12. **Буйлов А. Б., Тюряев И. Я.** Определение величины разреженных зон под секционирующими решетками // ЖПХ.— 1964.— Т. 37, № 8.
13. **Ейтс Д.** Основы механики псевдоожижения с приложениями.— М.: Мир, 1986.

г. Новосибирск *Поступила 21/X 1988 г., в окончательном варианте — 27/IV 1989 г.*

УДК 536.25

В. И. Елисеев, Ю. П. Совит

СВОБОДНО-КОНВЕКТИВНЫЙ ТЕПЛООБМЕН В ОТКРЫТОЙ СИСТЕМЕ ВЕРТИКАЛЬНЫХ СТЕРЖНЕЙ

Исследования свободно-конвективного теплообмена на вертикальных поверхностях представляют собой хорошо разработанный раздел теории естественно-конвективных течений. Обширный справочный и библиографический материал по данной теме можно найти в [1]. Однако проблемы разработки эффективных теплообменных аппаратов, необходимость расчета температурных режимов сложных стержневых систем, обладающих тепловыделением, выбор эффективных способов защиты от перегрева пакетов электрических кабелей определяют актуальность постановки и решения задач о гидродинамике и теплообмене различных наборов стержней. Эффективной моделью, которая позволяет отразить гидродинамическое и тепловое взаимодействие стержней между собой и всего пучка в целом с окружающей средой, является модель фильтрационного течения. В настоящий момент она широко применяется для расчетов теплообмена при вынужденной конвекции в анизотропных стержневых структурах [2—5]. При этом для определения сил теплового и гидродинамического взаимодействия твердой и жидкой фаз в единице объема пористого тела используются критериальные соотношения, получаемые на основе обработки экспериментальных данных. Вопросам математического моделирования свободно-конвективного теплообмена в таких средах уделено значительно меньше внимания. Существующие работы носят в основном экспериментальный характер [6—9]. Поэтому большой интерес представляет применение модели фильтрационного течения в пористой среде к описанию свободно-конвективных процессов в пучках стержней и проведение численных расчетов теплообмена стержневых сборок с внешней охлаждающей средой. Вместе с тем отсутствие критериальных зависимостей для объемного трения и тепловыделения при таком течении обусловливает актуальность проблемы теоретического определения искомых величин. Решение этих задач и является целью данной работы.

1. Основные уравнения и граничные условия. Рассмотрим осесимметричное свободно-конвективное течение несжимаемой жидкости в вертикальном пучке стержней. Предположим, что режим течения ламинарный, а вязкость, теплопроводность и теплоемкость не зависят от температуры. Направим ось x вдоль продольной оси пучка, тогда ось r будет лежать в плоскости, перпендикулярной оси x, а угол φ отсчитываться от некоторого начального положения плоскости xor. Выделим малый элемент пространства $\Delta V = r\Delta\varphi\Delta x\Delta r$, содержащий кроме жидкости еще и достаточно большое количество стержней (рис. 1). При наличии стержней структура пространства характеризуется величинами

$$\varepsilon = \Delta V_ж/\Delta V, \quad \varepsilon_x = \Delta S_{жx}/\Delta S_x, \quad \varepsilon_r = \Delta S_{жr}/\Delta S_r, \quad \varepsilon_\varphi = \Delta S_{ж\varphi}/\Delta S_\varphi,$$

где $\Delta V_ж$ — объем пространства, занятого жидкостью; ΔS_j — площадь стороны элемента с нормалью вдоль соответствующей оси; $\Delta S_{жj}$ — площадь проточной части соответствующей стороны элемента. Поле течения определяется вектором скорости $\mathbf{V} = \mathbf{i}u + \mathbf{j}v$, а также векторами массовых и объемных сил, действующих в выделенном элементе. Принимая во внимание осесимметричность движения и используя стандартную процедуру вывода уравнений сохранения для сплошной среды [10], имеем

$$\varepsilon_x \partial ur/\partial x + \varepsilon_r \partial vr/\partial r = G, \tag{1.1}$$

$$\varepsilon\frac{\partial u}{\partial \tau} + \varepsilon_x u\frac{\partial u}{\partial x} + \varepsilon_r v\frac{\partial u}{\partial r} = R_x - \frac{\varepsilon_x}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + A\varepsilon + \nu_{эф}\left[\varepsilon_x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\varepsilon_r}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)\right],$$

$$\varepsilon \frac{\partial v}{\partial \tau} + \varepsilon_x u \frac{\partial v}{\partial x} + \varepsilon_r v \frac{\partial v}{\partial r} = R_r - \frac{\varepsilon_r}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \nu_{эф} \left[\varepsilon_x \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \varepsilon_r \left(\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r^2} \right) \right],$$

$$\rho c_p \varepsilon \frac{\partial T}{\partial \tau} + \rho c_p \left(\varepsilon_x u \frac{\partial T}{\partial x} + \varepsilon_r u \frac{\partial T}{\partial r} \right) = Q + \lambda_{эф} \left[\varepsilon_x \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \varepsilon_r \left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} \right) \right].$$

