ИНВАРИАНТНО-ГРУППОВЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ПЛОСКОГО СТАЦИОНАРНОГО ПУЧКА ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ

В. А. Сыровой

(*Москва*)

Понятие автомодельного решения используется в различных областях физики. Широкий класс автомодельных решений исследован при помощи теории размерности [1]. В работах [2,3] было введено понятие инвариантно-группового решения (которое включает в себя обычное понятие автомодельного решения) и разработан общий метод их получения. В работе [3] этот метод был применен к исследованию нелинейного уравнения теплопроводности. Вслед за этим были рассмотрены инвариантно-групповые решения уравнений движения вязкой несжимаемой жидкости [4] и несжимаемого пограничного слоя [5] в плоском случае. Ниже исследуются групповые свойства уравнений пучка при отсутствии внешнего магнитного поля (§ 1—3) и в заданном внешнем магнитном поле (§ 4—7).

§ 1. Основные уравнения. Будем рассматривать ламинарные нормальные нерелятивистские пучки [6–8] при отсутствии внешнего магнитного поля.

Пусть $x^i\,(i = 1, 2, 3)$ — система координат, метрика в которой задается соотношением

$$ds^{(2)} = g_{ij}\,dx^i\,dx^j \tag{1.1}$$

Подобно тому как это было сделано для однокомпонентного потока [9], можно показать, что система уравнений, описывающая рассматриваемые пучки, сводится к единственному уравнению, которое в тензорной форме имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial x^m}\left\{g^{mn}v_n\frac{\partial}{\partial x^j}\left[\sqrt{g}\,g^{jl}\frac{\partial}{\partial x^l}\left(g^{ik}v_iv_k\right)\right]\right\} = 0, \qquad v_i = \frac{\partial W}{\partial x^i} \tag{1.2}$$

Здесь W — действие, отнесенное к массе частицы.

Все параметры потока могут быть выражены через действие W. Для потенциала, плотности пространственного заряда, физических компонент скорости, напряженности поля и плотности тока имеем соответственно

$$\varphi = -\frac{1}{2\eta}g^{ik}\frac{\partial W}{\partial x^i}\frac{\partial W}{\partial x^k}, \qquad \rho = \frac{1}{8\pi\eta}\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x^j}\left[\sqrt{g}\,g^{jl}\frac{\partial}{\partial x^l}\left(g^{ik}\frac{\partial W}{\partial x^i}\frac{\partial W}{\partial x^k}\right)\right]$$

$$V_h = \frac{1}{\sqrt{g_{hh}}}\frac{\partial W}{\partial x^h}, \qquad E_h = \frac{1}{2\eta}\frac{1}{\sqrt{g_{hh}}}\frac{\partial}{\partial x^h}\left(g^{ik}\frac{\partial W}{\partial x^i}\frac{\partial W}{\partial x^k}\right) \tag{1.3}$$

$$J_h = \frac{1}{8\pi\eta}\frac{1}{\sqrt{g_{hh}g}}\frac{\partial W}{\partial x^h}\frac{\partial}{\partial x^j}\left[\sqrt{g}\,g^{jl}\frac{\partial}{\partial x^l}\left(g^{ik}\frac{\partial W}{\partial x^i}\frac{\partial W}{\partial x^k}\right)\right]$$

Здесь η — удельный заряд частицы, h — фиксирующий индекс.

§ 2. Групповые свойства уравнения пучка. Как будет видно из дальнейшего, инвариантно-групповые решения (H-решения) получаются только в трех ортогональных системах координат: декартовой, полярной и равноугольной спиральной.

Уравнение (1.2) может быть записано в каждой из этих систем.

В декартовых координатах x, y оно имеет вид

$$
\begin{gathered}
W_x^2 W_{4x} + W_y^2 W_{4y} + 2W_x W_y (W_{3xy} + W_{x3y}) + \\
+ (W_x^2 + W_y^2) W_{2x2y} + (4W_x W_{2x} + W_x W_{2y} + W_y W_{xy}) W_{3x} + \\
+ (4W_y W_{2y} + W_y W_{2x} + W_x W_{xy}) W_{3y} + (3W_y W_{2x} + 5W_x W_{xy} + 2W_y W_{2y}) W_{2xy} + \\
+ (3W_x W_{2y} + 5W_y W_{xy} + 2W_x W_{2x}) W_{x2y} + \\
+ (W_{2x} + W_{2y})(W_{2x}^2 + 2W_{xy}^2 + W_{2y}^2) = 0 \qquad (2.1)
\end{gathered}
$$

($W_{4x} = \partial^4 W / \partial x^4$, $W_{3xy} = \partial^4 W / \partial x^4 \partial y$ и т. д.)

Уравнение (2.1) было выписано в [7], однако ряд членов был опущен.

