

**ЗАМКНУТЫЕ УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ЖИДКОСТИ
С ПУЗЫРЬКАМИ
(ОБЗОР)**

Р. М. Гарипов

(*Новосибирск*)

Работы по уравнениям движения многофазных сред условно можно разделить на две категории в зависимости от применяемого подхода: феноменологического или кинетического. В данной статье применяется второй подход [1], получены замкнутые (т. е. не содержащие эмпирических констант и функций) уравнения движения смеси жидкости с пузырьками газа или пара в самом простом случае: 1) жидкость невязкая и несжимаемая; 2) поле скоростей жидкости вне пузырьков безвихревое; 3) пузырьки имеют сферическую форму, давление в пузырьке есть заданная функция его радиуса; 4) объемная концентрация пузырьков и среднее расстояние между соседними пузырьками малы. Эти уравнения могут быть основой феноменологических теорий, более полно учитывающих свойства реальных смесей.

Подробно обсуждаются известные замкнутые модели пузырьковых сред [2-8]. Доказывается сходимость метода последовательных приближений для вычисления потенциала скоростей жидкости вне пузырьков. Уравнения движения системы сферических частиц, полученные в работах [9-11], обобщаются на случай пульсирующих пузырьков. В рамках полученных гидродинамических уравнений вычисляется скорость распространения малых возмущений. Решается одномерная задача о распаде начального разрыва, когда с одной стороны поверхности разрыва находится чистая жидкость с постоянным давлением.

Феноменологический подход развивается в статьях [12-14], где имеется также соответствующая библиография.

1. Обсуждение известных моделей. Уравнения движения суспензии пузырьков газа или пара в жидкости можно разделить на две категории: 1) феноменологические уравнения, содержащие кроме характеристик чистых фаз константы или функции для смеси, которые нужно определять из опыта; 2) замкнутые уравнения, которые используют только характеристики отдельных взятых компонент смеси. Будем рассматривать второй тип уравнений. Эти уравнения справедливы в случае малой объемной концентрации газовой фазы смеси. Среднее расстояние l между соседними пузырьками должно быть мало по сравнению с характерным размером потока M , чтобы смесь можно было трактовать как сплошную среду.

Пусть $u_0(x, t)$, $p_0(x, t)$ — скорость и давление жидкости в середине между пузырьками, в остальных точках эти функции определим каким-либо методом интерполяции. Вывод уравнений движения базируется на двух допущениях. Во-первых, u_0 , p_0 считаются регулярными функциями точки $x = (x^1, x^2, x^3)$ пространства и времени t . Функцию $\Phi(x, t)$ считаем регулярной, если

$$|\nabla \Phi| l + |\partial \Phi / \partial t| l / v \ll |\Phi|$$

где v — средняя скорость пузырьков

$$\nabla = (\partial / \partial x^1, \partial / \partial x^2, \partial / \partial x^3)$$

Это допущение справедливо для малых объемных концентраций пузырьков. Во-вторых, индивидуальная траектория центра каждого пузырька

ка $x_i(t)$ предполагается регулярной функцией времени t . Другими словами, скорость пузырька является регулярной функцией его координаты: $v_i(t) = v(x_i, t)$. Функцию $v(x, t)$ определяем в точках $x \neq x_i$ интерполяцией. Это свойство обязано своим происхождением сжимаемости пузырьков. Взаимодействие пузырьков посредством пульсаций носит характер дальнего действия, поэтому можно пренебречь столкновениями данного пузырька с соседними пузырьками, в результате которого его траектория терпит излом, учитывая лишь плавные коллективные воздействия далеких пузырьков. Это свойство не имеет места для суспензии несжимаемых частиц в жидкости, взаимодействие которых является короткодействующим.

Опишем точно класс течений, для которых получены уравнения движения. Укажем на типичный представитель этого класса:

Задача о боржоми. В безграничной идеальной и несжимаемой жидкости имеется N кавитационных пузырьков сферической формы одинакового радиуса r . Эти пузырьки равномерно распределены в шаре диаметром M , расстояние между пузырьками l , объемная концентрация пузырьков c . Давление p^+ во всех пузырьках одинаково и постоянно во времени. Давление на бесконечности равно нулю. В начальный момент времени поле скоростей жидкости равно нулю. Эта ситуация (при $p^+ > 0$) приблизительно имеет место при открывании бутылки с боржоми. Предполагаем, что в процессе движения пузырьки сохраняют сферическую форму, объемная концентрация пузырьков $c \ll 1$ и $l \ll M$. Требуется описать это движение в первом приближении по c и по l . Интересен предельный случай $l = 0$ при $c > 0$.

При $c = 0$ имеем покой, поэтому эффект наличия пузырьков является главным в этой задаче и сказывается в первом приближении по c . Сформулированная задача о боржоми может служить своеобразным тестом для проверки различных моделей пузырьковых сред.

Принимаем следующие гипотезы о рассматриваемых двухфазных течениях:

- 1) жидкость невязкая и несжимаемая с плотностью, равной единице, безграничная, внешние силовые поля имеют потенциал U ,
- 2) движение жидкости безвихревое, на бесконечности скорость и давление жидкости равны нулю;
- 3) пузырьки имеют сферическую форму. Давление в пузырьке есть заданная функция его радиуса $p^+(r)$, одинаковая для всех пузырьков. Допускается частный случай $p^+ = \text{const}$. Плотность газа в пузырьке полагается равной нулю, так как она много меньше плотности капельной жидкости;
- 4) средний радиус пузырьков r и среднее расстояние l между соседними пузырьками удовлетворяют неравенствам

$$r \ll l \ll M$$

где M — характерный размер осредненного течения.