Здесь A характеризует действие объемных сил, возникающих при температурном расширении жидкости. В рамках модели Буссинеска $A = g(T - T_*)/T_*$ (T_* — некоторая характерная температура, g — ускорение свободного падения). Величины R_x, R_r, Q отражают силовое и тепловое взаимодействие стержней с жидкостью в единице объема, параметр G — выделение или поглощение массы, которое может происходить в системе вследствие химических реакций или газовыделения на поверхностях стержней. Уравнения (1.1) описывают распределения истинных осредненных по жидкому объему параметров потока. Введение понятия фильтрационной скорости $\mathbf{V}_1 = \varepsilon \mathbf{V}$ позволяет распространить эти уравнения на весь рассматриваемый объем. Для полноты постановки их необходимо дополнить еще уравнением теплопереноса в твердой фазе, частными случаями которого могут быть условия изотермичности $T_с = \mathrm{const}$ или тепловыделения $q_с = \mathrm{const}$ на поверхностях стержней.

Полученные уравнения содержат геометрические характеристики пространства ε, ε_x, ε_r и параметры динамического взаимодействия фаз R_x, R_r. В общем случае течения в анизотропной пористой структуре $\varepsilon_x \neq \varepsilon_r$ и $R_x \neq R_r$. Однако принимая во внимание, что $\varepsilon_x = \varepsilon$ для пучка стержней постоянного радиуса, и вводя дополнительное предположение, что и $\varepsilon_r \sim \varepsilon$, можем упростить уравнения (1.1), после чего они полностью будут совпадать с уравнениями [11].

Следующая возможность упрощения исходных уравнений заключается в использовании приближений модели пограничного слоя [12]. Полагая число Рэлея для пучка значительно большим единицы и принимая, что поперечные скорости значительно меньше продольных, получим следующую систему (течение стационарное, $p = p_\infty$, $dp/dx = 0$, $T_* = T_\infty = \mathrm{const}$):

(1.2) $$\varepsilon^{-1} \left(u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} + v_1 \frac{\partial u_1}{\partial r} \right) = f + \varepsilon g \frac{T_1 - T_\infty}{T_\infty} + \nu_{эф} \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_1}{\partial r} \right),$$

$$\rho c_p \varepsilon^{-1} \left(u_1 \frac{\partial T_1}{\partial x} + v_1 \frac{\partial T_1}{\partial r} \right) = \varepsilon^{-1} q + \lambda_{эф} \left(\frac{\partial^2 T_1}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_1}{\partial r} \right), \quad \frac{\partial (r u_1)}{\partial x} + \frac{\partial (r v_1)}{\partial r} = G.$$

Заметим, что уравнения (1.1), (1.2) вместо физической вязкости и теплопроводности жидкости содержат некоторые условные параметры $\mu_{эф}$ и $\lambda_{эф}$, при помощи которых учитываются различного рода неточности осреднения и влияния твердых поверхностей на диссипативные процессы. Однако, как показано в [13, 14], для фильтрационных потоков с большой степенью точности можно полагать, что $\mu_{эф} = \mu$. Это условие принято в настоящей работе и для $\lambda_{эф}$.

С внешней стороны к пучку примыкает область движущейся однородной жидкости. Поскольку во внутренней области течение рассматривается в рамках модели пограничного слоя, то вполне естественно и во внешней области также использовать уравнения осесимметричного пограничного слоя, которые отличаются от уравнений (1.2) тем, что $\varepsilon = 1$, $f = q = G = 0$ и вместо индекса 1 используется индекс 2.

