

**ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ СФЕРИЧЕСКОЙ  
КАВИТАЦИОННОЙ ПОЛОСТИ В ЗВУКОВОМ ПОЛЕ**

*В. Г. Гасенко, Л. Е. Колесников, В. В. Соболев*

(Новосибирск)

Рассмотрена линейная теория устойчивости сферической формы кавитационной полости и устойчивость ее радиальных пульсаций в звуковом поле. Получено уравнение для амплитуд сферических гармоник с учетом поверхностного натяжения, вязкости и сжимаемости окружающей жидкости в приближении Херинга — Флина. В этом же приближении рассмотрена устойчивость радиальных пульсаций. Проведено численное исследование полученных уравнений.

Поведение кавитационной полости в звуковом поле исследовалось в [1-8]. Полученное из уравнений гидродинамики уравнение, описывающее изменение во времени радиуса  $R$  сферической полости, изучалось в основном численными методами [4-7]. Представляет интерес вопрос об устойчивости поведения сферической кавитационной полости в поле звуковой волны. В [9, 10] изучалась устойчивость сферической формы паровой полости в приближении Нолтинга — Непайраса. В [11] рассмотрена устойчивость радиальных пульсаций кавитационного газового пузырька без учета поверхностного натяжения, вязкости и сжимаемости жидкости. В данной работе проводится численное исследование устойчивости сферической полости в звуковом поле.

Рассмотрим устойчивость сферической формы кавитационной полости. Следуя Плессету [9], представим возмущенный радиус  $r_s$  сферы в виде

$$r_s = R(t) + a_n(t) S_n$$

где  $R(t)$  — невозмущенный радиус сферического пузырька,  $S_n$  — сферическая гармоника  $n$ -го порядка,  $a_n(t)$  — амплитуда  $n$ -й гармоники. Предполагается, что  $|a_n(t)| \ll R(t)$ .

Вывод уравнений, описывающих изменение амплитуд сферических гармоник, проводится по аналогии с [9]. Используя выражение для потенциала скорости с учетом поверхностного натяжения и вязкости сжимаемой жидкости [8], удовлетворяющее волновому уравнению акустического приближения, можно показать, что представление возмущенного потенциала аналогично [9] с точностью до членов порядка  $1/c_0$  ( $c_0$  — невозмущенная скорость звука в жидкости) верно. Считая, что внутри полости находится газ, подчиняющийся адиабатическому уравнению состояния, получим уравнение для невозмущенного радиуса  $R(t)$

$$(1) \quad R \frac{d^2 R}{dt^2} \left( 1 - \frac{\rho_1}{\rho_0} - \frac{2}{c_0} \frac{dR}{dt} \right) + \frac{3}{2} \left( \frac{dR}{dt} \right)^2 \left( 1 - \frac{\rho_1}{\rho_0} - \frac{4}{3c_0} \frac{dR}{dt} \right) + \frac{1}{\rho_0} [P_\infty - P(R)] - \frac{R}{\rho_0 c_0} \frac{dP(R)}{dt} \left( 1 - \frac{1}{c_0} \frac{dR}{dt} \right) = 0$$

$$P(R) = \left( P_0 + \frac{2\sigma}{R_0} \right) \left( \frac{R_0}{R} \right)^{3\gamma} - \frac{2\sigma}{R} - \frac{4\mu}{R} \frac{dR}{dt}$$

$$P_\infty = P_0 - P_m \sin(\omega t)$$

Здесь  $P(R)$  — давление на границе пузырька,  $P_\infty$  — давление на бесконечности,  $P_0$  — давление в невозмущенной жидкости,  $P_m$ ,  $\omega$  — амплитуда и частота внешнего звукового поля,  $\tau$ ,  $\mu$  — коэффициенты поверхностного натяжения и вязкости,  $\gamma$  — показатель адиабаты,  $R_0$  — начальный радиус полости,  $\rho_0$ ,  $\rho_1$  — плотности жидкости и газа. Для амплитуд сферических гармоник имеем

$$(2) \quad \frac{d^2 a_n}{dt^2} + B \frac{da_n}{dt} - A a_n = 0$$

$$B = \frac{3}{R} \frac{dR}{dt} + n \left[ 2\mu(n+1)(n+2)/R^2 + \frac{1}{c_0^2} \frac{dP(R)}{dt} \right] [n\rho_0 + (n+1)\rho_1]^{-1}$$

$$(3) \quad A = \left\{ n\rho_0 \left[ (n-1) \frac{d^2 R}{dt^2} - \frac{2(n+1)}{c_0} \frac{dR}{dt} \frac{d^2 R}{dt^2} - \frac{2(n+1)}{Rc_0} \left( \frac{dR}{dt} \right)^2 + \right. \right.$$