Заметим, что все предположения выполняются в задаче о боржоми.

Отсутствие твердых границ 1) существенно. В условии 3) p^+ — давление с наружной стороны стенки пузырька, которое отличается от давления внутри пузырька при наличии поверхностного натяжения. В силу условий 2), 3) поле скоростей жидкости однозначно определяется координатами центров и радиусами пузырьков x_i, r_i и скоростями их изменения

$$v_i = \frac{dx_i}{dt}, \quad s_i = \frac{dr_i}{dt} \quad (i = 1, \dots, N)$$

Следовательно, движение системы, состоящей из жидкости и пузырьков, определяется конечным числом ($8N$) скалярных параметров. Поэтому эволюция системы во времени описывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений Лагранжа порядка $8N$.

Предположение 4) о малости концентрации газа позволяет выписать эту систему уравнений в явном виде. Из нее видно, что сила взаимодействия двух пузырьков уменьшается с увеличением расстояния d между ними, как d^{-k} , $k \leq 2$. В кинетической теории газов при $k \leq 3$ силы взаимодействия частиц принято называть дальнедействующими. Дальнедействие между пузырьками газа в жидкости возникает благодаря пульсации пузырьков. Это обстоятельство позволяет перейти в системе уравнений Лагранжа к пределу при $N \rightarrow \infty$ и получить гидродинамические уравнения (п. 4). Одномерный вариант задачи о боржоме решается в п. 6.

Этот метод описания движения пузырьковых сред и соответственно новые уравнения движения были предложены автором [1]. Уместно сравнить данные уравнения с уравнениями других авторов. Последние рассматриваются применительно к течениям, удовлетворяющими условиям 1) — 4). Напомним, что здесь не рассматриваются феноменологические уравнения движения пузырьковых сред, содержащие эмпирические константы или функции.

Квазистатическая модель [2, 3]. В этой модели поля скоростей $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ и давлений $p(\mathbf{x}, t)$ предполагаются регулярными вне пузырьков

$$(1.1) \quad \mathbf{u} = \mathbf{u}_0 = \mathbf{v}$$

$$(1.2) \quad p = p_0 = p^+(r)$$

Пусть N — число пузырьков на единицу массы смеси. Тогда плотность смеси

$$(1.3) \quad \langle \rho \rangle = (1 + \frac{4}{3}\pi r^3 N)^{-1}$$

Благодаря предположению (1.1) уравнение неразрывности и уравнение импульсов совпадают с уравнениями для газа. Равенства (1.2) и (1.3) дают уравнение состояния

$$(1.4) \quad p = p^+ (\langle \rho \rangle^{-1} - 1)^{1/3} (\frac{4}{3}\pi N)^{-1/3}$$

Величина N играет роль энтропии, так как сохраняется вдоль траектории пузырьков (жидких частиц).

Уравнения С. В. Иорданского [4]. Рассмотрим подробно метод, предложенный в [4]. Пусть \mathbf{u} , p — скорость и давление в жидкости — функции, определенные вне пузырьков. Давление внутри пузырька Ω_i определим равным $p^+(r_i)$. Определим функцию: $\rho = 1$ и 0 в жидкости и в пузырьках соответственно. Функции ρ , \mathbf{u} , p являются нерегулярными (сильно меняются на расстояниях порядка l), поэтому для экспериментальных измерений представляют интерес их осредненные значения. Определим операцию осреднения

$$\langle F(\mathbf{x}_0, t) \rangle = L^{-3} \int_V F(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x}$$

где V — куб с центром в точке \mathbf{x}_0 и ребром L , $l \ll L \ll M$. Применим операцию осреднения к уравнениям движения невязкой несжимаемой жидкости. Поскольку операции осреднения и дифференцирования перестановочны, то получаем

$$(1.5) \quad \frac{\partial}{\partial t} \langle \rho \rangle + \frac{\partial}{\partial x^\beta} \langle \rho u^\beta \rangle = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle \rho u^\alpha \rangle + \frac{\partial}{\partial x^\beta} (\langle \rho u^\alpha u^\beta \rangle) + \langle p \rangle \delta_{\alpha\beta} = 0 \quad (\alpha = 1, 2, 3)$$

где $\delta_{\alpha\beta}$ — символ Кронекера, по повторяющимся индексам подразумевается суммирование от 1 до 3.

