

22. Лаврентьев М. А. Об одной задаче на склеивание.— Сиб. матем. журнал, 1964, т. 5, № 3.
23. Манджавидзе Г. Ф., Хведелидзе Б. В. О задаче Римана—Привалова с непрерывными коэффициентами.— ДАН СССР, 1958, т. 123, № 5.
24. Чернецкий В. А. О конформной эквивалентности краевой задачи Карлемана краевой задаче Римана на разомкнутом контуре.— ДАН СССР, 1970, т. 190, № 1.
25. Волковский Л. И. К проблеме типа односвязных римановых поверхностей.— Мат. сб., 1946, вып. 18.
26. Антонцев С. Н., Монахов В. Н. О разрешимости одного класса задач сопряжения со сдвигом.— ДАН СССР, 1972, т. 205, № 2.
27. Пономарев С. П. К вопросу об  $A_\infty$ -устраиваемых квазиконформных кривых.— ДАН СССР, 1976, т. 227, № 3.
28. Lewy H. On the non vanishing of the Jacobian of a homeomorphism by harmonic gradients.— Ann. of Math., 1968, t. 88, N 3.
29. Lavrentieff M. A. On the theory of quasi-conformal mappings of three-dimensional domain.— J. d'Analyse math., 1967, t. 19, p. 217—225.
30. Лаврентьев М. А. Краевые задачи и квазиконформные отображения.— В кн.: Современные проблемы теории аналитических функций. М., Наука, 1966.
31. Антонцев С. П. Об одной задаче М. А. Лаврентьева.— ДАН СССР, 1976, т. 228, № 4.
32. Псевдодифференциальные операторы. М., Мир, 1968.
33. Янушаускас А. Об элементарных гармонических отображениях трехмерных областей.— В кн.: Метрические вопросы теории функций и отображений. V. Киев, Наукова думка, 1974.
34. Плотников П. И. О гармонических отображениях трехмерных слоев.— В кн.: Динамика сплошной среды. Вып. 23. Новосибирск, изд. Ин-та гидродинамики СО АН СССР, 1975.
35. Плотников П. И. Линейная модель задачи о пространственных течениях идеальной жидкости со свободной границей.— В кн.: Динамика сплошной среды. Вып. 26. Новосибирск, изд. Ин-та гидродинамики СО АН СССР, 1976.
36. Гарипов Р. М. Неустойчившиеся волны над подводным хребтом.— ДАН СССР, 1965, т. 161, № 3.
37. Гарипов Р. М. Об асимптотике волн в жидкости конечной глубины, вызванных произвольным начальным возвышением свободной поверхности.— ДАН СССР, 1962, т. 147, № 6.
38. Биченков Е. П., Гарипов Р. М. Распространение волн на поверхности тяжелой жидкости в бассейне с неровным дном.— ПМТФ, 1969, № 2.
39. Налимов В. П., Плотников П. И. Эффект волновода и нерегулярные задачи на собственные значения.— В кн.: Динамика сплошной среды. Вып. 23. Новосибирск, изд. Ин-та гидродинамики СО АН СССР, 1975.
40. Исакова Е. И. О поведении при  $t \rightarrow \infty$  решения линеаризованной задачи Коши—Пуассона.— В кн.: Динамика сплошной среды. Вып. 23. Новосибирск, изд. Ин-та гидродинамики СО АН СССР, 1975.
41. Лаврентьев М. А. О некоторых краевых задачах для систем эллиптического типа.— Сиб. матем. журнал, 1962, т. 3, № 5.
42. Plotnikov P. I. On spatial free boundary flows.— Archives of Mechanics, 1978, t. 30, N 4—5.
43. Плотников П. И. Разрешимость задачи о пространственных гравитационных волнах на поверхности идеальной жидкости.— ДАН СССР, 1980, т. 251, № 3.