$$\left. + \frac{(n+1)}{c_0\rho_0} \frac{dP(R)}{dt} - \frac{R}{c_0^2\rho_0} \frac{d^2 P(R)}{dt^2} - \frac{1}{c_0^2\rho_0} \frac{dR}{dt} \frac{dP(R)}{dt} \right] -$$

$$- (n+1)(n+2)\rho_1 \frac{d^2 R}{dt^2} - \sigma n(n-1)(n+1)(n+2)/R^2 -$$

$$\left. - \frac{4\mu n(n-1)(n+1)}{R^2} \frac{dR}{dt} - \frac{2\mu n(n+1)(n+4)}{Rc_0^2\rho_0} \frac{dP(R)}{dt} \right\} \times$$

$$\times R^{-1} [n\rho_0 + (n+1)\rho_1]^{-1}$$

При  $\rho_1 \ll \rho_0$  (1) совпадает с уравнением Херинга — Флина, выражения для  $A$  и  $B$  при  $\mu = 0$  и  $c_0 \rightarrow \infty$  принимают вид [9].

Исследуем устойчивость сферической формы кавитационной полости с помощью численного интегрирования уравнения (2) для амплитуд гармоник возмущения и уравнения (1) для невозмущенного радиуса  $R(t)$ . Эти уравнения интегрировались численно методом Рунге — Кутты с автоматическим выбором шага интегрирования по заданной точности вычислений. Переменный шаг по времени обеспечивал относительную точность  $10^{-5}$ . Корректность полученных результатов в случае несжимаемой жидкости при постоянном внешнем поле для парового пузырька без учета вязкости проверялась сравнением данных численного интегрирования с аналитическими решениями, приведенными в [10]. Рассматривались пузырьки с  $R_0 = 10^{-4}$  см, внутри которых находился газ, подчиняющийся адиабатическому закону с показателем адиабаты  $\gamma = 1.4$ . Резонансная частота кавитационной полости вычислялась по формуле [12, 13]

$$(4) \quad \omega_0 = R_0^{-1} \{ 3\gamma [P_0 + (1 - 1/3\gamma) 2\tau/R_0] / \rho_0 - (2\mu/\rho_0 R_0)^2 \}^{1/2}$$

Члены, учитывающие сжимаемость, в (4) опущены, так как в приближении Херинга — Флина их вклад пренебрежимо мал [14].

Рассматривались случаи:  $\omega = \omega_0$  (резонанс),  $\omega = 10 \omega_0$  и  $\omega = 0.1 \omega_0$ . Давление  $P_0$  принималось равным 1 атм. Амплитуды  $P_m$  внешнего звукового поля выбирались так, чтобы захлопывание кавитационной полости происходило как можно позднее. Плотность жидкости  $\rho_0$  бралась равной 1 г/см<sup>3</sup>, плотность газа  $\rho_1$  в пузырьке вычислялась с помощью уравнения состояния Клапейрона — Клаузиса при начальной температуре 300° К.

В уравнении (2) для амплитуд сферических гармоник можно исключить член с первой производной. Подстановка

$$(5) \quad u = a_n \exp(1/2 \int B dt)$$

приводит уравнение (2) к виду

$$(6) \quad d^2 u / dt^2 + I(t) u = 0, \quad I(t) = -A - B/4 - 1/2 dB/dt$$

где  $A$  и  $B$  определяются из (3). Представляя  $I(t)$  в виде ряда Фурье по

косинусам

$$(7) \quad I(t) = \sum_{k=0}^N b_k \cos(2\pi kt/T)$$

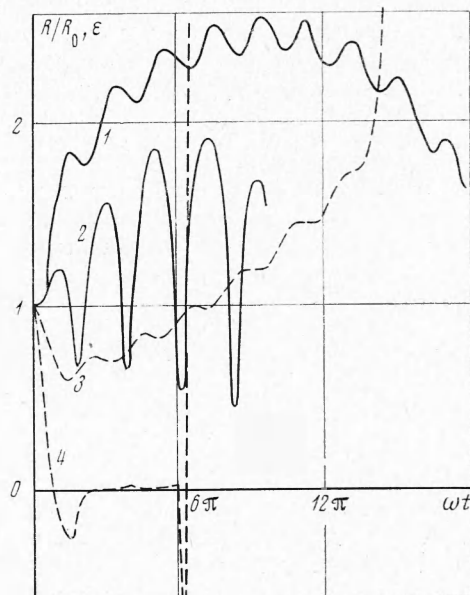
получим из (6) уравнение Хилла. Устойчивость решений уравнения (6) при  $0 \leq t \leq T$  можно определить (см. [15]) по значениям коэффициентов  $b_k$  в разложении (7). Значения  $b_k$  вычислялись в каждом из приведенных ниже случаев и служили дополнительным средством изучения устойчивости.