Определим регулярные функции c, u_0, p_0, v, r, s , которыми будем описывать осредненное движение смеси и для которых необходимо получить замкнутую систему уравнений. Выразим через них $\langle \rho \rangle, \langle \rho u^\alpha \rangle, \langle \rho u^\alpha u^\beta \rangle, \langle p \rangle$. Для этого примем следующую структуру течения в области осреднения V :

1) все v_i, r_i, s_i одинаковы в V и соответственно равны

$$v_1(t) = v(x_1, t), r_1(t) = r(x_1, t), s_1(t) = s(x_1, t)$$

число пузырьков в V

$$nL^3 = c(x_0, t) \left(\frac{4}{3} \pi r_1^3 \right)^{-1} L^3$$

где x_0 — центр куба V , x_1 — центр некоторого пузырька в V ;

2) окружим каждый пузырь в V сферой S максимального радиуса R , так что $R \sim l/2$. Вне этих сфер скорость и давление в жидкости будем считать постоянными в пределах V и равными

$$u_0(t) = u_0(x_0, t), p_0(t) = p_0(x_0, t)$$

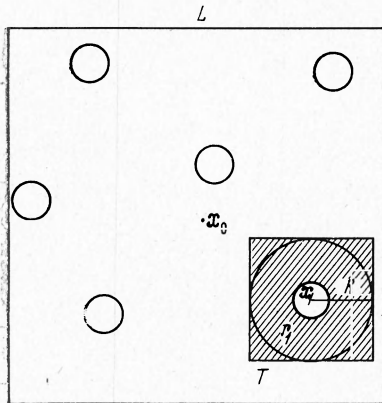
3) внутри каждой области Q между сферой S и поверхностью пузырька поля скоростей и давлений будем считать такими же, как при движении изолированного пузырька в безграничной жидкости со скоростью $u_0(t)$ и давлением $p_0(t)$ на бесконечности.

Находим

$$(1.6) \quad \langle \rho \rangle = 1 - c$$

$$\begin{aligned} \langle \rho u \rangle &= u_0 \left(1 - \frac{4}{3} \pi R^3 n \right) + n \int_Q u \, dx = \\ &= (1 - c) u_0 + \int_Q \nabla \varphi \, dx \end{aligned}$$

Поле скоростей жидкости при движении изолированного пузыря имеет потенциал $u - u_0 = \nabla \varphi$, который определяется в явном виде в п. 2.



Фиг. 1

Интеграл по Q в этом равенстве равен нулю, поэтому

$$(1.7) \quad \langle \rho u \rangle = \langle \rho \rangle u_0$$

Если вместо Q взять область T (заштрихованная область на фиг. 1, на которой показана область осреднения), то интеграл в (1.6) не равен нулю и получим

$$(1.8) \quad \langle \rho u \rangle = \langle \rho \rangle u_0 + k c w$$

где k — некоторое число, $w = v - u_0$.

Аналогично получаем

$$\begin{aligned} (1.9) \quad \langle \rho u^\alpha u^\beta \rangle &= \langle \rho \rangle u_0^\alpha u_0^\beta + c \left((s^2 + \frac{3}{20} |w|^2) \delta_{\alpha\beta} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{20} w^\alpha w^\beta \right) + O(c^{4/3}) \\ \langle p \rangle &= p_0 + c \left(\frac{3}{2} \left(\frac{R}{l} r \right)^2 - 1 \right) r^{-1} \frac{d(r^2 s)}{dt} + \\ &\quad + p^+(r) - p_0 - \frac{3}{2} s^2 - \frac{1}{4} |w|^2 + O(c^{4/3}) \end{aligned}$$

Из предположения 3) получаем уравнения, описывающие движения отдельного пузырька

$$(1.10) \quad \frac{d}{dt}(r^3 \mathbf{w}) = 2r^3 \left(\frac{\partial \mathbf{u}_0}{\partial t} + (\mathbf{u}_0 \cdot \nabla) \mathbf{u}_0 \right) - r^3 (\mathbf{w} \cdot \nabla) \mathbf{u}_0$$

$$(1.11) \quad r \frac{ds}{dt} + \frac{3}{2} s^2 = \frac{1}{4} |\mathbf{w}|^2 + p^+(r) - p_0$$

$$(1.12) \quad \frac{dr}{dt} = s \quad (d/dt = \partial/\partial t + \mathbf{v} \cdot \nabla)$$

где точка обозначает скалярное произведение векторов, $|\mathbf{w}|$ — длину вектора \mathbf{w} .

Уравнение сохранения числа пузырьков имеет вид

$$(1.13) \quad \frac{\partial n}{\partial t} + \partial(nv^{\beta}) / \partial x^{\beta} = 0$$

где n — число пузырьков в единице объема смеси

$$(1.14) \quad n = \frac{3}{4} \pi^{-1} r^{-3} c$$

Уравнения (1.5) — (1.7), (1.9) — (1.14) образуют замкнутую систему. Величина R , точное значение которой нельзя определить теоретически в изложенной схеме, вошла в уравнение в низшей степени по r , c

$$(R/r)^2 \approx (l/r)^2 \approx Kc^{-2/3}$$

где постоянную K можно определить лишь экспериментально. В [5] предполагается

$$(1.15) \quad \langle p \rangle \approx p_0$$

Это недопустимо, если сохранять принятую точность.

Модель Б. С. Козарко [5]. Уравнения работы [5] получаются, если в системе уравнений [4] положить $\mathbf{v} = \mathbf{u}_0$, отбросить противоречащее этому предположению уравнение (1.10) и вместо (1.9) принять допущения (1.15) и

$$(1.16) \quad \langle \rho u^{\alpha} u^{\beta} \rangle \approx \langle \rho \rangle u_0^{\alpha} u_0^{\beta}$$

Уравнения [5] имеют обычную газодинамическую форму, но вместо уравнения состояния берется уравнение радиальной пульсации пузырька. Напишем уравнение пульсации с учетом вязкости жидкости

$$(1.17) \quad r \frac{d^2 r}{dt^2} + \frac{3}{2} \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + 4\nu r^{-1} \frac{dr}{dt} = p^+(r) - p_0$$

где ν — коэффициент кинематической вязкости жидкости.