Между двумя областями движения существует гидродинамическое и тепловое взаимодействие. Формально оно отражается при помощи равенств скоростей, температур, напряжений и тепловых по-

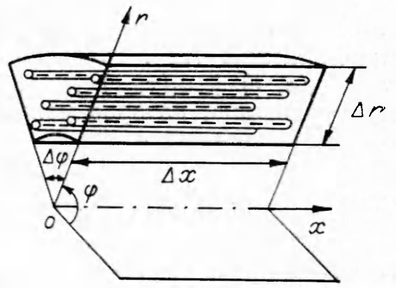

Рис. 1

токов на границе вязкого и фильтрационного течения [15]

(1.3) $$u_2(x, R_п) = \varepsilon^{-1} u_1(x, R_п),\ v_1(x, R_п) = v_2(x, R_п),$$
$$T_1(x, R_п) = T_2(x, R_п),$$
$$\mu \frac{\partial u_2}{\partial r}\bigg|_{r=R_п} = \mu_{эф} \frac{\partial u_1}{\partial r}\bigg|_{r=R_п},\quad \lambda \frac{\partial T_2}{\partial r}\bigg|_{r=R_п} = \lambda_{эф} \frac{\partial T_1}{\partial r}\bigg|_{r=R_г}.$$

Кроме этих соотношений, необходимы еще условия на оси пучка и на границах области всего течения:

(1.4) $$v_1 = 0,\ \partial u_1/\partial r = 0,\ \partial T_1/\partial r = 0 \text{ при } r = 0,$$
$$u_2 \to 0,\ T_2 \to T_\infty \qquad \text{при } r \to \infty.$$

Для замыкания поставленной задачи остается определить f и q.

2. Определение объемного сопротивления и тепловыделения в пучке стержней. Используем для этой цели модель «свободной ячейки» для двухфазных систем [16, 17]. Для случая продольно обтекаемого цилиндра, входящего в состав сборки стержней, ячейка представляет собой область между двумя коаксиальными цилиндрами. Внутренний цилиндр является обтекаемым цилиндрическим телом с радиусом $R_с$, а внешний — жидкая оболочка радиуса R_Δ. Радиус внешнего цилиндра R_Δ принимается таким, чтобы отношение объема жидкости в межстержневом пространстве к полному объему пучка был равен пористости, т. е. $\varepsilon = 1 - (R_с/R_\Delta)^2$. В принятой модели решение уравнений, описывающих стабилизированное движение жидкости и теплообмен стержня, проводится с использованием условий симметрии на внешней границе ячейки. Поэтому стержни в пучке изолированные и между собой не взаимодействуют.

Такой подход не позволяет отразить влияние граничных условий всего процесса на распределения основных параметров по толщине пучка. В связи с этим модифицируем рассмотренную модель таким образом, чтобы снять это ограничение.

Будем полагать, что течение в межстержневом пространстве свободноконвективное, осесимметричное и в приближениях моделей пограничного слоя и Буссинеска описывается уравнениями

(2.1) $$u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial r} = g\left(\frac{T}{T_\infty} - 1\right) + \frac{\nu}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right),$$
$$\rho c_p\left(u\frac{\partial T}{\partial x} + v\frac{\partial T}{\partial r}\right) - \frac{\lambda}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right)$$

с граничными условиями

(2.2) $$u = u_\Delta,\ T = T_\Delta \text{ при } r = R_\Delta,\ u = 0,\ T = T_с \text{ или}$$
$$-\lambda\partial T/\partial r = q_с \text{ при } r = R_с$$

(U_Δ, T_Δ — некоторые условные величины, которые должны быть определены через фильтрационные параметры потока). В таком представлении ячейки, составляющие пучок, уже не являются изолированными и посредством функциональных зависимостей $U_\Delta = F_u(u_1, T_1)$, $T_\Delta = F_T(u_1, T_1)$ связываются с параметрами пучка и внешнего пограничного слоя. Для решения уравнений (2.1) применим метод последовательных приближений [18], согласно которому решение представляется в виде $u = u_0(x, r) + u_1(x, r) + \ldots$, где функция u_0 удовлетворяет упрощенному уравнению, которое можно получить из (2.1), опустив конвективные составляющие, т. е.

(2.3) $$\frac{\nu}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u_0}{\partial r}\right) + g\left(\frac{T_0}{T_\infty} - 1\right) = 0,\quad \frac{\lambda}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T_0}{\partial r}\right) = 0$$

(в дальнейшем индекс 0 отбросим, поскольку будем использовать только нулевое приближение).

В качестве граничных условий для (2.3) возьмем (2.2). Постановка этой задачи и некоторые результаты расчетов для пучка изотермических стержней приведены в [19].