Равноугольная спиральная система координат q_1, q_2 была введена в [10]. Координаты q_1, q_2 связаны с обычными полярными координатами r, θ по формулам

$$
r = \exp(b_1 q_1 + b_2 q_2), \qquad \theta = b_1 q_2 - b_2 q_1 \qquad (2.2)
$$

Декартова и полярная системы координат являются предельными случаями равноугольной спиральной. При b_1, $b_2 \to 0$ спиральная система переходит в декартову; при $b_1 \to 1$, $b_2 \to 0$ получаем координаты $\ln r, \theta$, тесно связанные с полярными. Заметим, что сетка спиральных координат определяется равенствами

$$
\begin{matrix} \operatorname{Re} f(z) = \text{const}, \\ \operatorname{Im} f(z) = \text{const}, \end{matrix} \qquad f(z) = \frac{b_1 + ib_2}{b_1^2 + b_2^2} \ln z \qquad (z = x + iy) \qquad (2.3)
$$

Применим общий метод получения H-решений [2, 3] к уравнению пучка (2.1). Решение определяющих уравнений для координат инфинитезимальных операторов основной группы уравнения (2.1) приводит к результату: алгебра Ли основной группы порождается следующими линейно независимыми инфинитезимальными операторами

$$
\begin{gathered}
X_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \qquad X_2 = \frac{\partial}{\partial y}, \qquad X_3 = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} \\
X_4 = -y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y}, \qquad X_5 = \frac{\partial}{\partial W}, \qquad X_6 = W\frac{\partial}{\partial W}
\end{gathered} \qquad (2.4)
$$

Согласно [3], отыскание всех существенно различных H-решений ранга I следует предпринять на однопараметрических подгруппах, оптимальная система которых имеет вид

$$
\begin{gathered}
1^\circ.\ X_5, \quad 2^\circ.\ X_6, \quad 3^\circ.\ X_2, \quad 4^\circ.\ X_2 + X_6, \quad 5^\circ.\ X_2 + X_5, \quad 6^\circ.\ X_4 + aX_6, \\
7^\circ.\ X_4 + X_5, \quad 8^\circ.\ X_3 + aX_4 + X_5, \quad 9.\ X_3 + aX_4 + bX_6 \qquad (2.5)
\end{gathered}
$$

(a, b — произвольные постоянные)

§ 3. Анализ *H*-решений уравнения пучка. Подгруппу, порождаемую оператором X, будем обозначать символом $H\langle X\rangle$.

1°, 2°. Для подгрупп $H\langle X_5\rangle$ и $H\langle X_6\rangle$ не выполняется необходимое условие существования H-решений [3].

3°. Для подгруппы $H\langle X_2\rangle$

$$
W = J(x) \qquad (3.1)
$$

Функция (3.1) удовлетворяет уравнению [7]

$$
J'^2 J^{\mathrm{IV}} + 4J'J''J''' + J''^3 = 0 \qquad (3.2)
$$

Частным решением последнего [6] является $W = x^{5/3}$, соответствующее известному закону $^3/_2$ Чайлда-Лэнгмюра [11]. Нахождение общего решения (3.2) не составляет труда [12].

4° Для подгруппы $H\langle X_2+X_6\rangle$

$$W = e^{y} J(x) \tag{3.3}$$

На возможность построения решения с действием вида

$$W = e^{\alpha y} J(x) \tag{3.4}$$

указывалось в [10]. Решения (3.3) и (3.4) подобны [3].

Пусть $J(0)=0$, $J'(0)=0$, что соответствует эмиссии, ограниченной пространственным зарядом. Подставляя (3.3) в (2.1) и полагая

$$J = \exp \int z\,dx, \qquad z' = U \tag{3.5}$$

получим относительно U^2 квазилинейное уравнение второго порядка.

5°. Для подгруппы $H\langle X_2 + ax_5\rangle$

$$W = y + J(x) \tag{3.6}$$

Подставляя (3.6) в (2.1), получим для J уравнение (3.2). Данное решение описывает течение, в котором частицы выбрасываются с эмиттера под некоторым углом к нему. Это может иметь место, когда эмиттер движется относительно коллектора с постоянной скоростью $v_y = 1$.

6°. Для подгруппы $H\langle X_4 + aX_6\rangle$ при $a = 0$ действие имеет вид

$$W = J(r) \tag{3.7}$$

Данное H-решение в случае эмиссии, ограниченной пространственным зарядом, представляет собой классическое решение для радиального течения между коаксиальными цилиндрическими электродами [13].

При $a \neq 0$ действие определяется формулой

$$W = e^{\alpha\theta} J(r) \tag{3.8}$$

На возможность построения решения с действием вида (3.8) указывалось в [10]. Эмиссия ограничена пространственным зарядом, если $J(1)=0$, $J'(1)=0$. Уравнение (2.1) в силу (2.4) можно рассматривать как безразмерное. Поэтому мы не нарушим общности, считая $r = 1$ эмиттером. В координатах $\ln r$ и θ уравнение для J может быть сведено к квазилинейному уравнению второго порядка относительно U^2.

7°. Для подгруппы $H\langle X_4 + X_5\rangle$

$$W = \theta + J(\ln r) \tag{3.9}$$

Данное решение описывает течение в диоде с коаксиальными цилиндрическими электродами, причем эмиттер $r=1$ вращается с постоянной угловой скоростью, равной единице.

Уравнение для $J(\ln r)$ сводится к квазилинейному уравнению второго порядка относительно U^2.

8°. Для подгруппы $H\langle X_3 + aX_4 + X_5\rangle$ при $a = 0$

$$W = \ln r + J(\theta) \tag{3.10}$$

В качестве эмиттера выберем эквипотенциаль $\varphi = 0$, определяемую уравнением $r = \sqrt{1+J'^2}$. Частицы не могут покидать нулевой эквипотенциали под одним углом к ней, поле на ней не может быть постоянным, так как эти требования приводят к алгебраическому уравнению относительно J', а (1.2) в координатах $\ln r$, θ для рассматриваемого случая удовлетворяется лишь при $J' = \pm i$.