Позже аналогичные уравнение появились в работах [6-8] и были обобщены с учетом вязкости и теплопроводности жидкости.

В указанных выше моделях кроме гипотез 1) — 4) используются еще дополнительные предположения. Здесь будут использованы только гипотезы 1) — 4). В этом основное различие данного метода от указанных выше. Уравнения работ [4,5] и уравнения данной работы (п. 5) совпадают в случае малых колебаний в окрестности покоя. Можно ли в пределе при $l \rightarrow 0$ и $c > 0$ (например, в задаче о боржоми) получить квазистатическую модель? Нельзя, так как $\mathbf{v} \neq \mathbf{u}_0$. Уравнения [6] в пределе дают квазистатическую модель. Уравнения [4] в пределе не переходят в квазистатические уравнения, но не совпадают и с предельными уравнениями данной работы. Причина заключается в том, что вместо (1.7) нужно брать более общее равенство (1.8). Значение постоянной k в (1.8) нельзя вычислить методом [4]. Ниже вычислено $k = 1/2$ (п. 2).

2. Вычисление потенциала скоростей жидкости. Потенциал скоростей $\Phi(\mathbf{x}, t)$ является гармонической функцией внутри жидкости Ω и на по-

верхности пузырьков Γ_i , удовлетворяет условию обтекания

$$(2.1) \quad \Delta\varphi = 0 \quad \text{в } \Omega, \quad \varphi / \infty = 0 \\ \partial\varphi / \partial n = s_i + \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{n} \quad \text{на } \Gamma_i \quad (i = 1, \dots, N)$$

где \mathbf{n} — вектор нормали к Γ_i , направленный внутрь жидкости.
Будем искать его в виде суммы

$$(2.2) \quad \varphi = \sum_{i=1}^N \varphi_i, \quad \varphi_i = \Phi_i^0 + \Phi_i \\ \Phi_i^0 = -s_i r_i^2 |x - x_i|^{-1} \\ \Delta\Phi_i = 0 \quad \text{вне } \Gamma_i, \quad \Phi_i|_{\infty} = 0, \quad \frac{\partial\Phi_i}{\partial n} = w_i \quad \text{на } \Gamma_i$$

Потенциал можно представить суммой (2.2). Для доказательства этого достаточно установить разрешимость системы интегральных уравнений для N неизвестных функций w_i (w_i определена на Γ_i)

$$(2.3) \quad w_i + \sum_{j \neq i} \frac{\partial\Phi_j}{\partial n} \Big|_{\Gamma_i} = \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{n} - \sum_{j \neq i} \frac{\partial\Phi_j^0}{\partial n} \Big|_{\Gamma_i} \equiv f_i$$

Теорема 2.1. Пусть $R_0 > 0$, $0 < C_0 < 1$. Предположим, что

$$r_i \geq R_0 \quad (i = 1, \dots, N) \\ r_i + r_j \leq C_0 |x_i - x_j| \quad (i, j = 1, \dots, N)$$

все пузырьки находятся внутри некоторого шара диаметром M .

Тогда существует такое число C , не зависящее от R_0 , C_0 , что при

$$C_0^3 \ln(MC_0 / R_0) < C$$

система интегральных уравнений (2.3) имеет непрерывное решение, причем единственное, при любых s_i , \mathbf{v}_i . Это решение может быть получено методом последовательных приближений и удовлетворяет неравенству

$$(2.4) \quad \|w_i\| \leq (C - C_0^3 \ln(MC_0 / R_0))^{-1} \max_j \|f_j\|$$

где

$$\|w_i\|^2 \equiv r_i^{-2} \int_{\Gamma_i} |w_i|^2 dS$$

Доказательство. Пусть $C_0 \leq 1/2$. Так как $\sum_{j \neq i} \varphi_j$ есть гармоническая функция внутри Γ_i , то, проинтегрировав i -е уравнение (2.3) по Γ_i , получим

$$(2.5) \quad \int_{\Gamma_i} w_i dS = \int_{\Gamma_i} f_i dS = 0$$

При этом условии из формулы Пуассона для решения задачи Неймана вне шара вытекает существование числа $C_1 < \infty$, с которым выполнены неравенства

$$(2.6) \quad |\Phi_i| \leq C_1 r_i^3 / 2 |x - x_i|^{-2} \|w_i\| \\ |\nabla\Phi_i| \leq C_1 r_i^3 |x - x_i|^{-3} \|w_i\| \quad \text{при } |x - x_i| \geq 2r_i$$

Решение системы (2.3) будем искать в классе функций с конечной нормой

$$\|w\| = \max_i \|w_i\|$$

Из (2.5) и (2.6) получаем

$$\max_{\Gamma_i} \left| \sum_{j \neq i} \frac{\partial \Phi_j}{\partial n} \right| \leq 8C_1 \sum_{j \neq i} r_j^3 |x_i - x_j|^{-3} \|w\|$$

Поэтому норма интегрального оператора в системе уравнений (2.3) не превышает

$$(2.7) \quad C_2 = 8C_1 \max_i \sum_{j \neq i} r_j^3 |x_i - x_j|^{-3}$$

Найдем верхнюю границу суммы (2.7) при всевозможных распределениях пузырьков, удовлетворяющих всем предположениям теоремы. Второе предположение означает, что если увеличить радиусы пузырьков в C_0^{-1} раз, то они не должны пересекаться. Поэтому сумма (2.7) будет наибольшей при плотной упаковке шаров радиуса $C_0^{-1} r_j$. Тогда эта сумма не превысит верхней интегральной суммы Дарбу интеграла по области $r_i C_0^{-1} \leq |x - x_i| \leq M$

$$\frac{3}{4} \pi^{-1} C_0^3 \int |x - x_i|^{-3} dx \leq 3C_0^3 \ln(MC_0/R_0)$$

При достаточно малых $C_0^3 \ln(MC_0/R_0)$ норма интегрального оператора (2.3) становится меньше единицы. Отсюда вытекают все утверждения теоремы.