Приведем результаты численного исследования устойчивости сферической формы кавитационной полости в приближении Херинга — Флина. На фиг. 1 показано поведение  $a_n(t)$  в несжимаемой жидкости при  $\omega = 10 \omega_0$ ,  $P_m = 100 \text{ атм}$ ,  $\tau = \mu = 0$ . Кривые 1, 2, 3 соответствуют  $n = 2, 3, 4$ . Здесь амплитуды всех гармоник, осциллируя, возрастают со временем. Колебания радиуса  $R(t)$  в этом случае модулированы собственной частотой кавитационной полости (фиг. 2, кривая 1). Поведение и детальный вид кривых  $a_n(t)$  зависит от соотношения между  $\omega$  и  $\omega_0$ . Из фиг. 1 видно, что при  $\omega = 10 \omega_0$  на профилях амплитуд гармоник появляются дополнительные максимумы. В резонансном случае ( $\omega = \omega_0$ ) они отсутствуют. Это видно из фиг. 3, на которой приведены графики  $a_n(t)$  в случае несжимаемой жидкости при  $P_m = 0.5 \text{ атм}$ ,  $\tau = 0$ ,  $\mu = 0.002 \text{ см}^2/\text{сек}$ . Кривые 1, 2 отвечают  $n = 2, 4$ . Поведение  $R(t)$  при этих параметрах показано на фиг. 2 (кривая 2).

Без учета вязкости амплитуды  $a_n(t)$  с течением времени растут быстрее, степень роста увеличивается с возрастанием номера гармоники. Поверхностное натяжение также существенно влияет на эволюцию амплитуд гармоник возмущения. При  $\tau = 75 \text{ дин/см}$ ,  $P_m = 0.5 \text{ атм}$ ,  $\mu = 0$  в резонансном случае размах осцилляций  $a_n(t)$  уменьшается, а при  $\tau = 150 \text{ дин/см}$  амплитуды первых шести гармоник убывают с ростом  $t$ . Частота осцилляций гармоник увеличивается с ростом  $n$ . Учет вязкости



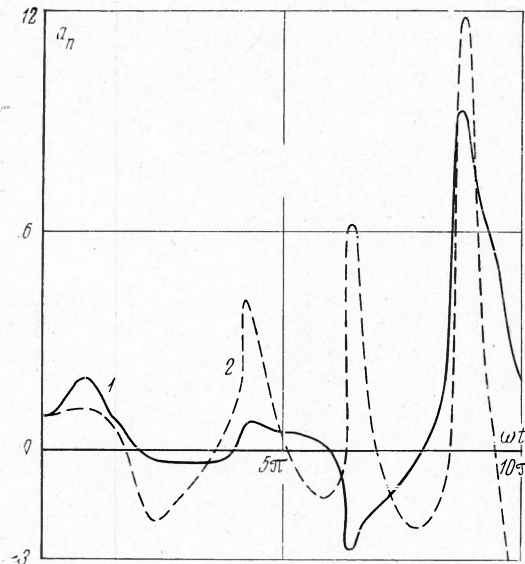
Фиг. 1



Фиг. 2

в отличие от эффекта, обусловленного поверхностным натяжением, не приводит к возрастанию частоты колебаний  $a_n(t)$ .

При увеличении давления  $P_m$  в резонансном случае происходит захлопывание пузырька. Поведение радиуса в этом случае подробно изучено [6]. В несжимаемой жидкости при  $P_m = 300$  атм,  $\omega = \omega_0$ ,  $\tau = \mu = 0$



Фиг. 3

амплитуды  $a_n(t)$  растут и частота их осцилляций увеличивается по мере приближения к моменту схлопывания. Размах осцилляций здесь больше, чем в случае  $P_m = 0.5$  атм. При  $\tau = 75$  дин/см,  $\mu = 0$  качественное поведение амплитуд сферических гармоник практически не меняется. Аналогичное положение имеет место при  $\tau = 0$ ,  $\mu = 10^{-2}$  см<sup>2</sup>/сек. В этом случае при  $P_m = 0.5$  атм  $a_n(t)$  убывают. Учет сжимаемости при  $P_m = 300$  атм приводит к замедлению роста амплитуд всех гармоник. Это наблюдалось при  $\tau = \mu = 0$ ,  $c_0 = 1.3 \cdot 10^5$  см/сек. Когда  $P_m = 0.5$  атм, сжимаемость увеличивает скорость роста второй и четвертой гармоник, при этом третья, пятая и шестая растут медленнее.