Решением системы уравнений (2.3) с граничными условиями $q_c =$ $= \text{const}$ являются выражения

$$T = T_\Delta + T_q(\ln R_\Delta/R_c - \ln r/R_c), \tag{2.4}$$

$$u = U_\Delta \frac{\ln r/R_c}{\ln R_\Delta/R_c} + \frac{1}{4}\,\mathrm{Gr}^* \left(\frac{\nu}{R_\text{п}}\right) \frac{1}{R_\text{п}^2} \Bigg[\left(r^2 - R_\Delta^2\right) \ln r/R_c + \left(\ln R_\Delta/R_c + 1 + \frac{T_\Delta - T_q}{T_q}\right) \left(R_\Delta^2 \varepsilon + R_c^2 - r^2\right) \Bigg]$$

(T_q — характерная температура стержня, $T_q = q_c R_c/\lambda$, Gr^* — модифицированное число Грасгофа, $\mathrm{Gr}^* = gR_\text{п}^3 T_q/(\nu^2 T_\infty)$). Имея распределения u и T в ячейке, можно определить трение и тепловой поток на стержне и связать их с искомыми f и q:

$$f = \frac{2\pi R_c}{\pi R_\Delta^2}\, \mu \left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=R_c}, \quad q = \frac{2\pi R_c}{\pi R_\Delta^2}\, \lambda \left.\frac{\partial T}{\partial r}\right|_{r=R_c}. \tag{2.5}$$

Используя в (2.5) выражения (2.4), получим

$$f = \frac{2\nu U_\Delta}{R_\Delta^2 \ln R_\Delta/R_c} + g\frac{T_q}{T_\infty}\left[(\varepsilon - 1 + a_\varepsilon)\left(\ln R_\Delta/R_c + \frac{T_\Delta - T_\infty}{T_q}\right) + a_\varepsilon - 1 + \varepsilon/2\right], \tag{2.6}$$

$$q = 2\lambda T_q/R_\Delta^2 \quad (a_\varepsilon = \varepsilon/(2\ln R_\Delta/R_c)).$$

Примем теперь следующее предположение. Считаем, что фильтрационная скорость равна среднерасходной скорости в рассматриваемой ячейке, а фильтрационная температура — средней калориметрической величине потока, проходящего в межстержневом пространстве:

$$u_1 = 2\pi \int\limits_{R_c}^{R_\Delta} urdr/\left(\pi R_\Delta^2\right), \quad T_1 = 2\pi \int\limits_{R_c}^{R_\Delta} uTrdr/\left(\pi R_\Delta^2 u_1\right). \tag{2.7}$$

После подстановки (2.4) в (2.7) и соответствующих преобразований находим связь между U_Δ, T_Δ и u_1, T_1:

$$U_\Delta = \mathrm{AU}_q + \mathrm{BU}_q(T_\Delta/T_q), \quad T_\Delta = (u_1 T_1 - \mathrm{U}_q T_q)/A_\Delta, \tag{2.8}$$

где
$$\mathrm{AU}_q = \frac{u_1 + \mathrm{Gr}^*(\nu/R_\text{п})\left[(\ln R_\Delta/R_c - T_\infty/T_q + 1)\, b_1 + b_2\right]}{1 - a_\varepsilon};$$

$$\mathrm{BU}_q = \mathrm{Gr}^*(\nu/R_\text{п})\frac{b_1}{1 - a_\varepsilon}; \quad A_\Delta = u_1 - \mathrm{Gr}^*(\nu/R_\text{п})\left[\frac{b_1 b_3}{1 - a_\varepsilon} + \left(\frac{R_\Delta}{R_\text{п}}\right)^2 \frac{\ln R_\Delta/R_c}{8} b_4\right];$$

$$\mathrm{U}_q = u_1 \ln R_\Delta/R_c - \mathrm{AU}_q b_3 - \mathrm{Gr}^*(\nu/R_\text{п})(R_\Delta/R_\text{п})^2(\ln R_\Delta/R_c)/8 \times [b_5 + (1 + \ln R_\Delta/R_c - T_\infty/T_q) b_4].$$

Набор констант $b_1, \ldots, b_5$ определяется только геометрией пучка: $b_1 = (R_\Delta/R_\text{п})^2 \varepsilon(a_\varepsilon + \varepsilon/2 - 1)/4$, $b_2 = (R_\Delta/R_\text{п})^2 \ln R_\Delta/R_c(1 - a_\varepsilon - \varepsilon a_\varepsilon/2)/8$, $b_3 = \ln R_\Delta/R_c - 1 + a_\varepsilon$, $b_4 = 4a_\varepsilon b_3 + (1{,}5\varepsilon - 1)a_\varepsilon - 2\varepsilon + 1$, $b_5 = 1{,}5(1 - a_\varepsilon) - \ln R_\Delta/R_c - \varepsilon a_\varepsilon/4$.