УДК 532.527+532.517.4

## ПОДАВЛЕНИЕ ТУРБУЛЕНТНОСТИ В ЯДРАХ КОНЦЕНТРИРОВАННЫХ ВИХРЕЙ

В. А. Владимирова, Б. А. Луговцова, В. Ф. Тарасова  
(Новосибирск)

1. Задача о движении вихревых колец уже более века привлекает внимание исследователей [1]. По инициативе М. А. Лаврентьева в Институте гидродинамики СО АН СССР в течение нескольких лет ведутся экспериментальные и теоретические исследования этого явления и других вихревых течений жидкости и газа

[2]. На основе анализа экспериментальных фактов была предложена математическая модель для описания движения турбулентных вихревых колец [3, 4]. Эта модель основана на предположении, что турбулентный характер движения и перенос им примеси можно описать с помощью скалярных коэффициентов турбулентной вязкости  $\nu$  и турбулентной диффузии  $\kappa$ , изменяющихся со временем, но не зависящих от пространственных координат. Дополнительное предположение об автомодельности течения, хорошо согласующееся с результатами эксперимента, позволило в пределе исчезающей вязкости рассчитать структуру вихревого кольца [5], причем теория в этом случае не содержит каких-либо эмпирических констант. Однако сравнение расчета с имеющимися результатами эксперимента обнаруживает существенное расхождение в области ядра вихревого кольца.

В настоящее время стало ясно, что главной причиной такого расхождения является предположение об «однородности» турбулентности по объему вихря. В работе [6] изложены результаты качественных экспериментов и некоторые теоретические соображения, которые показывают, что в ядре вихревого кольца имеет место практически полное отсутствие турбулентного переноса примеси (явление «ламинарного ядра») при интенсивном турбулентном переносе примеси в атмосфере вихревого кольца. Причиной такого подавления турбулентности является наличие в быстро вращающемся потоке своеобразной «упругости», связанной с гироскопическим поведением жидких частиц.

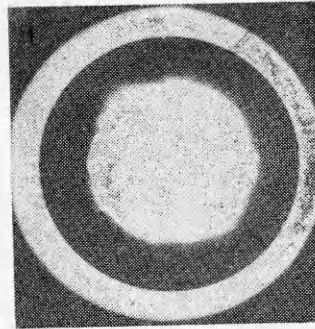
Нестационарность течения в вихревом кольце сильно затрудняет изучение обнаруженного в [6] эффекта. В данной работе приводится описание опытов, позволяющих наблюдать сходный эффект в стационарных условиях, дано качественное объяснение явления, предложены простейшие модели турбулентных напряжений и переноса примеси в ядрах линейных и кольцевых вихрей.

2. Приведем результаты опытов, позволяющих наблюдать эффект подавления турбулентности в стационарных условиях. Рассмотрим поток типа течения Куэтта между цилиндрами, внутренний из которых выполнен в виде решетки. Опыт состоит в наблюдении проникновения турбулентности из зазора в жидкость, вращающуюся во внутреннем цилиндре. В качестве внешнего (сплошного) цилиндра использовалась боковая стенка наполненного водой сосуда диаметром 17 см. Решетка, составляющая внутренний цилиндр, набиралась из вертикальных стержней, количество и сечение которых менялось в широких пределах. Внешний и внутренний цилиндры могли вращаться независимо со скоростями  $\Omega_2$  и  $\Omega_1$ . Опыты показали, что в центральной части течения имеется твердоотельно вращающаяся (со скоростью  $\Omega$ ) зона. Типичные фотографии течения сверху приведены на фиг. 1. Визуализация потока достигалась при помощи взвешенной в жидкости алюминиевой пудры и целевого источника света, позволяющего наблюдать горизонтальное сечение потока. Такой способ визуализации связан с направленным рассеянием света ориентирующимися под действием градиентов скорости «чешуйками» пудры [7, 8]. На фотографиях ясно видны «ламинарное ядро» вокруг оси вращения потока и «проникающая» в него турбулентность из зазора. Значения величин  $\Omega_1$ ,  $\Omega_2$ ,  $\Omega$  (об/с) таковы: 0,22; -1,05; 0 — а; 0,4; -0,88; 0,26 — б; 0,89; -0,38; 0,83 — в; 1,34; 0; 1,33 — г. Для того чтобы поддерживать приблизительно одинаковую интенсивность турбулентности в зазоре, разность  $\Omega_1 - \Omega_2$  выбира-