При $a \neq 0$ решение имеет вид

$$W = \ln r + J(\ln r - \alpha\theta) \tag{3.11}$$

Из соотношений (2.2) следует, что (3.11) можно переписать двумя способами

$$W = q_1 + J(q_2) \quad \text{при } \alpha = -b_1/b_2 \tag{3.12}$$

$$W = q_2 + J(q_1) \quad \text{при } \alpha = b_2/b_1 \tag{3.13}$$

Итак, равноугольная спиральная система координат возникла естественным образом. Аналогично случаю $a = 0$ можно показать, что требование постоянства компонент скорости на эквипотенциали приводит лишь к решению $J' = -b_2 / b_1$. Получаемое решение описывает движение частиц по окружностям, причем $v_\theta \sim 1 / r$, $\varphi \sim 1 / r^2$. Решение это является в то же время решением уравнения для однокомпонентного течения в θ-направлении [9], на что было указано в [14].

9°. Для подгруппы $H\langle X_3 + aX_4 + bX_6\rangle$ при $a = 0$, $b = 0$ инвариантное решение описывает однокомпонентное течение в θ-направлении, рассмотренное в [9]

$$W = J(\theta) \tag{3.14}$$

При $a = 0$, $b \neq 0$ имеем решение в виде

$$W = r^\alpha J(\theta) \tag{3.15}$$

На возможность построения решения с действием (3.15) указывалось в [10]. При $\alpha = 1$ получаем течение между непараллельными плоскостями, рассмотренное в [8].

На эмиттере $\theta = 0$ эмиссия ограничена пространственным зарядом, если $J(0) = 0$, $J'(0) = 0$.

Уравнение для J может быть сведено к квазилинейному уравнению второго порядка относительно U^2.

При $a \neq 0$, $b = 0$ действие является функцией одной из спиральных координат, например

$$W = J(q_1) \tag{3.16}$$

Данное H-решение описывает однокомпонентное спиральное течение и при $b_1 / b_2 = 1$ было просчитано в [10]. Уравнение, получающееся для J, подстановками

$$J' = z, \qquad z = \exp(Jydq_1), \quad y' = U \tag{3.17}$$

сводится к уравнению Абеля.

Наконец, при a, $b \neq 0$ получаем

$$W = e^{\gamma q_1} J(q_2) \tag{3.18}$$

Течения с действием вида (3.18) исследовались в [10]. Соответствующие уравнения численно интегрировались при $b_1 / b_2 = 1$ и ряде значений γ. При этом удовлетворялись условия эмиссии, ограниченной пространственным зарядом.

Заметим, что при помощи упоминавшихся выше предельных переходов можно проследить, как из решений в координатах q_1, q_2 получаются все другие решения.

Таким образом, рассмотрены все существенно различные инвариантно-групповые решения уравнений пучка в случае отсутствия магнитного поля.

Переходим к рассмотрению моноэнергетических пучков в магнитном поле H, перпендикулярном к плоскости течения.

§ 4. Основные уравнения. Введем безразмерные координаты, скорости, скалярный потенциал, плотность пространственного заряда и напряженность магнитного поля r°, V°, φ°, ρ° и H° соответственно по формулам

$$r = ar^\circ, \qquad V = U_0 V^\circ, \qquad \varphi = -\frac{U_0^2}{\eta}\varphi^\circ, \qquad \rho = \frac{U_0^2}{4\pi\eta a^2}\rho^\circ, \qquad H = \frac{cU_0}{\eta a}H^\circ \tag{4.1}$$

В этих формулах a, U_0 — характерные длина и скорость, c — скорость света.

Заметим, что введенные таким образом φ° и ρ° всегда положительны. В дальнейшем символ безразмерной величины будем опускать.

Система уравнений, описывающих рассматриваемые пучки, в тензорной форме имеет следующий вид:

$$v^k\left(\frac{\partial v^i}{\partial x^k}+\Gamma_{pk}^{i}v^p\right)=g^{il}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x^l}+\sqrt{g}e_{m3l}v^mH\right)$$

$$(S)\quad \frac{\partial}{\partial x^i}(\sqrt{g}g^{ik}\rho v_k)=0,\qquad \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\sqrt{g}g^{ik}\frac{\partial\varphi}{\partial x^k}\right)=\rho \tag{4.2}$$

Здесь Γ_{pk}^{i} — символ Кристоффеля второго рода, e_{ikl} — изотропный псевдотензор веса 1. Уравнения движения имеют интеграл

$$g_{ik}v^iv^k-2\varphi=\text{const} \tag{4.3}$$

Переходя к физическим компонентам скорости, уравнения (4.2) и (4.3) можно переписать в декартовой x, y, полярной r, θ и равноугольной спиральной q_1, q_2 системах координат. В декартовой системе имеем

$$\begin{aligned} &u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial\varphi}{\partial x}+vH, &&\frac{\partial\rho u}{\partial x}+\frac{\partial\rho v}{\partial y}=0\\ &u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial\varphi}{\partial y}-uH, &&\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=\rho\end{aligned} \tag{4.4}$$

$$u^2+v^2=2\varphi+\text{const} \tag{4.5}$$

§ 5. Групповые свойства уравнений пучка. Чтобы найти все те конфигурации магнитных полей, для которых существуют H-решения, будем считать магнитное поле такой же искомой функцией, как u, v, φ, ρ.