В результате сформулирована сопряженная задача свободно-конвективного теплообмена открытого пучка вертикальных стержней, состоящая из уравнений фильтрационного течения в пучке (1.2), уравнений внешнего пограничного слоя ($f = q = 0$, $\varepsilon = 1$), граничных условий (1.4). Дополнительные зависимости для трения и объемного тепловыделения в пучке тепловыделяющих стержней даны соотношениями (2.6), (2.8).

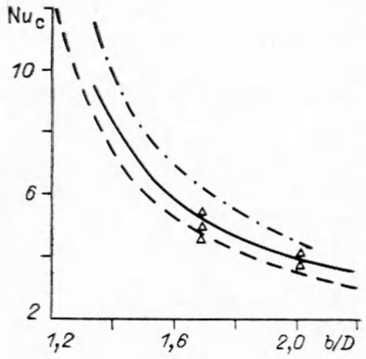

Рис. 2

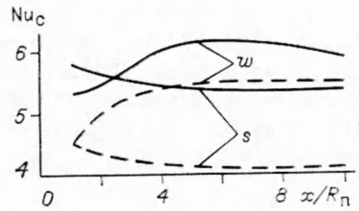

Рис. 3

3. Результаты расчетов, сравнение с экспериментом. Для решения сформулированной задачи применен численный метод, описанный в [20].

Одной из немногих работ, содержащих изложение теоретических и экспериментальных результатов исследований теплообмена пучка тепловыделяющих стержней, является [8]. Математическое описание процесса в ней проведено с использованием ячеечной модели с граничными условиями типа свободная поверхность, что исключает влияние внешней среды на теплообмен в пучке. Для осесимметричного пучка, взаимодействующего с внешней средой, наиболее близкими к этим условиям, естественно, будут условия в центре. Поэтому для сравнения результатов выбираем параметры стержня, находящегося в центре пучка. Треугольная схема укладки в [8], состоящая из 42 стержней радиуса 0,0079 м, определяла зависимость между пористостью и относительным шагом

$$\varepsilon = 1 - \pi/(2\sqrt{3})(D/b)^2 \tag{3.1}$$

(b — расстояние между центрами, D — диаметр стержня; $R_п = R_c(\sqrt{2\sqrt{3}N}/\sqrt{\pi})(b/D)$ (N — количество стержней в пучке)).

Теплофизические параметры среды соответствовали параметрам воздуха $\rho = 1{,}21$ кг/м^3, $c_p = 1005$ Дж/(кг·К), $\nu = 0{,}15\cdot10^{-4}$ м^2/с, Pr $= 0{,}7$, $T_\infty = 20$ °С. В расчетах варьировались $b/D = 1{,}4 \div 2{,}2$ и $q_c = 125 \div 500$ Вт/м^2, это отвечает диапазону изменений определяющих параметров [8].

Значение локального числа Нуссельта для стержня в ячейке с использованием (2.4)

$$\mathrm{Nu_c} = \frac{\alpha D}{\lambda} = \frac{2}{T_c - T_1} = \frac{2}{T_\Delta + \ln R_\Delta/R_c - T_1}$$

(α — коэффициент теплоотдачи, T_c — температура поверхности стержня).

На рис. 2 представлено сравнение полученных по предлагаемой методике значений $\mathrm{Nu_c}$ в центре пучка (сплошная линия) с теоретическими (штрихпунктирная) и экспериментальными (треугольники) результатами [8]. Следует отметить хорошее совпадение найденных распределений с имеющимися экспериментальными данными для $b/D = 1{,}68$; $2{,}03$, что позволяет сделать вывод об адекватности предложенной модели теплообмена и методики расчета.

Как показывают расчеты, влияние внешней среды сказывается в небольшой по толщине зоне у поверхности пучка. Повышение интенсивности теплообмена здесь обусловлено формированием участка эжекции внешнего холодного газа вследствие развития течения в объеме пучка. Это приводит к увеличению $\mathrm{Nu_c}$ и снижению температуры стержней на поверхности по сравнению с центром.

На рис. 3 представлены распределения $\mathrm{Nu_c}$ на поверхности (w) и в центре (s) пучков с тепловым потоком $q_c = 125$ Вт/м^2 на каждом стержне. Относительный шаг $b/D = 1{,}68$ (сплошные кривые), $2{,}03$ (штриховые).