Ф и г. 1

лась во всех случаях примерно одинаковой. Величина  $\Omega$  монотонно возрастает от фиг. 1, а к фиг. 1, г. На фиг. 1, а  $\Omega = 0$  и турбулизуется все течение (отсутствие «подавления»). С увеличением  $\Omega$  радиус «ламинарного ядра» растет, что соответствует все более сильному «подавлению». Отсюда следует, что степень «подавления» пропорциональна величине среднего вихря. Полученный экспериментальный результат можно усилить таким способом. Рассмотрим течение, соответствующее фиг. 1, а, в котором турбулентность не подавляется. Если теперь увеличить  $\Omega$ , без изменения  $\Omega_2$ , то интенсивность турбулентности в зазоре возрастет. Однако одновременно вырабатывается  $\Omega \neq 0$  и появляется отчетливо видимое «ламинарное ядро». Таким образом, появляющееся вращение «подавляет» даже усиленную турбулентность в зазоре.



Ф и г. 2

Рассматриваемое течение визуализировалось также с помощью пассивной примеси — краски. После введения последней в зазор между сплошной стенкой и решеткой наблюдается быстрое закрашивание всего потока, кроме «ламинарного ядра» (фиг. 2). В режиме, соответствующем фиг. 1, а, быстро закрашивается вся жидкость. Прямые измерения скорости турбулентного переноса примеси дают оценки коэффициента диффузии от 1 до 10 см<sup>2</sup>/с. В «ламинарных ядрах» турбулентного переноса примеси не наблюдается.

Изложенные качественные результаты не зависят от того, имеет или нет внутренний цилиндр вращающееся с ним дно. Возникающие вторичные потоки весьма слабы. Обратим внимание еще на три обстоятельства. Во-первых, поверхности раздела турбулентной и нетурбулентной жидкости на фиг. 1 являются стационарными. Вовлечения жидкости в турбулентное движение через эти поверхности не происходит, или же с равной скоростью идет процесс «ламинаризации» турбулентной жидкости. Во-вторых, этот опыт свидетельствует о том, что для подавления турбулентности вращением достаточно уже умеренно малых чисел Россби [8, 6]. В-третьих, приведенные опыты можно рассматривать как грубую лабораторную модель турбулентности в центральных областях атмосферных вихрей (в «ядре» смерча, «глазе» урагана и т. п.).

3. Описанные опыты по наблюдению явления подавления турбулентности, так же как их аналоги для вихревых колец, находят объяснение в свойствах «упругости» вращающихся потоков и волновом характере пульсационного движения [6, 9]. Такие качественные представления дают некоторую основу для моделирования турбулентных напряжений и переноса примеси в течениях с концентрированными вихрями.

Рассмотрим турбулентное вращательно-симметричное течение с круговыми линиями тока осредненного движения. Такое течение в первом приближении является аппроксимацией потоков в окрестности «ламинарного ядра». Для определенности будем говорить о течении вблизи ядра вихревого кольца, оставляя пока в стороне вопрос об автомодельности течения.

Примем гипотезы о существовании коэффициентов турбулентной вязкости  $\nu = \nu(r, t)$  и турбулентной диффузии  $\kappa = \kappa(r, t)$

$$\langle uv \rangle = \nu(\partial U / \partial r - U/r), \quad \langle cv \rangle = \kappa \partial C / \partial r,$$

где угловые скобки обозначают среднее по ансамблю;  $U$ ,  $u$ ,  $C$  и  $c$  — средние

и пульсационные поля угловой составляющей скорости и концентрации;  $v$  — пульсационная составляющая радиальной скорости. Уравнения на средние поля  $U(r, t)$ ,  $\Omega \equiv \partial U / \partial r + U/r$  и  $C(r, t)$  имеют вид

$$\begin{aligned}\partial U / \partial t &= v \partial \Omega / \partial r + \partial v / \partial r (\partial U / \partial r - U/r), \\ \partial C / \partial t &= \partial / \partial r \cdot (\kappa \partial C / \partial r).\end{aligned}$$