Решение определяющих уравнений для координат инфинитезимальных операторов основной группы порождается следующими линейно независимыми операторами:

$$X_1=x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}+\alpha u\frac{\partial}{\partial u}+\alpha v\frac{\partial}{\partial v}+2\alpha\varphi\frac{\partial}{\partial\varphi}+2(\alpha-1)\rho\frac{\partial}{\partial\rho}+(\alpha-1)H\frac{\partial}{\partial H}$$

$$X_2=x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}-2\rho\frac{\partial}{\partial\rho}-H\frac{\partial}{\partial H}\qquad(\alpha=0)$$

$$X_3=-y\frac{\partial}{\partial x}+x\frac{\partial}{\partial y}-v\frac{\partial}{\partial y}+u\frac{\partial}{\partial v},\qquad X_4=\frac{\partial}{\partial x},\qquad X_5=\frac{\partial}{\partial y} \tag{5.1}$$

Построение инвариантно-групповых решений ранга I следует предпринять на однопараметрических подгруппах [3]. Оптимальная система однопараметрических подгрупп, обеспечивающая отыскание всех существенно различных инвариантно-групповых решений, имеет вид:

$$1^\circ.\ X_5,\quad 2^\circ.\ X_3,\quad 3^\circ.\ X_1+aX_3,\quad 4^\circ.\ X_1-X_2+X_3,\quad 5^\circ.\ X_1-X_2+X_5 \tag{5.2}$$

§ 6. Анализ инвариантно-групповых решений. 1°. Для подгруппы $H\langle X_5\rangle$

$$u=J_1(x), v=J_2(x),\qquad \varphi=J_3(x), \rho=J_4(x), H=J_5(x) \tag{6.1}$$

В случае однородного магнитного поля (плоский магнетрон) задача была рассмотрена в [15, 16].

В общем случае задача сводится к интегрированию уравнения ($u\not\equiv 0$)

$$\varphi''=j_0\left[2\varphi-\left(\int H\,dx\right)^2\right]^{-1/2} \tag{6.2}$$

Это уравнение легко интегрируется в двух случаях

$$H=\frac{H_0}{2\sqrt{x}},\qquad H=\frac{H_0}{2}\frac{2x+a}{\sqrt{x(x+a)}} \tag{6.3}$$

На эмиттере $x=0$ выполняются условия эмиссии, ограниченной пространственным зарядом.

2°. Для подгруппы $H\langle X_3\rangle$

$$v_r = J_1(r), \qquad v_\theta = J_2(r), \qquad \varphi = J_3(r), \qquad \rho = J_4(r), \qquad H = J_5(r) \tag{6.4}$$

Задача о цилиндрическом магнетроне при $H = H_0$ была решена в [17].

В общем случае при $v_r \not\equiv 0$ уравнения движения имеют два интеграла

$$v_\theta = -\frac{1}{r}\int rH(r)\,dr, \qquad v_r^2 = 2\varphi - \left[\frac{1}{r}\int rH(r)\,dr\right]^2 + H_0^2 \ln a \tag{6.5}$$

и задача сводится к интегрированию уравнения

$$(r\varphi')' = j_0\left[2\varphi - \left(\frac{1}{r}\int rHdr\right)^2 + H_0^2 \ln a\right]^{-1/2} \tag{6.6}$$

При

$$H = \frac{H_0}{r}\,\frac{2\ln ar + 1}{2\sqrt{\ln ar}} \tag{6.7}$$

уравнение (6.6) сводится к

$$(r\psi')' = \frac{2j_0}{\sqrt{\psi}} \qquad (\psi = 2\varphi - H_0^2 \ln r) \tag{6.8}$$

В силу (6.5) начальная радиальная скорость равна нулю; $v_\theta(1) = 0$ при $a = 1$, но $H(1) = \infty$; при $a \neq 1$ магнитное поле на эмиттере конечно, но $v_\theta(1) \neq 0$, т. е. частицы покидают эмиттер по касательной, что возможно при вращении эмиттера с постоянной угловой скоростью.

В случае радиального течения между коаксиальными цилиндрическими электродами при отсутствии магнитного поля потенциал удовлетворяет уравнению (6.8). Известно численное решение этой задачи при произвольных условиях на эмиттере [18]. Пользуясь им и производя несложный пересчет согласно (6.8), получим распределение потенциала для задачи об ограниченной пространственным зарядом эмиссии в магнитном поле (6.7). В случае, когда радиальная скорость тождественно равна нулю, v_θ снова определяется формулой (6.5). Решения для этого случая при $H = H_0$ рассмотрены в [19, 20].

3°. Для подгруппы $H\langle X_1 + aX_3\rangle$

$$v_{q_1} = e^{\gamma q_2} J_2(q_1), \qquad v_{q_2} = e^{\gamma q_2} J_2(q_1), \qquad \varphi = e^{2\gamma q_2} J_3(q_1)$$

$$\rho = \frac{1}{b_1^2 + b_2^2}\, e^{2(\gamma - b_2) q_2 - 2b_1 q_1} J_4(q_1) \tag{6.9}$$

$$H = \frac{b}{\sqrt{b_1^2 + b_2^2}}\, e^{(\gamma - b_2) q_2 - b_1 q_1} J_5(q_1) \qquad (\gamma = \alpha b_2)$$

Систему S / H, определяющую данное H-решение, легко получить, подставив (6.9) в уравнения пучка, записанные в спиральных координатах. Полагая

$$\frac{J_2}{J_1} = k = \frac{1}{3\alpha - 1}\,\frac{b_1}{b_2} \qquad \left(\alpha \neq \tfrac{1}{3}\right) \tag{6.10}$$

сведем систему S / H к уравнению

$$J^2 J'' + JJ'^2 + 2\gamma^2 J^3 - 1 = 0 \tag{6.11}$$

где

$$J_1 = \left(\frac{j_0}{k^2 + 1}\right)^{1/3} J \qquad (J_1 J_4 = j_0) \tag{6.12}$$

Уравнение для однокомпонентного течения в θ-направлении [9] подстановкой $u = B^{1/3} J$ сводится к частному случаю уравнения (6.11), в котором $\gamma^2 = 1$.