При  $\omega = 0.1 \omega_0$  сферическая форма кавитационной полости более неустойчива, чем в случае  $\omega = \omega_0$  и  $\omega = 10 \omega_0$ . Численные эксперименты показывают, что здесь степень роста  $a_n(t)$  в неустойчивых случаях резко зависит от номера гармоники.

Рассмотрим устойчивость радиальных пульсаций кавитационной полости. Запишем выражение для возмущенного радиуса  $\xi(t)$  пузырька

$$(8) \quad \xi(t) = R(t) + \varepsilon(t)$$

Здесь  $\varepsilon(t)$  — возмущение радиального движения. Считая  $|\varepsilon(t)| \ll R(t)$ , подставляя  $\xi(t)$  в уравнение Херинга — Флина (1) и линеаризуя по  $\varepsilon(t)$ , получим уравнение для возмущения  $\varepsilon(t)$ :

$$(9) \quad \frac{d^2\varepsilon}{dt^2} + \frac{d\varepsilon}{dt} \left\{ \frac{3}{R} \frac{dR}{dt} - \frac{1}{\rho_0 c_0} \frac{dP(R)}{dR} + \left[ \frac{4\mu}{\rho_0 R^2} \left( 1 + \frac{1}{c_0} \frac{dR}{dt} \right) - \frac{2}{c_0} \frac{d^2 R}{dt^2} \right] \right\} \times \\ \times \left( 1 - \frac{2}{c_0} \frac{dR}{dt} \right)^{-1} + \varepsilon \left\{ \frac{1}{R} \frac{d^2 R}{dt^2} - \left[ \frac{1}{\rho_0 R} \frac{dP(R)}{dR} \left( 1 + \frac{1}{c_0} \frac{dR}{dt} \right) + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{c_0} \frac{dR}{dt} \frac{d^2 P(R)}{dR^2} \right] \left( 1 - \frac{2}{c_0} \frac{dR}{dt} \right)^{-1} \right\} = 0$$

Проведем исследование устойчивости радиальных колебаний кавитационной полости в приближении Херинга — Флина с помощью численного интегрирования системы уравнений (1), (9). Значения параметров ( $R_0$ ,  $P_0$  и т. д.), при которых рассматривалось поведение  $\varepsilon(t)$ , указаны выше. Амплитуда звукового поля принималась равной 0.5 атм при  $\omega = \omega_0$  и  $\omega = 0.1 \omega_0$  и 100 атм при  $\omega = 10 \omega_0$ .



В резонансном случае при  $\tau = 0$ ,  $\mu = 0.002 \text{ см}^2/\text{сек}$   $\varepsilon(t)$  на первом периоде затухает, затем, начиная с третьего периода, растет (фиг. 2, кривая 4). При учете поверхностного натяжения радиальные пульсации полости становятся устойчивыми. Когда  $\tau = 150 \text{ дин/см}$ ,  $\varepsilon(t)$  затухает на первом периоде звукового поля. Еще большее затухание наблюдается при увеличении вязкости. Сжимаемость жидкости в приближении Херинга — Флина слабо влияет на поведение  $\varepsilon(t)$ . Увеличение амплитуды внешнего звукового поля приводит к более резкой неустойчивости радиальных пульсаций. Введение поверхностного натяжения и вязкости в этом случае замедляет рост  $\varepsilon(t)$ . Если кавитационная полость близка к схлопыванию, то  $\varepsilon(t)$  всегда растет.

В случае  $\omega = 10 \omega_0$  при  $\tau = \mu = 0$   $\varepsilon(t)$  растет со временем (фиг. 2, кривая 3). Если  $\tau \neq 0$  и  $\mu \neq 0$ , то радиальное движение полости становится более устойчивым. В целом здесь в неустойчивом случае рост  $\varepsilon(t)$  менее интенсивный, чем при  $\omega = \omega_0$ .

Когда  $\omega \ll \omega_0$  ( $\omega = 0.1 \omega_0$ ),  $\varepsilon(t)$  растет на половине первого периода. Введение поверхностного натяжения ( $\tau = 75 \text{ дин/см}$ ) и вязкости ( $\mu = 0.01 \text{ см}^2/\text{сек}$ ) качественно не меняет поведения  $\varepsilon(t)$ .