Теорема доказана.

Объемная концентрация пузырьков $c \leq C_0$, так что C_0 является верхней границей допустимых концентраций. Наибольшие допустимые значения c медленно убывают при $M/R_0 \rightarrow \infty$, поэтому будем применять разложение (2.2) и в случае $M/R_0 = \infty$.

Пусть $\{P_{m,\alpha}(x)\}$ — ортонормированная на сфере $|x| = 1$ система однородных гармонических полиномов, m — степень полинома, $1 \leq \alpha \leq \leq 2m + 1$. Функцию w_i разложим в ряд Фурье

$$(2.8) \quad w_j = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{\alpha=1}^{2m+1} w_i^{m,\alpha} P_{m,\alpha}(n)$$

Здесь в силу (2.5) отсутствует нулевая гармоника. Напишем равенство Парсеваля

$$(2.9) \quad \|w_i\|^2 = \sum_{m=1}^{\infty} |w_i^m|^2, \quad |w_i^m|^2 = \sum_{\alpha=1}^{2m+1} |w_i^{m,\alpha}|^2$$

Легко найти

$$(2.10) \quad \Phi_i = \sum_{m=1}^{\infty} \Phi_i^m$$

$$\Phi_i^m(x, t) = -r_i^{m+2} / (m+1) \sum_{\alpha=1}^{2m+1} w_i^{m,\alpha} P_{m,\alpha}(x - x_i) |x - x_i|^{-2m-1}$$

Оценим $w_i^{m,\alpha}$.

Для этого умножим i -е уравнение (2.3) на $P_{k,\alpha}(n)$ и проинтегрируем по Γ_i . По определению

$$w_i^{k,\alpha} = r_i^{-2} \int_{\Gamma_i} w_i P_{k,\alpha}(n) dS$$

Преобразуем интеграл

$$A_{ijm}^{k,\alpha} = r_i^{-2} \int_{\Gamma_i} \partial \Phi_j^m / \partial n P_{k,\alpha}(n) dS$$

Гармоническую функцию Φ_j^m разложим в ряд Тейлора в шаре $|x - x_i| \leq R_j < |x_j - x_i|$

$$(2.11) \quad \Phi_j^m(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{|\beta|=k} \frac{1}{\beta!} \nabla^\beta \Phi_j^m(x_i, t) (x - x_i)^\beta$$

где $\beta = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ — векторный индекс

$$|\beta| = \beta_1 + \beta_2 + \beta_3, \quad \beta! = \beta_1! \beta_2! \beta_3!,$$

$$\nabla^\beta = (\partial / \partial x^1)^{\beta_1} (\partial / \partial x^2)^{\beta_2} (\partial / \partial x^3)^{\beta_3}$$

степень вектора $(x - x_i)^\beta$ определяется аналогично. Внутренняя сумма ряда (2.11) есть однородный гармонический полином P_k степени k аргумента $x - x_i$. Согласно тождеству Эйлера для однородных функций

$$\frac{\partial P_k}{\partial n} = r_i^{-1} (x^\alpha - x_i^\alpha) \frac{\partial P_k}{\partial x^\alpha} = k r_i^{-1} P_k \quad \text{на } \Gamma_i$$

Отсюда, учитывая, что два однородных гармонических полинома разной степени ортогональны на сфере, получим

$$(2.12) \quad A_{ijm}^{k,\alpha} = k r_i^{k-1} \int_{|\mathbf{y}|=1} \sum_{|\beta|=k} \frac{1}{\beta!} \nabla^\beta \Phi_j^m(x_i, t) y^\beta P_{k,\alpha}(y) dy$$

По равенству Парсеваля

$$(2.13) \quad |A_{ijm}^k| = k r_i^{k-1} |\nabla^k \Phi_j^m(x_i, t)|$$

$$|\nabla^k \Phi(x)|^2 \equiv \int_{|\mathbf{y}|=1} \left| \sum_{|\beta|=1} \frac{1}{\beta!} \nabla^\beta \Phi(x)^\beta y \right|^2 dy$$

Возведем обе части равенства (2.11) в квадрат и проинтегрируем по сфере $|x - x_i| = R_j$. В силу ортогональности членов ряда (2.11)

$$(2.14) \quad R_j^{2k+2} |\nabla^k \Phi_j^m(x_i, t)|^2 \leq \int_{|x-x_i|=R_j} |\Phi_j^m|^2 dS$$

Так как Φ_j^m — однородная функция $x - x_j$ степени $-m - 1$, то

$$(2.15) \quad |\Phi_j^m(x, t)| \leq |x - x_j|^{-m-1} \sqrt{\frac{2m+1}{4\pi}} \frac{r_j^{m+2}}{m+1} |w_j^m|$$

Для доказательства этого неравенства нужно оценить Φ_j^m через интеграл от ее квадрата по сфере $|x - x_j| = 1$, который выражается через $|w_j^m|$ в силу (2.10).

