

УДК 532.526

АБСОЛЮТНАЯ И КОНВЕКТИВНАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ СВЕРХЗВУКОВОГО ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ

Г. В. Петров

Институт теоретической и прикладной механики СО РАН, 630090 Новосибирск

С помощью метода перевала определены асимптотики развития во времени для трехмерных пространственно локализованных собственных возмущений. Установлены критерии абсолютной неустойчивости в случае ветвящегося дисперсионного соотношения. Представлены результаты расчетов областей ее существования для пограничного слоя на пластине при $Re \rightarrow \infty$, $M = 10$.

Абсолютная неустойчивость означает существование пространственно локализованных собственных линейных возмущений, захватывающих со временем все течение и неограниченно растущих в любой его точке. Альтернативное понятие конвективной неустойчивости определяет класс течений, в которых локализованные возмущения, перемещаясь вниз по потоку, могут нарастать по максимуму, но оставляют за собой стабилизирующееся течение. Поэтому рост возмущений, возбужденных в конечной области, ограничен временем их прохождения через эту область, тогда как при абсолютной неустойчивости — временем существования заданного режима течения. Конвективно-неустойчивые системы могут лишь усиливать возмущения, абсолютно неустойчивые — генерировать их [1].

Исследования абсолютной неустойчивости в свободном сдвиговом слое [2] показали, что для ее существования необходим достаточно сильный противоток, поэтому можно ожидать, что неустойчивость двумерного пограничного слоя носит конвективный характер. Однако в работе [3] обнаружена абсолютная неустойчивость сверхзвукового пограничного слоя на пластине, обусловленная существованием высших мод [4]. Если ранее рассматривались случаи однозначной зависимости частоты от волнового числа (дисперсионного соотношения) или ее изолированной ветви [1], то в случае сверхзвукового пограничного слоя именно наличие точек ветвления и их местоположение играют решающую роль.

В данной работе результаты исследований [3] распространены на трехмерные возмущения в течении, зависящем только от ординаты y . Интеграл

$$\hat{f}(x, y, z, t) = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \int_0^{\infty} g(k, \varphi) \tilde{f}(k, \varphi, y) \exp \{i[k(x \cos \varphi + z \sin \varphi) - \omega(k, \varphi)t]\} dk d\varphi, \quad (1)$$

подынтегральная функция которого сформирована из известных решений задачи устойчивости типа косых синусоидальных волн, распространяющихся под углами φ к направлению координатной оси Ox , также является ее решением (суперпозиция). Здесь i — мнимая единица; x, y, z — координаты (y — расстояние до стенки); t — время; $k = |\mathbf{k}|$ — волновое число; $\omega(k, \varphi)$ — функция, определяющая дисперсионное соотношение между комплексной угловой частотой $\omega = \omega_r + i\omega_i$ и вещественным волновым вектором \mathbf{k} ; $\tilde{f}(k, \varphi, y)$ — собственная вектор-функция, компонентами которой являются предэкспоненты возмущений скорости, давления и других параметров течения; функция $g(k, \varphi)$ произвольна. Если $g(k, \varphi)$ не содержит δ -функций и интеграл (1) сходится в классическом смысле, то $\hat{f}(x, y, z, t)$ представляет собой пространственно локализованное собственное возмущение.

Внутренний интеграл в (1) при заданном φ представляет собой двумерное возмущение, локализованное в направлении распространения. Применение к нему метода перевала [5] при $t \rightarrow \infty$ дает асимптотическую формулу

$$\hat{f}(x, y, z, t) \sim t^{-1/2} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} g_s(\varphi) f_s(\varphi, y) \exp \{i[k_s(\varphi)(x \cos \varphi + z \sin \varphi) - \omega_s(\varphi)t]\} d\varphi, \quad (2)$$

где $g_s(\varphi) = \sqrt{2\pi/i\lambda(\varphi)} g(k_s(\varphi), \varphi)$; $\lambda(\varphi) = \partial^2 \omega(k, \varphi) / \partial k^2$ при $k = k_s(\varphi)$; $f_s(\varphi, y) = \hat{f}(k_s(\varphi), \varphi, y)$; $\omega_s(\varphi) = \omega(k_s(\varphi), \varphi)$; $k_s(\varphi)$ — седловая точка, определяемая как решение уравнения $\partial \omega(k, \varphi) / \partial k = 0$, распространенного на комплексную плоскость $k = k_r + ik_i$.