Для формулировки моделей в этой схеме достаточно указать способ определения функций  $v(r, t)$  и  $\kappa(r, t)$ . Обозначим через  $r_0$  радиальный размер «ламинарного ядра». Согласно результатам опытов [6], функция  $\kappa$  имеет при  $r_0$  более или менее резкий скачок. В «ламинарном ядре» диффузия примеси является молекулярной  $\kappa = \kappa_m$ , вне ядра можно говорить только, что  $\kappa \gg \kappa_m$ . Следуя идеям модели [4, 3], будем считать, что вне ядра величина  $\kappa$  достаточно быстро выходит на постоянное значение  $\kappa_0$ . Простейшей зависимостью такого сорта является «ступенька»

$$\kappa(r, t) = \begin{cases} \kappa_m & \text{при } r < r_0, \\ \kappa_0 & \text{при } r > r_0. \end{cases}$$

В соответствии с общими представлениями о механизмах турбулентного переноса можно ожидать, что и функция  $v(r, t)$  ведет себя подобным же образом:

$$v(r, t) = \begin{cases} v_1 & \text{при } r < r_0, \\ v_0 & \text{при } r > r_0. \end{cases}$$

Величину  $v_1$  нельзя априори положить равной молекулярной вязкости в силу возможности переноса импульса волновым движением [10, 11]. Из общих соображений  $v_1 < v_0$ . Выписанные выражения соответствуют простому физическому предположению, что при  $r > r_0$  вращение на характеристики турбулентности не влияет, при  $r < r_0$  это влияние настолько сильно, что пульсационное движение существует только в виде «слабой» турбулентности. Не останавливаясь на способе определения  $r_0$  и других подробностях выписанных моделей, отметим, что численные расчеты дают удовлетворительные результаты для переноса примеси и неудовлетворительные — для напряжений Рейнольдса. Последнее связано с сильным проявлением эффекта превышения циркуляции [12], т. е. больших отрицательных значений завихренности. Такое течение неустойчиво.

Излагаемая ниже модель представляет собой способ сглаживания ступенчатых зависимостей, основанный на представлениях об «упругости» потока [6, 9]. Такие представления уже давно и широко используются для моделирования турбулентных напряжений как в стратифицированных, так и в криволинейных потоках [10, 13–19].

В работах по этим вопросам обычно говорят о стабилизирующем или дестабилизирующем воздействии стратификации или средней кривизны, причем характеристиками таких свойств являются величины, взятые из линейных невязки задач. Так, в работах [10, 18] считается, что коэффициент турбулентной вязкости в плоскопараллельных стратифицированных течениях является однозначной функцией числа Ричардсона  $Ri$ . Вид этой функции определяется из условий согласования с экспериментами и простейших физических соображений. Прямой аналогом числа  $Ri$  в круговых потоках есть величина [9]

$$J_k^* \equiv \frac{2k^2 U \Omega}{r} \left[ m \left( \frac{U}{r} \right)' \right]^2.$$

Здесь  $k$  и  $m$  — волновые числа возмущения в осевом и угловом направле-

ниях. Непосредственное перенесение результатов [10, 18] на случай круговых потоков дает

$$(3.1) \quad v = v_0 (1 + k_1 J)^{-\mu_1}, \quad \kappa = \kappa_0 (1 + k_2 J)^{-\mu_2}$$