Проведенное численное исследование уравнений (1), (2), (9) показывает, что устойчивость радиальных пульсаций и сферической формы кавитационного пузырька в различной степени зависит от частоты и амплитуды внешнего звукового поля, вязкости, сжимаемости и поверхностного натяжения жидкости. Вязкость и поверхностное натяжение положительно влияют на устойчивость, вязкостные эффекты сильнее сказываются на высших гармониках, их осцилляции «зарезаются» при введении диссипации. Поверхностное натяжение в противоположность диссипативным эффектам делает сначала более устойчивым поведение низших гармоник. Таким образом, вязкость и поверхностное натяжение делают сферическую форму кавитационной полости более устойчивой, действуя на разные части спектра возмущения. Поверхностное натяжение увеличивает частоту осцилляций амплитуд всех гармоник. Вязкость на частоту колебаний гармоник не влияет.

Величина амплитуды звукового поля сильнее сказывается на устойчивости при  $\omega = \omega_0$  и  $\omega \ll \omega_0$ . Увеличение амплитуды поля в этих случаях приводит к схлопыванию кавитационной полости. Учет вязкости и поверхностного натяжения здесь не устраняет неустойчивости сферической формы полости.

Наименее устойчивы радиальные пульсации и сферическая форма пузырька при  $\omega \ll \omega_0$ . Влияние вязкости и поверхностного натяжения в этом случае проявляется слабо.

Учет сжимаемости жидкости в приближении Херинга — Флина не приводит к существенным изменениям в поведении амплитуд сферических гармоник и радиальных пульсаций кавитационного пузырька. Сжимаемость несколько увеличивает неустойчивость сферической формы и радиальных колебаний за исключением случая схлопывания кавитационной полости, когда сжимаемость вблизи момента схлопывания уменьшает степень роста амплитуд сферических гармоник.

Поступила 5 III 1973

#### ЛИТЕРАТУРА

1. *Lord Rayleigh*. On pressure developed in a liquid during the collapse of a spherical cavity. *Phys. Mag.*, 1917, vol. 34, No. 199.
2. *Noltingk B. E., Neppiras E. A.* Cavitation produced by ultrasonics. *Proc. Phys. Soc. Neppiras*, Ser. B, 1950, vol. 63, pt 9.

- 2a. *Neppiras E. A., Noltingk B. E.* Cavitation produced by ultrasonics: Theoretical conditions for the onset of cavitation. Proc. Phys. Soc. London, Ser. B, 1951, vol. 64, pt 12.
  3. *Коул Р.* Подводные взрывы. М., Изд-во иностр. лит., 1950.
  4. *Flynn H. G.* Physics of acoustic cavitation in liquids. Phys. Acoust., vol. 1, pt B, New York — London, Acad. Press., 1964.
  5. *Воротникова М. И., Солоухин Р. И.* Расчет пульсаций газовых пузырьков в несжимаемой жидкости под действием периодически изменяющегося давления. Акуст. ж., 1964, т. 10, вып. 1, стр. 34
  6. Физика и техника мощного ультразвука, кн. 2. Мощные ультразвуковые поля. М., «Наука», 1968.
  7. *Перник А. Д.* Проблемы кавитации. Л., Судпромгиз, 1963.
  8. *Gilmore F. R.* The growth or collapse of a spherical bubble in a viscous compressible fluid. Heat Transfer Fluid Mech. Inst. Stanford Univ. Press., 1952.
  9. *Plesset M. S.* On the stability of fluid flows with spherical symmetry. J. Appl. Phys., 1954, vol. 25, No. 1.
  10. *Plesset M. S., Mitchell T. P.* On the stability of the spherical shape of a vapor cavity in a liquid. Quart. Appl. Math., 1956, vol. 13, No. 4.
  11. *Eller A., Flynn H. G.* Generation of subharmonics of order one — half by bubbles in a sound field. J. Acoust. Soc. America, 1969, vol. 46, No. 3.
  12. *Trilling L.* The collapse and rebound of gas bubble. J. Appl. Phys., 1952, vol. 23, No. 1.
  13. *Hirose T., Okuyama M.* Mechanics on the cavitation produced by ultrasonics (II), conditions for cavitation and stationary cavitation. J. Acoust. Soc. Japan, 1957, vol. 13, No. 1.
  14. *Houghton G.* Theory of bubble pulsation and cavitation. J. Acoust. Soc. America, 1963, vol. 35, No. 9.
  15. *Сима.* Собственная частота колебаний газового пузырька в вязкой сжимаемой жидкости. Тр. Америк. о-ва инж.-механ., Сер. Д, Теорет. основы инж. расчетов, 1970, № 3.
  16. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. Эллиптические и автоморфные функции. Функции Ламе и Матье. М., «Наука», 1967.
-