Если существует седловая точка φ_σ функции $\omega_s(\varphi)$, определяемая как решение уравнения $d\omega_s/d\varphi = 0$, то ее вклад в асимптотику можно оценить повторным применением метода перевала к (2):

$$\hat{f}(x, y, z, t) \sim t^{-1} \sqrt{2\pi/i\omega_s''(\varphi_\sigma)} g_\sigma f_\sigma(y) \exp \{i[k_\sigma(x \cos \varphi_\sigma + z \sin \varphi_\sigma) - \omega_\sigma t]\}, \quad t \rightarrow \infty, \quad (3)$$

где $g_\sigma = g_s(\varphi_\sigma)$; $f_\sigma(y) = f_s(\varphi_\sigma, y)$; $k_\sigma = k_s(\varphi_\sigma)$; $\omega_\sigma = \omega_s(\varphi_\sigma)$; штрихами обозначены производные.

Вклад границ интегрирования φ_b , т. е. φ_1, φ_2 и др. (см. (1), (2)), в асимптотику определяется иной формулой:

$$\hat{f}(x, y, z, t) \sim t^{-3/2} [g_b/i\omega_s'(\varphi_b)] f_b(y) \exp \{i[k_b(x \cos \varphi_b + z \sin \varphi_b) - \omega_b t]\}, \quad t \rightarrow \infty, \quad (4)$$

где $g_b = g_s(\varphi_b)$; $f_b(y) = f_s(\varphi_b, y)$; $k_b = k_s(\varphi_b)$; $\omega_b = \omega_s(\varphi_b)$.

Численные исследования проводятся для пограничного слоя на пластине при $Re \rightarrow \infty$. Уравнения невязкой теории и граничные условия для косых элементарных волн имеют вид [4]

$$\left. \begin{aligned} \tilde{v}' &= \frac{u'}{u-c} \tilde{v} + \left(\frac{1}{s} - u + c \right) ik\tilde{p}, \\ \tilde{p}' &= -iks\tilde{v}, \end{aligned} \right\} \quad s = \gamma M^2 \rho(u-c) \cos^2 \varphi, \quad c = \omega/k,$$

$$\tilde{v} \rightarrow 0, \quad \tilde{p} \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad y \rightarrow \infty, \quad \tilde{v} = 0 \quad \text{при} \quad y = 0,$$

где \tilde{p}, \tilde{v} соответствуют возмущениям давления и нормальной к стенке составляющей скорости; штрихом обозначена производная по y ; ρ, u — профили плотности и скорости; γ — показатель адиабаты газа (отношение теплоемкостей); M — число Маха. При расчете профилей пограничного слоя принято, что газ совершенный, вязкость пропорциональна температуре, число Прандтля $Pr = 1$.

В работе [3] исследовалась двумерная неустойчивость для $\varphi = 0$. Показано, что в окрестности каждой точки ветвления k_b функции $\omega(k)$ имеется седловая точка k_s , причем сама точка ветвления является седловой точкой обратной функции $k(\omega)$. Подобной симметрией обладают и условия существования абсолютной неустойчивости: к известному требованию роста по времени $\omega_{si} > 0$ (буквой i в индексе обозначена мнимая часть) элементарной волны, соответствующей седловой точке, добавляется требование пространственного роста $k_{bi} < 0$ в направлении k волны, соответствующей точке ветвления, т. е.

$$\omega_i > 0 \quad \text{при} \quad \frac{\partial \omega}{\partial k} = 0, \quad k_i < 0 \quad \text{при} \quad \frac{\partial k}{\partial \omega} = 0. \quad (5)$$

Установлено два типа абсолютной неустойчивости: первый обусловлен ветвлением дозвуковых мод между собой, второй — ветвлением дозвуковых мод со сверхзвуковыми.