с положительными постоянными  $v_0, \kappa_0, k_1, k_2, \mu_1, \mu_2$ . Из физических соображений следует, что перенос примеси «подавляется» сильнее, чем перенос импульса, поэтому  $\mu_2 > \mu_1$ . Эта особенность связана с возможностью «волнового» механизма переноса импульса, в то время как примесь волновым движением переноситься не может [10, 11]. Другой возможностью является аналогичная аппроксимация для величины пути смещения

$$(3.2) \quad l = l_0 (1 + k_3 J)^{-\mu_3}$$

с последующим использованием ее для моделирования  $v(r, t)$ :

$$(3.3) \quad v = l^2 |\partial U / \partial r - U/r|.$$

Вне ядра завихренности  $J(r)$  быстро убывает, поэтому величины  $v_0, \kappa_0, l_0$  дают значения коэффициентов переноса в атмосфере кольца. Входящее в  $J$  отношение  $k/m$  имеет смысл отношения характерных масштабов турбулентности по различным направлениям. Выбор конкретного значения величины этого отношения оказывается несущественным, поскольку постоянные  $k_1, k_2, k_3$  определяются из согласия с опытом.

Список возможных аппроксимаций и детализацию их аргументации можно было бы продолжить. Однако такая деятельность целесообразна только при наличии достаточного экспериментального материала. В настоящее время имеется только одна работа [20] по измерению зависимостей усредненных параметров вихревого кольца от времени, измерения характеристик турбулентности не проводились вовсе. Поэтому ограничимся здесь замечанием, что численные расчеты показывают возможность согласования с данными [20] в рамках любой из представленных моделей (3.1) — (3.3).

4. В заключение, основываясь на экспериментальных фактах и соображениях, изложенных выше, приведем формулировку задачи об автомодельном турбулентном вихревом кольце в пределе исчезающей вязкости [5] с учетом зависимости коэффициента турбулентной вязкости от координат. Исходим из предположения, что напряжения Рейнольдса представимы в форме

$$\langle u_i u_k \rangle = \frac{1}{2} \langle u_i^2 \rangle \delta_{ik} - v_*(t, r) \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right).$$

В цилиндрической системе координат с учетом осесимметричности для азимутальной составляющей вектора завихренности  $\Omega_\varphi$  осредненного течения получим, пренебрегая молекулярной вязкостью, следующее уравнение:

$$(4.1) \quad \frac{\partial \Omega_\varphi}{\partial t} + \frac{\partial \Psi}{\partial r} \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\Omega_\varphi}{r} \right) - \frac{\partial \Psi}{\partial z} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\Omega_\varphi}{r} \right) = \frac{\partial}{\partial z} \left( v \frac{\partial \Omega_\varphi}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left( v \frac{\partial \Omega_\varphi}{\partial r} \right) + \\ + \frac{\partial}{\partial z} \left( d_{rz} \frac{\partial v}{\partial z} - d_{zz} \frac{\partial v}{\partial r} + v \frac{d_{rr}}{r} \right) - \frac{\partial}{\partial r} \left( d_{rz} \frac{\partial v}{\partial r} - d_{rr} \frac{\partial v}{\partial z} + v \frac{d_{zz}}{r} \right),$$

где  $\Psi$  — функция тока;  $v_z = \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial r}$  и  $v_r = -\frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial z}$  — осевая и радиальная компоненты скорости;  $d_{zz}, d_{rz}, d_{rr}$  — соответствующие компоненты тензора скоростей деформации (умноженные на два)

$$d_{zz} = 2 \frac{\partial v_z}{\partial z}; \quad d_{rz} = \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{\partial v_r}{\partial z}; \quad d_{rr} = 2 \frac{\partial v_r}{\partial r}.$$

Предполагая движение автомодельным с определяющим параметром  $P_0([P_0] = L^4/T)$  [3, 4], получаем

$$\Omega_\Phi = \frac{1}{t} \bar{\omega}(x, y), \quad \Psi = \frac{P_0^{3/4}}{t^{1/4}} \bar{\psi}(x, y), \quad x = \frac{z}{P_0^{1/4} t^{1/4}}, \quad y = \frac{r}{P_0^{1/4} t^{1/4}}.$$