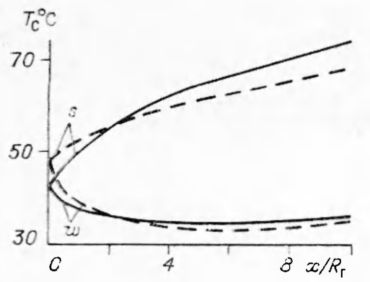

Рис. 4

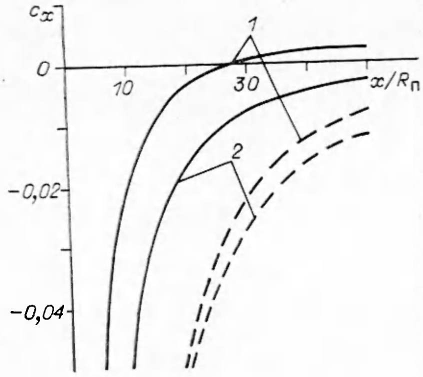

Рис. 5

На рис. 4 изображены распределения температур стержней $T_с$ для рассматриваемых вариантов (условные обозначения совпадают с обозначениями на рис. 3). Дальнейшее увеличение $q_с$ (или Gr*) приводит к существенному усилению эжекции. При этом поперечные скорости течения во внешнем пограничном слое и на поверхности пучка могут достигать соизмеримых с продольными скоростями значений. На таких режимах применение модели пограничного слоя для фильтрационного течения в объеме пучка стержней становится необоснованным. Тогда необходимо переходить к решению задачи в полной постановке с учетом динамического и теплового взаимодействия фаз при поперечном обтекании стержней.

В данной работе рассматривалось также свободно-конвективное течение в пучке изотермических стержней. Как следует из [19], в этом случае

$$\mathrm{Nu}_с = \frac{2}{T_с - T_1}\frac{T_с - T_\Delta}{\ln R_\Delta/R_с}, \tag{3.2}$$

а эквивалент модифицированного числа Грасгофа Gr* $\mathrm{Gr} = gR_п^3(T_с - T_\infty)/(\nu^2 T_\infty)$. Как показали расчеты, распределения $\mathrm{Nu}_с(x)$ для пучков тепловыделяющих и изотермических стержней с одинаковыми геометрическими характеристиками практически совпадают между собой, если выполняется условие Gr = Gr*. Изменение мощности тепловыделения или начальной температуры, что тождественно изменению чисел Gr* или Gr, практически не сказывается на теплообмене стержней в центральной части пучка. Это подтверждает вывод в [8] о том, что на интенсивность теплообмена стержней определяющее влияние оказывает плотность их укладки. Проведем анализ этого факта на примере изотермического пучка.

Рассмотрим теплообмен стержня в ячейке для предельного случая, когда в центральной области пучка наступает тепловая стабилизация. Примем следующее условие стабилизации: $T_с - T_1 \leqslant 10^{-2}\, T_с$. Для этого течения $\mathrm{Nu}_с$ вычисляется по (3.2), а уравнение, определяющее T_Δ, приведено в [19]. Решение уравнения запишется как

$$T_\Delta - T_с = (-\mathrm{BT} + \mathrm{BT}\sqrt{1-\beta})/(2\mathrm{AT}), \tag{3.3}$$

где
$$\mathrm{AT} = (\nu/R_п)\frac{\mathrm{Gr}}{(T_с - T_\infty)\ln R_\Delta/R_с}\left[c_3 + c_5 + \frac{c_4(c_1+c_2)}{1-a_\varepsilon}\right];$$

$$\mathrm{BT} = \mathrm{AU}c_4 - (\nu/R_п)\,\mathrm{Gr}\,c_5;\quad \mathrm{AU} = \frac{u_1 - (\nu/R_п)\,\mathrm{Gr}\,c_1}{1-a_\varepsilon};$$

$$c_1 = -b_1;\ c_2 = -b_2;\ c_3 = (R_\Delta/R_п)^2[\ln R_\Delta/R_п + 1{,}5(a_\varepsilon - 1) + \varepsilon a_\varepsilon/4]/8;$$

$$\beta = 4\mathrm{AT}u_1(T_с - T_1)/\mathrm{BT}^2;\ c_4 = [\ln R_\Delta/R_с - 1 + a_\varepsilon]/\ln R_\Delta/R_с;$$

$$c_5 = (R_\Delta/R_п)^2[(1-a_\varepsilon)(2\varepsilon - 1) + \varepsilon a_\varepsilon/2 - 2\varepsilon c_4]/8.$$