Решение уравнения (6.11) при условиях

$$q_1 = q_0, \qquad J = 0, \qquad JJ' = 0 \tag{6.13}$$

дает

$$J_2 = kJ_1 = k\left[\frac{2j_0}{\gamma^2(k^2+1)}\right]^{1/3}\left[\sin\frac{3\gamma}{2}(q_1-q_0)\right]^{2/3}, \qquad J_3 = \frac{k^2+1}{2}J_1^2 \tag{6.14}$$

$$J_5 = -k\left[\frac{2j_0}{\gamma^2(k^2+1)}\right]^{1/3}\exp\left[-\left(b_1 - \frac{\gamma+b_2}{k}\right)q_1\right]\times$$

$$\times\frac{d}{dq_1}\left\{\exp\left[\left(b_1-\frac{\gamma+b_2}{k}\right)q_1\right]\left[\sin\frac{3\gamma}{2}(q_1-q_0)\right]^{2/3}\right\} \tag{6.15}$$

Полученное решение описывает следующее течение. Эмиттером является спираль $q_1 = q_0$. В силу (6.13) и (6.10) эмиссия на нем ограничена пространственным зарядом.

Траекториями частиц, как видно из (6.10), являются спирали, однако другого семейства, чем эмиттер (параметры c_1, c_2, отличные от b_1, b_2). При $\alpha = 2/3$ спиральные траектории вырождаются в лучи $\theta = \mathrm{const}$; при $b_1 / b_2 = \pm\sqrt{1-3\alpha}$ ($\alpha < 1/3$) — в семейство концентрических окружностей $r = \mathrm{const}$. Движение происходит в магнитном поле, определяемом (6.9), (6.15). Видно, что $H \to \infty$ при $q_1 \to q_0$.

Решение (6.14), (6.15) содержит также случай $\alpha = 0$, для которого

$$J_1 = \left[\frac{9j_0}{2(1+k^2)}\right]^{1/3}(q_1-q_0)^{2/3} \qquad (k = -b_1/b_2)$$

Рассмотрим случай $a = 0$

$$v_r = r^\alpha J_1(\theta), \qquad v_\theta = r^\alpha J_2(\theta), \qquad \varphi = r^{2\alpha}J_3(\theta), \qquad \rho = r^{2(\alpha-1)}J_4(\theta)$$

$$H = r^{\alpha-1}J_5(\theta) \tag{6.16}$$

При $v_r \equiv 0$ система (6.16) сводится к уравнению (6.11), где

$$J_2 = j_0^{1/3}J \qquad (J_2J_4 = j_0) \tag{6.17}$$

Решение для ограниченного пространственным зарядом эмиттера $\theta = 0$ имеет вид

$$\begin{gathered} v_\theta = \left(\frac{2j_0}{\alpha^2}\right)^{1/3} r^\alpha\left[\sin\frac{3\alpha\theta}{2}\right]^{2/3}, \qquad \varphi = \left(\frac{j_0^2}{2\alpha^4}\right)^{1/3} r^{2\alpha}\left[\sin\frac{3\alpha\theta}{2}\right]^{4/3} \\ H = -(1+\alpha)\left(\frac{2j_0}{\alpha^2}\right)^{1/3} r^{\alpha-1}\left[\sin\frac{3\alpha\theta}{2}\right]^{2/3} \end{gathered} \tag{6.18}$$

Траекториями частиц в рассматриваемом движении являются окружности. При $\alpha = 0$ формулы (6.18) принимают вид

$$v_\theta = \left(\frac{9j_0}{2}\right)^{1/3}\theta^{2/3}, \qquad \varphi = 3(6j_0^2)^{1/3}\theta^{4/3}, \qquad H = -\left(\frac{9j_0}{2}\right)^{1/3}\frac{\theta^{2/3}}{r}$$

При $\alpha = -1$ магнитное поле тождественно равно нулю. Таким образом, решение [9] для однокомпонентного потока в θ-направлении является частным случаем решения (6.18). Его можно было бы получить и как предельный случай решения (6.14), (6.15).

Следует отметить, что как в решении [9], так и в общем случае решения (6.18), плотность тока зависит от радиуса

$$j_\theta = J_2J_4r^{3\alpha-2} = j_0r^{3\alpha-2} \tag{6.19}$$

При $\alpha = 2/3$ плотность тока $j_\theta \equiv j_0$. При $\alpha = 1$ как магнитное поле, так и плотность пространственного заряда постоянны вдоль лучей $\theta = \mathrm{const}$.