Зависимость коэффициента турбулентной вязкости от времени определяется из анализа размерностей и имеет следующий вид:

$$\nu_*(t, r) = \lambda_0 \frac{P_0^{1/2}}{t^{1/2}} \lambda(x, y),$$

где  $\lambda_0$  — постоянная, а  $\lambda(x, y) \leq 1$ . Величина  $\lambda_0$  является малой. В связи с этим естественно рассмотреть предельный случай  $\lambda_0 \rightarrow 0$ . Сделаем замену переменных, полагая

$$\xi = \frac{1}{\lambda_0^{1/2}} \left( x - \frac{1}{\lambda_0^{3/2}} \xi_0 \right), \quad \eta = \frac{1}{\lambda_0^{1/2}} y, \quad \mu = \frac{1}{\lambda_0^2},$$

$$\bar{\omega} = \frac{1}{\lambda_0^2} \omega(\xi, \eta), \quad \bar{\psi} = \frac{1}{\lambda_0^{1/2}} \left( \psi + \frac{1}{8} \xi_0 \eta^2 \right).$$

Эта замена, кроме растяжения, соответствует переходу в систему координат, связанную с вихревым кольцом. Величина  $\xi_0$  определяется требованием, чтобы максимум  $\omega$  лежал на линии  $\xi = 0$ .

В этих переменных уравнение (4.1) принимает следующий вид:

$$(4.2) \quad \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \lambda \frac{\partial \omega}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \lambda \frac{\partial \omega}{\partial \eta} \right) + \frac{\partial}{\partial \xi} \left( d_{\xi\eta} \frac{\partial \lambda}{\partial \xi} - d_{\xi\xi} \frac{\partial \lambda}{\partial \eta} + \lambda \frac{d_{\eta\eta}}{\eta} \right) -$$

$$- \frac{\partial}{\partial \eta} \left( d_{\xi\eta} \frac{\partial \lambda}{\partial \eta} - d_{\eta\eta} \frac{\partial \lambda}{\partial \xi} + \lambda \frac{d_{\xi\eta}}{\eta} \right) + \frac{1}{4} \xi \omega_\xi + \frac{1}{4} \eta \omega_\eta + \omega =$$

$$= \mu \left[ \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{\omega}{\eta} \right) - \frac{\partial \psi}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{\omega}{\eta} \right) \right].$$

Граничные условия, при которых нужно искать решения этого уравнения, совпадают с условиями в работе [5].

В этой системе координат вблизи максимума  $\omega$  при больших значениях  $\mu$  линии постоянного значения величины  $\Omega = \omega/\eta$  почти совпадают с линиями  $\psi = \text{const}$  и близки к окружностям. В связи с этим естественно предположить, что зависимость  $\lambda(\xi, \eta)$  от координат будет хорошо описываться одной из рассмотренных выше аппроксимаций коэффициента турбулентной вязкости для течений с круговыми линиями тока.

В качестве аналога числа Ричардсона для течения в окрестности ядра вихревого кольца можно использовать следующую величину:

$$I = \frac{2U\Omega_\Phi}{R |d_{\tau n}|^2},$$

где  $U = \sqrt{v_r^2 + v_z^2}$ ;  $R$  — радиус кривизны линии тока, проходящей через данную точку (в системе координат, движущейся вместе с вихрем);  $d_{\tau n}$  — удвоенная компонента тензора скоростей деформации ( $\tau$  — касательный вектор,  $n$  — нормаль к линии тока). Можно показать, что

$$d_{\tau n} = \Omega_\Phi - 2U/R.$$

Учитывая качественный характер соображений, используемых для выбора вида зависимости коэффициента турбулентной вязкости от координат, естественно выбрать наиболее простую зависимость. В соответствии



с этим предположим, что  $v_*$  постоянна на линиях  $\Omega = \omega/\eta = \text{const}$  и

$$(4.3) \quad \lambda(\xi, \eta) = \lambda(\Omega) = [1 + \beta I(\Omega)]^{-k},$$

где  $I(\Omega)$  определяется равенством

$$I(\Omega) = \frac{\Omega \bar{\Omega}}{(\Omega - \bar{\Omega})^2}, \quad \bar{\Omega} = \frac{\Gamma(\Omega)}{S(\Omega)},$$

$$\Gamma(\Omega) = \int \int \eta \Omega d\xi d\eta, \quad S(\Omega) = \int \int \eta d\xi d\eta.$$

Здесь интегрирование проводится по области, определяемой замкнутой линией  $\Omega = \text{const}$ .