При принятом условии тепловой стабилизации $\beta \sim 10^{-2}$. Поэтому, проводя линеаризацию (3.3) по β и соответствующие преобразования, имеем

$$T_\Delta - T_c = -\frac{u_1(T_c - T_1)}{u_1 c_4/(1 - a_\varepsilon) + (\nu/R_п)\,\mathrm{Gr}\,c_0}. \tag{3.4}$$

Тогда с учетом (3.4)

$$\mathrm{Nu}_c = \frac{1}{\ln R_\Delta/R_c}\,\frac{2}{c_4/(1 - a_\varepsilon) + (\nu/R_п)\,\mathrm{Gr}\,c_0/u_1} \tag{3.5}$$

($c_0 = b_1 c_1/(1 - a_\varepsilon) - c_5$, $u_1/(\nu/R_п)$ — безразмерная скорость фильтрационного течения в пучке).

Как видно, второе слагаемое в знаменателе соотношения (3.5) учитывает вклад динамических параметров течения в теплообмен стержня. Анализ показывает, что константа c_0 зависит только от b/D или ε и при изменении b/D от 1,2 до 2,2 меняется в пределах $(-0{,}0018 \div -0{,}0032)(R_\Delta/R_п)^2$. Если принять, что пучок состоит, например, из 100 стержней, то для $\mathrm{Gr} \leqslant 10^5$ второе слагаемое эквивалентно $B(\nu/R_п)/u_1$, где $B \sim 1$.

Таким образом, влияние динамических параметров потока на Nu_c в ячейке убывает пропорционально $1/u_1$, т. е. в процессе развития течения происходит трансформация потока от свободно-конвективного к вынужденному, который соответствует обтеканию и теплообмену стержня в канале с осевыми параметрами U_Δ, T_Δ. Опустив динамическую составляющую в (3.5), предельное нижнее значение Nu_c^* запишем в форме

$$\mathrm{Nu}_c^* = \frac{-2\,[\ln(1-\varepsilon) + \varepsilon]}{\ln(1-\varepsilon)\,[0{,}5\ln(1-\varepsilon) + 1] + \varepsilon} \tag{3.6}$$

(пористость ε вычисляется по (3.1)). Найденное распределение $\mathrm{Nu}_c^*(\varepsilon)$ представлено на рис. 2 штриховой линией. Максимальное отклонение значений Nu_c^* от численных результатов, полученных по описанной выше методике, не превышает 11 %. Это позволяет рекомендовать приближенную зависимость (3.6) в качестве нижней оценки интенсивности теплообмена при развитой свободной конвекции в пучке стержней.

В [19] обращено внимание на существование двух характерных форм свободно-конвективного течения во внешнем пограничном слое на пучке изотермических стержней. Первая реализуется на участке от начала формирования фильтрационного течения до наступления теплового равновесия между газом и стержнями в пучке. При этом течение во внешней области аналогично вынужденному течению с отсосом на ускоряющемся цилиндре радиуса $R_п$. Для данного течения $c_x < 0$ ($c_x = 1/(\rho u_0^2) \times \mu(\partial u/\partial r)|_{r=R_c}$, u_0 — начальная скорость в пучке). После достижения теплового равновесия в пучке во внешнем потоке развивается вторая форма течения. Профиль скорости в пограничном слое приобретает характерный для свободно-конвективного течения вид с $c_x > 0$. Условие $c_x = 0$ служит критерием перехода одной формы течения в другую.