Рассмотрим теперь случай $\alpha = {}^1/_3$. Полагая

$$J_2 = \psi(J_3) \tag{6.20}$$

получим для J_3 уравнение

$$J_3'' + \frac{4}{9} J_3 = \frac{j_0}{J_2} = \frac{j_0}{\psi(J_3)} \qquad (J_2 J_4 = j_0) \tag{6.21}$$

Решение уравнения (6.21) имеет вид

$$\theta = \int \left[2j_0 \int \frac{dJ_3}{\psi(J_3)} - \frac{4}{9} J_2{}^3\right]^{-1/2} dJ_3 \tag{6.22}$$

Таким образом, вопрос о получении решения, удовлетворяющего условиям эмиссии, ограниченной пространственным зарядом, сводится к вопросу о выборе функции $\psi(x)$, такой, что $\psi(0) = 0$ и выражение под радикалом в (6.22) неотрицательно.

Соответствующее магнитное поле определяется уравнением

$$J_5 = J_1' - \frac{4}{3} J_2 \tag{6.23}$$

Семейство аналитических решений, зависящих от произвольного параметра σ, удается найти в том случае, когда

$$J_2 = kJ_3{}^\sigma \qquad (0 < \delta < 1,\ 0 < k \leqslant \sqrt{2}) \tag{6.24}$$

В самом деле, в этом случае квадратуры в (6.22) удается выполнить, в результате чего имеем

$$J_3 = \left[\frac{9j_0{}^2}{2k(1-\sigma)}\right]^{\frac{1}{1+\sigma}} \left[\sin\frac{1+\sigma}{3}\theta\right]^{\frac{2}{1+\sigma}}, \qquad J_1 = \sqrt{2(J_2/k)^{1/\sigma} - J_2{}^2} \tag{6.25}$$

При $\sigma = {}^1/_2$ и $k = \sqrt{2}$ радиальная скорость тождественно равна нулю, т. е. это — частный случай предыдущего решения при $\alpha = {}^1/_3$. При $\sigma = {}^1/_2$ и $k < \sqrt{2}$ компоненты скорости пропорциональны, и частицы движутся по спиралям с эмиттера $\theta = 0$.

Заметим в заключение, что внешнее магнитное поле (6.15) может быть однородным $H = H_0$, если $\alpha = 1$. Можно показать, что при этом действие

$$W = e^{2b_2 q_2} W_1(q_1) \tag{6.26}$$

Поэтому именно это решение имелось в виду в замечании об обобщении электростатических решений на случай магнитного поля [10].

4°. Для подгруппы $H\langle X_1 - X_2 + X_3\rangle$

$$v_r = e^{\alpha\theta} J_1(r), \qquad v_\theta = e^{\alpha\theta} J_2(r), \qquad \varphi = e^{2\alpha\theta} J_3(r), \qquad \rho = e^{2\alpha\theta} J_4(r)$$
$$H = e^{\alpha\theta} J_5(r) \tag{6.27}$$

Перейдем к новой независимой переменной $\xi = \ln r$ и введем одну новую искомую функцию

$$J_4{}^\circ = e^{2\xi} J_4 \tag{6.28}$$

Полагая $J_1 / J_2 = 3\alpha$, сведем систему S / H для данного H-решения к уравнению типа (6.11), где

$$J_1 = \left(\frac{j_0}{1 + 9\alpha^2}\right)^{1/3} J \qquad (J_1 J_4{}^\circ = j_0) \tag{6.29}$$

Пусть на эмиттере $\xi = 0$ эмиссия ограничена пространственным зарядом. Тогда решение имеет вид

$$\begin{gathered} J_1 = 3\alpha J_2 = \left[\frac{2j_0}{\alpha^2(1+9\alpha^2)}\right]^{1/3} \left[\sin\frac{3\alpha}{2}\ln r\right]^{2/3}, \qquad J_3 = \frac{1}{2}(1 + 9\alpha^2) J_1{}^2 \\ J_5 = -\left[\frac{2j_0}{\alpha^2(1+9\alpha^2)}\right]^{1/3} r^{3\alpha^2 - 1} \frac{d}{dr}\left\{r^{1-3\alpha^2}\left[\sin\frac{3\alpha}{2}\ln r\right]^{2/3}\right\} \end{gathered} \tag{6.30}$$

Эмиттером является $r = 1$; частицы движутся по спиралям.

5°. Для подгруппы $H \langle X_1 - X_2 + X_5 \rangle$

$$u = e^{\alpha y} J_1(x), \qquad v = e^{\alpha y} J_2(x), \qquad \varphi = e^{2\alpha y} J_3(x), \qquad \rho = e^{2\alpha y} J_4(x)$$

$$H = e^{\alpha y} J_5(x) \tag{6.31}$$

Рассмотрим случай, когда эмиттером является плоскость $x = 0$, эмиссия с которой ограничена пространственным зарядом, а частицы движутся параллельно оси x, т. е. $J_2 \equiv 0$. Система S / H для данного H-решения сводится тогда к уравнению (6.11), где $J_1 = j_0^{1/3} J$ $(J_1 J_4 = j_0)$

Решение имеет вид

$$\begin{gathered} u = \left(\frac{2j_0}{\alpha^2}\right)^{1/3} e^{\alpha y} \left[\sin \frac{3\alpha x}{2}\right]^{2/3}, \qquad \varphi = \left(\frac{j_0^2}{2\alpha^4}\right)^{1/3} e^{2\alpha y} \left[\sin \frac{3\alpha x}{2}\right]^{4/3} \\ j = j_0 e^{3\alpha y}, \qquad H = (2\alpha j_0)^{1/3} e^{\alpha y} \left[\sin \frac{3\alpha x}{2}\right]^{2/3} \end{gathered} \tag{6.32}$$

Легко видеть, что линии $\varphi = \text{const}$ являются одновременно и линиями $H = \text{const}$. На эмиттере $H = 0$. Уравнение эквипотенциали $\varphi = \text{const}$ (положим для простоты $\alpha = {}^2/_3$)

$$y = C - \ln |\sin x| \tag{6.33}$$

Таким образом, рассмотрены все инвариантно-групповые решения уравнений плоского пучка в заданном внешнем магнитном поле.