Интегрируя (4.2) по области с границей, определяемой некоторой замкнутой линией тока, получаем при любом  $\mu$

$$\oint \lambda(\Omega) \eta \nabla \Omega \cdot \mathbf{n} dl + \oint \frac{\lambda}{\eta} (d_{\eta\eta} n_\xi - d_{\xi\eta} n_\eta) dl +$$

$$+ \oint \left[ \left( d_{\xi\eta} \frac{\partial \lambda}{\partial \xi} - d_{\xi\xi} \frac{\partial \lambda}{\partial \eta} \right) n_\xi - \left( d_{\xi\eta} \frac{\partial \lambda}{\partial \eta} - d_{\eta\eta} \frac{\partial \lambda}{\partial \xi} \right) n_\eta \right] dl +$$

$$+ \frac{1}{4} \oint \xi \eta \Omega n_\xi dl + \frac{1}{4} \oint \eta^2 \Omega n_\eta dl + \frac{1}{2} \int \int \eta \Omega d\xi d\eta = 0,$$

где  $dl$  — элемент длины линии тока;  $\mathbf{n}$  — единичная нормаль к линии тока. Сравнивая теперь предельный переход  $\mu \rightarrow \infty$  и учитывая, что при этом  $\Omega \rightarrow \Omega(\psi)$ , получим

$$(4.4) \quad \lambda(\psi) P(\psi) \frac{d\Omega}{d\psi} + \frac{d\lambda}{d\psi} \left( P(\psi) \Omega - 2 \oint \frac{U^2}{R} dl \right) = \frac{1}{2} \Gamma(\psi) + \frac{3}{4} S(\psi) \Omega(\psi),$$

где  $P(\psi) = \int \int \eta^2 \Omega d\xi d\eta$ ;  $S(\psi) = \int \int \eta d\xi d\eta$ ,  $\Gamma(\psi) = \int \int \eta \Omega d\xi d\eta$ .

Здесь интегрирование проводится по области, ограниченной замкнутой линией тока. Таким образом, в пределе  $\mu \rightarrow \infty$  так же, как и в случае постоянной вязкости, для определения структуры вихревого кольца получаем задачу на склейку потенциального вне атмосферы вихря и вихревого внутри атмосферы течения невязкой жидкости [5, 2]. На границе атмосферы должны выполняться условия непрерывности  $\psi$  и  $\Delta\psi$ , причем  $\Omega(0) = 0$ . Вошедшая в уравнение (4.4) переменная турбулентная вязкость  $\lambda(\psi)$  определяется соотношением (4.3).

Поступила 28 III 1980

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Ламб Г. Гидродинамика. М., ОГИЗ, 1947.
2. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Проблемы гидродинамики и их математические модели. М., Наука, 1973.
3. Луговцов А. А., Луговцов Б. А., Тарасов В. Ф. О движении турбулентного вихревого кольца. — В кн.: Динамика сплошной среды. Вып. 3. Новосибирск, изд. Ин-та гидродинамики СО АН СССР, 1969.
4. Луговцов Б. А. О движении турбулентного вихревого кольца и переносе им пассивной примеси. — В сб.: Некоторые проблемы математики и механики. Л., Наука, 1970.
5. Луговцов Б. А. Турбулентные вихревые кольца. — В кн.: Динамика сплошной среды. Вып. 38. Новосибирск, изд. Ин-та гидродинамики СО АН СССР, 1979.
6. Владимиров В. А., Тарасов В. Ф. Структура турбулентности вблизи ядра кольцевого вихря. — ДАН СССР, 1979, т. 245, № 6.
7. Coles D. Transition in circular Couette flow. — J. Fluid Mech., 1965, vol. 21, p. 2.
8. Гринспен Х. Теория вращающихся жидкостей. Л., Гидрометеиздат, 1975.
9. Владимиров В. А. Устойчивость течения типа смерча. — В кн.: Динамика сплошной среды. Вып. 37. Новосибирск, изд. Ин-та гидродинамики СО АН СССР, 1978.