Из неравенств (2.14), (2.15) следует:

$$(2.16) \quad |\nabla^k \Phi_j^m(x_i, t)| \leq \sqrt{3/8} |w_j^m| (r_j^{m+2} / (m+1)) R_j^{-m-k-1}$$

$$0 < R_j \leq |x_j - x_i| / 2, \quad k \geq 0, \quad m \geq 0$$

Согласно (2.9), (2.13) — (2.16)

$$(2.17) \quad \sum_{m=1}^{\infty} |A_{ijm}^k| \leq \sqrt{3/8} k r_i^{k-1} r_j^3 R_j^{-k-2} \|w_j\|, \quad R_j \geq 2r_j$$

Полагая здесь $R_j = |x_j - x_i| / 2$, получим искомые оценки

$$(2.18) \quad |w_i^k| \leq |f_i^k| + \sqrt[3]{\frac{8}{3}} \max_j \|w_j\| k (2r/l)^{k+2} S_{k+2} \\ (k \geq 1; i = 1, \dots, N)$$

где r — средний радиус пузырьков, l — среднее расстояние между соседними пузырьками

$$S_m = \max_i \sum_{j \neq i} (l / |x_i - x_j|)^m$$

Величины $\|w_i\|$ удовлетворяют неравенствам (2.4). Оценим суммы S_m интегралом. Так как в единице объема находится в среднем l^{-3} пузырьков, то имеем

$$(2.19) \quad S_m \sim (M/l)^{3-m} \quad (m = 1, 2), \quad S_3 \sim \ln(M/l), \quad S_m \sim 1 \quad (m \geq 4)$$

Воспользовавшись (2.13), (2.16) при $m = 0$, $w_i^{\alpha, \alpha} = \sqrt[3]{4\pi s_i}$, получим

$$(2.20) \quad |f_i^k| \leq \sqrt[3]{4\pi/3} |v_i| \delta_{ik} + \sqrt[3]{3\pi/2} \max_j |s_j| k (2r/l)^{k+1} S_{k+1} \\ \|f_i\| \leq \sqrt[3]{4\pi/3} |v_i| + \text{const} \max_j |s_j| r^2 l^{-3} M$$

где $\text{const} < \infty$, если $2r/l < 1$; $\delta_{ii} = 1$, $\delta_{ik} = 0$ при $i \neq k$.

Выпишем уравнение для определения $w_i^{1, \alpha}$

$$(2.21) \quad w_i^\alpha \equiv \sqrt[3]{3/(4\pi)} w_i^{1, \alpha} = v_i^\alpha - \partial \Phi_i'(\mathbf{x}_i, t) / \partial x^\alpha \\ \left(\Phi_i' = \sum_{j \neq i} \Phi_j; \alpha = 1, 2, 3; i = 1, \dots, N \right)$$

Отсюда и в силу (2.16), (2.18)

$$(2.22) \quad w_i = v_i - \nabla (\Phi_i^{\alpha'} + \Phi_i^{1'}) |_{x_i} + O(s + v^{1/3})$$

где s, v — характерные значения $s_i, |v_i|$ соответственно; $\Phi_i^{m'}$ — сумма Φ_j^m по индексу $j \neq i$.

Вычислим предел φ при $l \rightarrow 0$ ($c > 0, s/r \neq \infty$). Необходимо определить класс допустимых распределений пузырьков, для которых существует предел φ , не зависящий от конкретного распределения из этого класса. Укажем два крайних примера таких классов: 1) допускаются произвольные распределения. В этом случае не существует предела, одинакового для всех распределений; 2) равномерное распределение, при котором пузырьки находятся на одинаковом расстоянии один от другого. Этот класс не содержит распределения пузырьков в реальных течениях, в которых расстояние между пузырьками меняется в процессе движения.

Зададим класс допустимых распределений регулярными функциями $r'(\mathbf{x}, t) > 0, s'(\mathbf{x}, t), w(\mathbf{x}, t), c(\mathbf{x}, t)$, определенными в области с пузырьками G

$$(1) \quad r_i = r_0 r'(\mathbf{x}_i, t), \quad s_i = r_0 s'(\mathbf{x}_i, t), \quad w_i = w(\mathbf{x}_i, t) \\ (i = 1, \dots, N)$$

(2) Разобьем область G на кубики g одинакового объема $L^3, L = r_0 a, \frac{2}{3} < a < 1$. Число пузырьков в кубике g

$$c(\mathbf{x}, t) / (4\pi/3 r'(\mathbf{x}, t)^3) (L/r_0)^3, \quad \mathbf{x} \in g$$

В пределах g эти пузырьки могут быть расположены произвольно, в частности могут сгруппироваться все вместе.