§ 7. О системах фокусирующих электродов для пучков, описываемых некоторыми аналитическими решениями § 6. Для реализации течений, описываемых решениями, полученными в § 6, необходимо рассмотреть вопрос о фокусирующих электродах, обеспечивающих существование пучка данной конфигурации. Впервые вопрос о фокусировке был рассмотрен в [21]. В работе [22] был предложен метод нахождения фокусирующих электродов в случае криволинейных траекторий.

Пользуясь инвариантностью уравнения Лапласа относительно произвольного конформного преобразования, перейдем от плоскости течения $z = x + iy$ к плоскости $w = u + iv$ таким образом, чтобы при этом граница пучка перешла в действительную ось $v = 0$. Уравнение фокусирующих электродов имеет вид

$$\Phi(u, v) = \text{const} \tag{7.1}$$

где $\Phi = Re W(w)$, а функция W удовлетворяет следующему дифференциальному уравнению:

$$\frac{dW}{dw} = \frac{dV}{dw} + iF(w) \tag{7.2}$$

Функции $V(u)$ и $F(u)$ определяют потенциал и нормальную компоненту поля на $v = 0$.

Ниже приводятся два случая, когда уравнение (4.2) удается проинтегрировать, а также два других примера, где фокусирующие электроды определяются по известному численному решению [22] для однокомпонентного течения в θ-направлении [9].

1°. Рассмотрим течение, берущее начало с эмиттера $q_1 = q_0$ при $\gamma = 0$. Частицы движутся по спиралям $q_1' = \text{const}$, которые при $|k| = 1$ выражаются в концентрические окружности. При этом

$$V(u) = B(\beta u + \delta)^{4/3}, \qquad \frac{dV}{du} = kF(u) \tag{7.3}$$

Постоянные B, β и δ выражаются через k, j_0, c_1, c_2, q_0 и a_i $(i = 1, 2)$, где $q_1' = a_i$ — уравнение границ пучка.

Таким образом

$$W(w) = B\left(1 + \frac{i}{k}\right)(\beta\omega + \delta)^{4/3} \qquad (7.4)$$

и уравнение эквипотенциали (7.1) принимает вид

$$\Phi(u, v) =$$

$$= B[(\beta u+\delta)^2 + (\beta v)^2]^{2/3}\left[\cos\frac{4}{3}\operatorname{arctg}\frac{\beta v}{\beta u+\delta} - \frac{1}{k}\sin\frac{4}{3}\operatorname{arctg}\frac{\beta v}{\beta u+\delta}\right] = \mathrm{const} \qquad (7.5)$$

В случае спиральных и круговых траекторий имеем соответственно

$$r = \exp\left(u - \frac{c_1}{c_2}v\right), \qquad \theta = \frac{c_1}{c_2}u + v - \frac{c_1^2 + c_2^2}{c_2}a_i \qquad (7.6)$$

$$r = a_i e^{-v}, \qquad \theta = u \qquad (7.7)$$

Нулевая эквипотенциаль в плоскости w является прямой линией

$$v = \operatorname{tg}\vartheta_0 (u + \delta / \beta) \qquad (7.8)$$

наклоненной к действительной оси под углом

$$\vartheta_0 = \frac{3}{4}\psi_0 \qquad (\operatorname{tg}\psi_0 = k) \qquad (7.9)$$

Через ψ_0 обозначен угол между эмиттером и границей пучка. В силу конформности отображений $z \to w$ нулевая эквипотенциаль подходит к границе пучка в плоскости течения под тем же углом ϑ_0. В этой плоскости нулевая эквипотенциаль является спиралью $q_1'' = \mathrm{const}$ семейства (параметры d_1, d_2), отличного от семейств эмиттера (b_1, b_2) и траекторий (c_1, c_2). Нулевая эквипотенциаль вырождается в окружность $r = \mathrm{const}$ или в луч $\theta = \mathrm{const}$, если k удовлетворяет уравнению (7.10) и (7.11) сооответственно

$$\frac{2k}{1+k^2} + \operatorname{ctg}\frac{3}{4}\operatorname{arctg} k = 0 \qquad (7.10)$$

$$\frac{2k}{1+k^2} - \operatorname{tg}\frac{3}{4}\operatorname{arctg} k = 0 \qquad (7.11)$$

Каждое из уравнений (7.10), (7.11) имеет по одному корню.

2°. Рассмотрим теперь течение с эмиттера $\theta = 0$ по окружностям в случае $\alpha = 0$. При этом

$$V(u) = Au^{4/3}, \qquad F(u) \equiv 0 \qquad (A = 3(6j_0^2)^{1/3}) \qquad (7.12)$$

$$\Phi(u, v) = A(u^2 + v^2)^{2/3}\cos\frac{4}{3}\operatorname{arc\,tg}\frac{v}{u} = \mathrm{const} \qquad (7.13)$$

Итак, в плоскости w семейство эквипотенциалей для рассматриваемого решения имеет тот же вид, что и эквипотенциали в случае ленточного пучка [21]. Переменные u, v связаны с r, θ формулами (7.7). Нулевая эквипотенциаль в плоскости течения является спиралью.