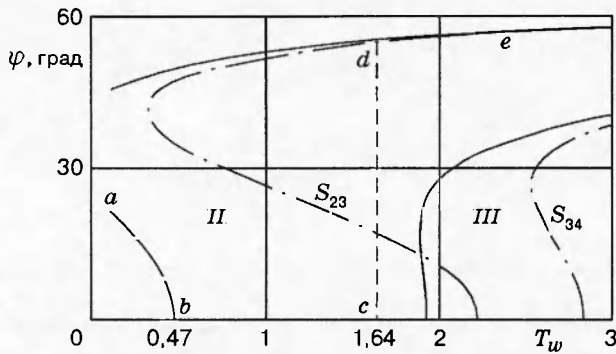


Рис. 1

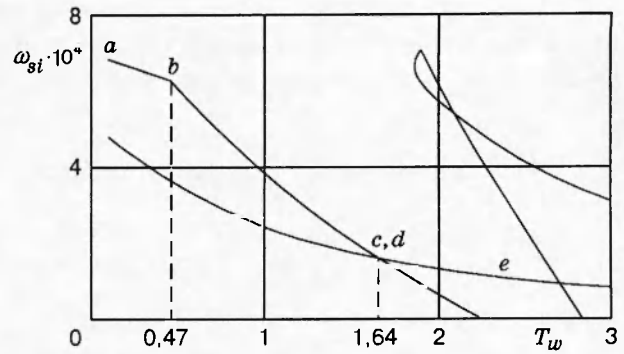


Рис. 2

Обобщая полученные результаты на косые волны в окрестности угла $\varphi = 0$, введем следующие обозначения границ двумерной абсолютной неустойчивости:

$$B_{mn}: \quad \frac{\partial k}{\partial \omega} = 0, \quad k_i = 0, \quad S_{mn}: \quad \frac{\partial \omega}{\partial k} = 0, \quad \omega_i = 0,$$

где m, n — номера ветвящихся мод. В общем случае это поверхности в пространстве параметров течения и угла распространения φ элементарной волны.

На рис. 1 представлены рассчитанные для $M = 10, \gamma = 1,4$ области двумерной абсолютной неустойчивости (5), обусловленной ветвлением дозвуковых мод: область II — второй и третьей моды, III — третьей и четвертой (T_w — температура стенки относительно температуры потока). Здесь и на других рисунках границы B_{mn} изображены сплошными линиями, а S_{mn} — штрихпунктирными. Видно, что включение в рассмотрение косых волн расширяет диапазон температур стенки, при которых существует двумерная абсолютная неустойчивость [3].

Для плоских течений характеристики возмущений являются четными функциями угла φ , поэтому точка $\varphi = 0$ является седловой точкой функции $\omega_s(\varphi)$. По конфигурации штрихпунктирных кривых S_{23}, S_{34} можно судить о том, что она является точкой максимума инкремента $\omega_{si}(\varphi)$ (прямые расчеты это подтверждают). Поэтому справедлива формула (3), из которой следует, что в областях существования двумерной абсолютной неустойчивости, рассчитанных в [3], имеет место и трехмерная абсолютная неустойчивость, причем трехмерные малые начальные возмущения возбуждают волну с теми же частотой, длиной, распределением амплитуды по y и даже асимптотическим логарифмическим инкрементом, так как степенной по времени множитель при больших t несуществен.

Как и в плоской задаче, за пределами B_{mn} соответствующих областей абсолютной неустойчивости не существует асимптотик для косых локализованных возмущений, определяемых подынтегральным выражением в (2), так как путь интегрирования (1) по k из долины в долину через перевал выводит на другую ветвь и не эквивалентен вещественной полуоси. Следовательно, B_{mn} определяют границы φ_b интегрирования в (2), а их вклад в асимптотику трехмерного локализованного возмущения представлен формулой (4). В силу симметрии это две косые волны, распространяющиеся под углами $\varphi = \pm \varphi_b$ (на рис. 1, 3, 4 они представлены сплошными линиями).

Инкременты $\omega_{si}(\varphi_b), \omega_{si}(0)$, определяющие асимптотический темп роста возмущений по времени, приведены на рис. 2. Их обезразмеривание проведено с помощью масштаба времени $\sqrt{\nu_e x / u_e^3}$, где ν_e, u_e — кинематический коэффициент вязкости и скорость набегающего потока; x — расстояние от кромки пластины. Видно, что до $T_w = 0,47$ наибольшие

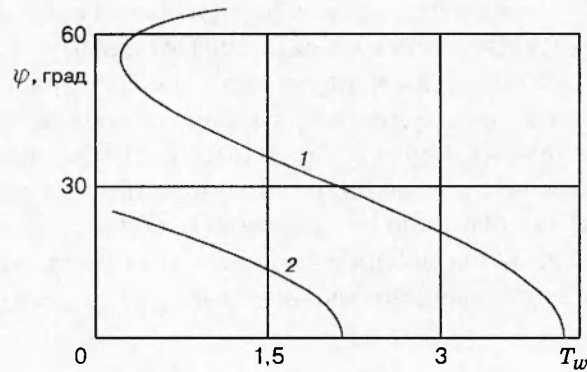


Рис. 3

инкременты соответствуют волнам с небольшим углом распространения $\varphi_b \cong 20^\circ \div 0$ (кривые *ab* на рис. 1, 2). В интервале $T_w = 0,47 \div 1,64$ (отрезок *bc* на рис. 1) асимптотику представляет плоская волна, распространяющаяся вдоль потока, а при $T_w > 1,64$ (кривые *de*) — косые волны с большим углом распространения $\varphi_b > 55^\circ$.