Теорема 2.2. При условиях (1) и (2)

$$(2.23) \quad \max_{x \in \Omega} |\varphi(x, t) - \Phi(x, t)| \leq \text{const } r_0^{3a-2}, \quad 2/3 < a < 1$$

где const зависит лишь от максимумов функций r' , s' , w , c , максимумов их первых производных по x и минимума r' в G

$$(2.24) \quad \Phi(x, t) = \frac{3}{4\pi} \int_G c(y, t) \left(-\frac{s'(y, t)}{r'(y, t)} + 1/2 w(y, t) \nabla \right) |x - y|^{-1} dy$$

Доказательство. Обозначим $\Phi^m = \sum_{i=1}^N \Phi_i^m$. Докажем, что $\Phi^0 + \Phi^1$ сходится к интегралу (2.24), а $\Phi^m \rightarrow 0$ при $r_0 \rightarrow 0$ при $m \geq 2$.

Для оценки разности интеграла (2.24) и $\Phi^0 + \Phi^1$ разобьем область с пузырьками G на кубики g объема L^3 , как сказано в условии (2), так, чтобы точка x была центром некоторого кубика g_0 . Значения интеграла по $g \neq g_0$ и суммы $\sum_{x_i \in g} (\Phi_i^0 + \Phi_i^1)$ находятся в общем интервале, следовательно,

$$(2.25) \quad \text{const } L^3 L \max_{y \in g} (|x - y|^{-2} + |x - y|^{-3})$$

Далее

$$\left| \int_{g_0} \right| \leq \text{const } L$$

Так как

$$(2.26) \quad |\Phi_i^m| \leq \text{const } r_0 \text{ в } \Omega$$

то

$$\left| \sum_{x_i \in g_0} (\Phi_i^0 + \Phi_i^1) \right| \leq \text{const } (L/r_0)^3 r_0$$

Отсюда, просуммировав (2.25) по всем $g \neq g_0$, получим, что

$$(2.27) \quad |\Phi - \Phi^0 - \Phi^1| \leq \text{const } (L \ln(M/L) + L + L^3 r_0^{-2})$$

Оценим Φ^m , $m \geq 2$

$$\left| \sum_{x_i \in g_0} \Phi_i^m + \sum_g \sum_{x_i \in g} \Phi_i^m \right| \leq \text{const } (L^3 r_0^{-2} + \max_i |w_i^m| r_0^{m-1} J)$$

$$J = L^3 \sum_{g \neq g_0} \max_{y \in g} |x - y|^{-m-1} \leq \text{const} \begin{cases} \ln L^{-1}, & m = 2 \\ L^{-m+2}, & m > 2 \end{cases}$$

Так как в оценке (2.18) для $|w_i^m|$ не входит параметр r_0 , то, подставив сюда и в выражения (2.27) $L = r_0^a$, $2/3 < a < 1$, получим неравенство (2.23).

Теорема доказана.

Скорость $\nabla \varphi$ не сходится при $l \rightarrow 0$ (т. е. $r_0 \rightarrow 0$) равномерно по $x \in \Omega$. Можно доказать лишь ее ограниченность. Поэтому ограничим далее класс рассматриваемых распределений пузырьков. Предположим, что

(3) почти для всех пузырьков

$$\nabla \varphi_i'(x, t) \rightarrow \nabla \Phi(x, t) \text{ при } l \rightarrow 0, x \in \Omega_i$$

где Ω_i — шар радиуса r_i с центром x_i .

Теорема 2.3. При условиях (1) — (3) для любой гладкой финитной, т. е. равной нулю вне некоторого шара и вне конечного интервала времени, функции $\psi(\mathbf{x}, t)$ справедливо равенство

$$(2.28) \quad \int ((1-c) \partial\psi / \partial t + (\nabla\Phi + 1/2 c\mathbf{w}) \nabla\psi) d\mathbf{x} dt = 0$$

Доказательство. Имеем тождество

$$(2.29) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{\Omega} (\partial\psi / \partial t - \Phi\Delta\psi) d\mathbf{x} - \int_{\Gamma} \varphi \partial\psi / \partial n dS \right) dt = 0$$

где Γ — поверхность всех пузырьков.

Перейдем к пределу при $r_0 \rightarrow 0$.

Из (2.23) вытекает

$$(2.30) \quad \int_{\Omega} (\partial\psi / \partial t - \Phi\Delta\psi) d\mathbf{x} \rightarrow \int (\partial\psi / \partial t - \Phi\Delta\psi) (1-c) d\mathbf{x}$$

Преобразуем

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_i} \varphi \frac{\partial\psi}{\partial n} dS &= \int_{\Omega_i} (\nabla\varphi_i' \nabla\psi + \varphi_i' \Delta\psi) d\mathbf{x} + \\ &+ \int_{\Gamma_i} \left(-s_i r_i - 1/2 r_i \mathbf{w}_i \cdot \mathbf{n} + \sum_{m=2}^{\infty} \Phi_i^m \right) \frac{\partial\psi}{\partial n} dS \end{aligned}$$

Разлагая ψ по формуле Тейлора в окрестности точки \mathbf{x}_i и учитывая свойства ортогональности сферических функций, получаем

$$(2.31) \quad \int_{\Gamma_i} \varphi \frac{\partial\psi}{\partial n} dS = \int_{\Omega_i} (\nabla\varphi_i' \nabla\psi + \varphi_i' \Delta\psi) d\mathbf{x} - \frac{4\pi}{3} r_i^3 \mathbf{w}_i \nabla\psi(\mathbf{x}_i, t) + O(r_i^4)$$

Далее в силу (2.26), (2.23)

$$\varphi_i'(\mathbf{x}, t) \rightarrow \Phi(\mathbf{x}, t) \text{ при } r_0 \rightarrow 0, \mathbf{x} \in \Omega_i$$

Отсюда и из (2.23), (3), (2.31) следует:

$$(2.32) \quad \int_{\Gamma} \varphi \frac{\partial\psi}{\partial n} dS \rightarrow \int ((\nabla\Phi - 1/2 \mathbf{w}) \nabla\psi + \Phi\Delta\psi) c d\mathbf{x}$$

Проинтегрировав (2.30), (2.32) по времени t , согласно (2.29) получим равенство (2.28).