3°. Пусть частицы движутся по окружностям с эмиттера $\theta = 0$ и $\alpha \neq 0$. Сравнивая выражения для потенциала в случае произвольного α и $\alpha = -1$ (однокомпонентное течение в θ-направлении при $H \equiv 0$), обнаруживаем, что одно из них переходит в другое, если ввести новые переменные по формулам

$$R = \alpha^{2/3} r^{-\alpha}, \qquad \vartheta = -\alpha\theta \qquad (7.14)$$

Преобразование координат (7.14) является конформным преобразованием

$$w = \alpha^{2/3} z^{-\alpha} \qquad (w = Re^{i\vartheta},\ z = re^{i\theta}) \qquad (7.15)$$

Фокусирующие электроды в случае $\alpha = -1$ были найдены численным интегрированием дифференциального уравнения эквипотенциали [22]. Пользуясь (7.14), легко получим решение для произвольного $\alpha \neq 0$.

Оказывается, что физический смысл имеют не только электроды для кольцевого пучка в плоскости течения Z, но и соответствующие им кривые в плоскости w. Это является следствием того факта, что функции $V(u)$ и $F(u)$ для кольцевого пучка совпадают с соответствующими функциями для ленточного пучка в неоднородном магнитном поле (§ 6, п. 5°) с точностью до изменения знака у произвольного параметра α и если

$$y_{0i} = -\ln a_i \qquad (i = 1{,}2) \tag{7.16}$$

где $r = a_i$ и $y = y_{0i}$ определяют границы этих пучков. (Переход $z \to w$ для ленточного пучка сводится к переносу по оси y.) Таким образом, фокусирующие электроды можно определить и в этом случае для произвольного α.

Автор признателен Г. Л. Гродзовскому за внимание и интерес к работе.

Поступила 23 II 1962

ЛИТЕРАТУРА

1. Седов Л. И. Методы подобия и размерности в механике, изд. 4-ое, Гостехиздат, 1957.
2. Овсянников Л. В. Группы и инвариантно-групповые решения дифференциальных уравнений. ДАН СССР, 1958, т. 118, № 3.
3. Овсянников Л. В. Групповые свойства уравнения нелинейной теплопроводности. ДАН СССР, 1959, т. 125, № 3.
4. Пухначев В. В. Групповые свойства уравнений Навье — Стокса в плоском случае. ПМТФ, 1960, № 1.
5. Павловский Ю. Н. Исследование некоторых инвариантных решений уравнений пограничного слоя. Ж. вычислит. матем. и матем. физ., 1961, т. 1, № 2.
6. Spangenberg K. Use of the Action Function to Obtain the General Differential Equations of Space Charge Flow in More Than One Dimension. Journal of the Franklin Institute, 1941, vol. 232, No. 4.
7. Meltzer B. Electron Flow in Curved Paths Under Space — Charge Conditions. The Proceedings of the Physical Society, 1949, vol. 62, No 355B; vol. 62, No. 360B.
8. Walker G. B. Congruent Space Charge Flow. The Proceedings of the Physical Society, 1950, vol. 63, No. 372B.
9. Meltzer B. Single-Component Stationary Electron Flow Under Space Charge Conditions. Journal of Electronics, 1956, vol. 2, No. 2.
10. Kirstein P. T., Kino G. S. Solution to the Equations of Space-Charge Flow by the Method of the Separation of Variables. Journal of Applied Physics, 1958, vol. 29, No. 12.
11. Child C. D. Discharge from Hot CaO. The Physical Review, 1911, vol. 32, No. 5.
12. Fay C. E., Samuel A. L., Shockley W. On the Theory of Space. Charge Between Parallel Plane Electrodes. The Bell System Technical Journal, 1938, vol. 17, No.1.
13. Langmuir J., Blodgett K. B. Currents Limited by Space Charge Between Coaxial Cylinders. The Physical Review, 1923, vol. 22, No. 4.
14. Mueller W. M. Necessary and Sufficient Trajectory Conditions for Dense Electron Beams. Journal of Electronics and Control, 1959, vol. 5, No. 6.
15. Брауде С. Я. Движение электрона в электрическом и магнитном поле с учетом пространственного заряда. ЖЭТФ, 1935, т. 5, вып. 7.
16. Брауде С. Я. К вопросу о действии магнитного поля на пространственный заряд в плоском и цилиндрическом диодах. ЖТФ, 1940, т. 10, вып. 3.
17. Гринберг Г. А. и Волькенштейн В. С. Влияние однородного магнитного поля на движение электронов между коаксиальными цилиндрическими электродами. ЖТФ, 1938, т. 8, вып. 1.
18. Crank J., Hartree D. R., Ingham J., Sloane R. W. Distribution of Potential in Cylindrical Thermoionic Valves. The Proceedings of the Physical Society, 1931, vol. 51, № 288A.
19. Hull A. W. The Paths of Electrons in the Magnetron. The Physical Review, 1924, vol. 23, p. 112.
20. Теория магнетрона (по Бриллюэну). Сб. пер. Соврадио, 1946.
21. Pierce J. R. Rectilinear Electron Flow in Beams. Journal of Applied Physics, 1940, vol. 11, pages 548—554.
22. Lomax R. J. Exact Electrode Systems for the Formation of a Curved Space-Charge Beam. Journal of Electronics and Control, 1957, vol. 3, № 4; 1959, vol. 7, No. 6.