При дальнейшем повышении температуры стенки, начиная с $T_w = 1,88$, появляется и доминирует абсолютная неустойчивость, соответствующая ветвлению третьей и четвертой мод, и последовательность смены асимптотик повторяется.

На рис. 3 представлены границы B_{12} областей абсолютной неустойчивости, обусловленной ветвлением первой и второй дозвуковых мод, для $M = 8,3$ (кривая 1) и $M = 10$ (кривая 2). Видно, что с повышением числа Маха граница перемещается в сторону более низких температур стенки. Расчеты для более высоких соседних мод дают такой же результат.

Абсолютная неустойчивость второго типа, связанная с ветвлением дозвуковых и сверхзвуковых мод, имеет место при пониженных значениях показателя адиабаты γ . Области ее существования для $M = 10$, $T_w = 1$ приведены на рис. 4. Второй моде соответствует область *II*, третьей — *III*. Также с номерами мод связаны обозначения на рис. 5, где представлены зависимости асимптотического инкремента от γ . Видно, что абсолютная неустойчивость относительно возмущений третьей моды выражена очень слабо. Что касается второй моды, то при $\gamma < 1,210$ могут самовозбуждаться только косые волны с

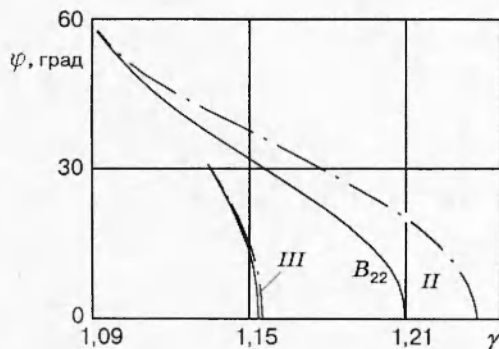


Рис. 4

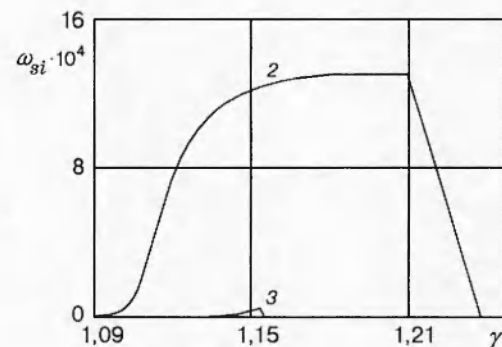


Рис. 5

инкрементом $\omega_{si}(\varphi_b)$ (φ_b определяется границей B_{22} области II на рис. 4), а в диапазоне $\gamma = 1,210 \div 1,238$ — волна вдоль потока с инкрементом $\omega_{si}(0)$.

Таким образом, обнаруженная в [3] двумерная абсолютная неустойчивость соответствует также и трехмерной в тех же диапазонах параметров пограничного слоя и с теми же асимптотическими волновыми характеристиками возмущений. Кроме того, существует асимптотика трехмерных локализованных возмущений вида растущих со временем косых синусоидальных волн, значительно расширяющая область параметров существования абсолютной неустойчивости. Углы распространения этих волн определяются точками ветвления функции $\omega(\mathbf{k})$ на вещественной плоскости \mathbf{k} .

ЛИТЕРАТУРА

1. Федорченко А. М., Коцаренко Н. Я. Абсолютная и конвективная неустойчивость в плазме и твердых телах. М.: Наука, 1981.
2. Шикина И. С. Об асимптотике локализованных возмущений в свободных сдвиговых слоях // Механика жидкости и газа. 1987. № 2. С. 8–14.
3. Петров Г. В. Двумерная абсолютная неустойчивость сверхзвукового пограничного слоя // Механика жидкости и газа. 1988. № 1. С. 176–179.
4. Mack L. M. Boundary layer stability theory // JPL Document N 900-277 (Rev. A). Pasadena: JPL, 1969.
5. Эрдейи А. Асимптотические разложения. М.: Физматгиз, 1962.

Поступила в редакцию 19/VI 1998 г.
