. 1. Гидрофизика океана / Отв. ред. В. М. Каменкович, А. С. Монин. М.: Наука, 1978.
14. Справочник по специальным функциям / Под ред. М. Абрамовица и И. Стиган. М.: Наука, 1979.

15. **Кистович А. В., Чашечкин Ю. Д.** Структура нестационарного пограничного течения на наклонной плоскости в непрерывно стратифицированной среде // Прикл. математика и механика. 1993. Т. 57, вып. 4. С. 50–56.
16. **McEwan A. D.** Interactions between internal gravity waves and their traumatic effect on a continuous stratification // Boundary-Layer Meteorology. 1973. V. 5. P. 159–175.

Поступила в редакцию 19/XII 1996 г.