На рис. 5 представлены распределения $c_x(x)$ для пучков изотермических стержней (сплошные линии). Полагалось, что пучок радиусом 0,02 м состоит из набора стержней радиусом 0,00025 м, нагретых до температуры $T_c = 200$ °C. Температура внешней среды $T_\infty = 20$ °C, число Прандтля $\mathrm{Pr} = 0{,}7$. Кривые *1* соответствуют пучку из 100 стержней ($N = 100$), для кривых *2* $N = 50$. Можно видеть, что увеличение плотности укладки пучка приводит к уменьшению участка с первой формой течения. Здесь же даны распределения c_x для пучков тепловыделяющих стержней (штриховые линии). При этом выполнялось условие $\mathrm{Gr} = \mathrm{Gr}^*$. Для рассмотренных вариантов теплообмена $c_x < 0$ во всем расчетном интервале, т. е. вторая форма течения в пограничном слое на таком пучке не развивается, что можно объяснить отсутствием предельного значения температуры стержней для неограниченного по длине пучка с тепловыделением.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Мартыненко О. Г., Соковишин Ю. А.** Свободно-конвективный теплообмен: Справ.— Минск: Наука и техника, 1982.
2. **Колмаков А. П., Юрьев Ю. С.** Применение метода пористого тела для расчета поля скоростей и температур в активной зоне.— Обнинск, 1971.— (Препр./ФЭИ; № 249).
3. **Боришанский В. М., Готовский М. А., Мизонов Н. В., Фирсова Э. В.** Метод гомогенного потока и его применение для расчета гидродинамики и теплопередачи в пучках стержней // Теплообмен и гидродинамика однофазного потока в пучках стержней.— Л.: Энергия, 1979.
4. **Субботин В. И., Ибрагимов М. Х., Ушаков П. А. и др.** Гидродинамика и теплообмен в атомных энергетических установках.— М.: Атомиздат, 1975.
5. **Субботин В. И., Кащеев В. М., Номофилов Ю. С., Юрьев Ю. С.** Решение задач реакторной теплофизики на ЭВМ.— М.: Атомиздат, 1979.
6. **Вдовец И. В., Гривнин А. И., Готовский М. А. и др.** Теплообмен при естественной конвекции в горизонтально расположенных пучках тепловыделяющих стержней // Теплофизика высоких температур.— 1986.— Т. 24, № 4.
7. **Кейхани, Куляцкий, Христенсен.** Экспериментальное исследование свободной конвекции в вертикальной сборке стержней (общая корреляция для числа Нуссельта) // Тр. Амер. о-ва инженеров-механиков. Теплопередача.— 1985.— Т. 107, № 3.
8. **Davis L. P., Perona J. J.** Development of free convection axial flow through a tube bundle // Intern. J. Heat Mass Transfer.— 1973.— V. 16, N 7.
9. **Okada T., Efthimiadis A., Iannello V., Todreas N.** Mixed convection pressure drop in vertical ROD bundles // Proc. 3rd Intern. Topical Meeting on React. Thermal Hydraulic, New Port, 1985.— V. 2, sess. 13—21.
10. **Шлихтинг Г.** Теория пограничного слоя.— М.: Наука, 1969.
11. **Китаев Б. И., Ярошенко Ю. Г., Суханов Е. Л. и др.** Теплотехника доменного процесса.— М.: Металлургия, 1978.
12. **Weber J. E.** The boundary layer regime for convection in a vertical porous layer // Intern. J. Heat Mass Transfer.— 1975.— V. 18, N 4.
13. **Lundgren T. S.** Slow flow through stationary random beds and suspension of spheres // J. Fluid Mech.— 1972.— V. 51, pt 2.
14. **Somerton C. W., Catton J.** On the termal instability of superposed porous and fluid layers // Trans. ASME: J. Heat Transfer.— 1982.— V. 104, N 1.
15. **Бекерман, Рамадьяни, Висканта.** Свободно-конвективное течение и теплообмен между жидким и пористым слоями внутри прямоугольной полости // Тр. Амер. о-ва инженеров-механиков. Теплопередача.— 1988.— № 1.
16. **Хаппель Д., Бреннер Г.** Гидродинамика при малых числах Рейнольдса.— М.: Мир, 1976.
17. **Drummond J. E., Tahir M. I.** Laminar viscous flow through regular arrays of parallel solid cylinders // Intern. J. Multiphase Flow.— 1984.— V. 10, N 5.
18. **Лойцянский Л. Г.** Ламинарный пограничный слой.— М.: Физматгиз, 1962.
19. **Мартыненко О. Г., Галич Н. Е., Соковишин Ю. А. и др.** Свободная конвекция от объемных и локализованных источников тепла.— Минск, 1988.— (Препр./АН БССР, Ин-т тепло- и массообмена; № 4).
20. **Пасконов В. М., Полежаев В. И., Чудов Л. А.** Численное моделирование процессов тепло- и массообмена.— М.: Наука, 1984.

г. Днепропетровск *Поступила 14/IV 1989 г.*

УДК 539.3

Э. И. Григолюк, Е. А. Лопаницын

ОБ ОДНОЙ МОДИФИКАЦИИ МЕТОДА ДИСКРЕТНОГО ПРОДОЛЖЕНИЯ ПО ПАРАМЕТРУ

Рассмотрим систему нелинейных уравнений

$$F_i(x_1, x_2, \ldots, x_n, p) = 0 \quad (i = \overline{1, n}), \tag{1}$$

где x_i $(i = \overline{1, n})$— аргументы и p — параметр решения. К подобным системам сводятся многие нелинейные задачи механики. Простейшая из них — задача об осесимметричном выпучивании изотропной круговой пластины, нагруженной равномерно распределенными по контуру ра-