10. Тернер Дж. Эффекты плавучести в жидкостях. М., Мир, 1977.
11. Филиппе О. М. Динамика верхнего слоя океана. М., Мир, 1969.
12. Govindaraju S. P., Saffman P. G. Flow in a turbulent trailing vortex. — Phys. Fluids, 1971, vol. 14, N 10.
13. Prandtl L. Einfluss stabilisierender Kräfte auf die Turbulenz. — In: Ludwig Prandtl Gesammelte Abhandlungen. Teil 2. Berlin, Springer-Verlag, 1961.
14. Мошин А. С., Яглом А. М. Статистическая гидромеханика. Ч. 1. М., Наука, 1965.
15. Bradshaw P. The analogy between streamline curvature and buoyancy in turbulent shear flow. — J. Fluid Mech., 1969, vol. 36, N 1.
16. Johnston J. P. Internal flows. — In: Top. Appl. Phys. (Turbulence). Vol. 12. N. Y., 1976.
17. Mellor G. L. A comparative study of curved flow and density-stratified flow. — J. Atmos. Sci., 1975, vol. 32, N 7.
18. Мэррит, Радингер. Измерение коэффициентов переноса тепла и импульса в турбулентном стратифицированном потоке. — РТК, 1973, т. 11, № 11.
19. Зельдович Я. Б. О трении в жидкости между вращающимися цилиндрами. Препринт Ин-та прикл. матем. АН СССР, 1979, № 139.
20. Sallet D., Widmayer R. Turbulent vortex rings. — Z. Flugwiss., 1974, Bd 22, S. 207—216.

УДК 518.12 : 533.6

## ЛОКАЛЬНАЯ АППРОКСИМАЦИЯ ВИХРЕВОГО СЛОЯ СИСТЕМОЙ ДИСКРЕТНЫХ ВИХРЕЙ

Д. Н. Горелов

(Новосибирск)

В аэродинамике крыло и вихревая пелена за ним часто моделируются системой дискретных вихрей. Строгое обоснование такого моделирования в случае обтекания тонкого криволинейного профиля стационарным потоком несжимаемой жидкости дано М. А. Лаврентьевым в работе [1].

Идея дискретизации несущей вихревой поверхности, обтекаемой потоком, привела к созданию метода дискретных вихрей, который успешно применяется для расчета аэродинамических характеристик летательных аппаратов [2—5].

Наиболее широкое применение получили расчетные схемы с равномерным распределением дискретных вихрей и контрольных точек, в которых требуется выполнение граничных условий соответствующей краевой задачи. Для этих схем доказана сходимость приближенного решения одномерного сингулярного интегрального уравнения с ядром Коши к точному на любом фиксированном отрезке внутри промежутка интегрирования [6, 7] и сходимость на всем промежутке по норме в  $L_1$  [8] для всех допустимых классов решений. В то же время было выяснено, что равномерная расчетная схема дает неустраняемую погрешность приближенного решения вблизи концов интервала [9, 4, 6].

Новые возможности открывает применение расчетных схем с неравномерным распределением дискретных вихрей и контрольных точек, что позволяет в принципе получить равномерное приближение интенсивности дискретных вихрей к соответствующим точным их значениям на всем интервале. Впервые такая схема была предложена, видимо, в работе [9]. Вопросы обоснования неравномерных схем практически не исследованы.

Следует отметить, что ключевым моментом в проблеме построения решения сингулярных интегральных уравнений методом дискретных вихрей является вопрос об аппроксимации интегралов типа Коши соответствующей квадратурной формулой. Исследованию этого вопроса и посвящена данная работа.

### 1. Рассмотрим интеграл типа Коши

$$(1.1) \quad F(x_0) = \int_0^1 \frac{\gamma(x) dx}{x - x_0},$$