Теорема доказана.

Из тождества (2.28) получим следующее выражение для потока массы смеси:

$$(2.33) \quad \langle \rho \nabla\varphi \rangle \rightarrow \langle \rho \rangle \nabla\Phi + 1/2 c \mathbf{w} \text{ при } l \rightarrow 0$$

3. Уравнения движения системы пузырьков. Так как состояние движения жидкости с пузырьками сферической формы однозначно определяется значениями $8N$ числовых параметров $\mathbf{x}_i, \mathbf{v}_i, r_i, s_i$ ($i = 1, \dots, N$), то ее эволюция во времени описывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений Лагранжа [9]. Чтобы выписать в явном виде эти уравнения при большом числе пузырьков, необходимо дополнительное предположение о малости их объемной концентрации. В случае, когда радиусы всех пузырьков одинаковы и постоянны во времени (т. е. рассматриваются несжимаемые шарики одинакового радиуса), это сделано в [10, 11].

Предположение о сферической форме пузырьков выполняется приближенно. В действительности, пузырьки имеют несферическую форму, заранее неизвестную, которую нужно определить в процессе решения задачи. Поэтому, строго говоря, состояние движения жидкости с пузырьками нельзя задать конечным числом параметров. Оказывается, что справедлива следующая теорема.

Теорема 3.1. Уравнения движения Лагранжа являются конечномерной галеркинской аппроксимацией точной задачи, при которой остается справедливым закон сохранения энергии.

Доказательство. Сформулируем сначала точную задачу.

Давление p_i ($i = 1, \dots, N$) внутри i -го пузырька будем считать постоянным по его объему и заданным. Согласно интегралу Коши — Лагранжа это дает граничное условие

$$(3.1) \quad \partial\varphi / \partial t + 1/2 |\nabla\varphi|^2 + p_i - \kappa K + U = 0 \text{ на } \Gamma_i' (i = 1, \dots, N)$$

где κ — постоянная поверхностного натяжения, K — кривизна поверхности Γ_i , $K(x) > 0$ ($x \in \Gamma_i$), если Γ_i выпукла в окрестности точки x . Должно быть выполнено также кинематическое условие непроницаемости стенок пузырьков

$$(3.2) \quad \partial\varphi / \partial n = v_n \text{ на } \Gamma = \bigcup_{i=1}^N \Gamma_i$$

где v_n — нормальная скорость стенок пузырьков. Задача состоит в определении поверхности Γ и потенциала скоростей $\varphi(x, t)$ — гармонической вне Γ (в Ω) функции, $\varphi|_{\infty} = 0$, которые удовлетворяли бы граничным условиям (3.1) и (3.2).

Для любой гладкой поверхности Γ , зависящей от времени, и для любой гармонической функции φ , $\varphi|_{\infty} = 0$, определенной вне Γ , имеем тождество

$$(3.3) \quad \frac{d}{dt} T \equiv \frac{d}{dt} \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla\varphi|^2 dx = - \int_{\Gamma} \left(\frac{\partial\varphi}{\partial t} \frac{\partial\varphi}{\partial n} + \frac{1}{2} |\nabla\varphi|^2 v_n \right) dS$$

где T — кинетическая энергия жидкости. Если Γ , φ удовлетворяют граничным условиям (3.1) и (3.2), т. е. являются решением задачи, то из (3.3) получаем закон сохранения энергии

$$(3.4) \quad \frac{d}{dt} T = \sum_{i=1}^N \left(p_i \frac{d}{dt} V_i - \kappa \frac{d}{dt} S_i + \int_{\Gamma_i} U v_n dS \right)$$

где S_i , V_i — площадь поверхности и объем i -го пузыря. Здесь использованы равенства

$$(3.5) \quad \frac{d}{dt} V_i = \int_{\Gamma_i} v_n dS, \quad \frac{d}{dt} S_i = \int_{\Gamma_i} K dS$$

Ограничим класс рассматриваемых поверхностей Γ и потенциалов φ . При этом необходимо отказаться от точного выполнения граничных условий, но закон сохранения энергии (3.4) нарушен не будет.

Поверхность Γ будем считать заданной (фиксированной) функцией конечного числа параметров $q = (q_1, \dots, q_M)$ (обобщенных координат), не зависящей явно от времени t . Изменение Γ во времени происходит только за счет изменения q . При фиксированных q нормальная скорость поверхности Γ будет линейной функцией обобщенных скоростей q_j'

$$(3.6) \quad v_n = \sum_{j=1}^M \chi_j(x, q) q_j', \quad x \in \Gamma, \quad q_j' \equiv \frac{dq_j}{dt}$$

Если пузырьки предполагать сферическими, то в качестве q_{4i-3} , q_{4i-2} , q_{4i-1} , q_{4i} нужно взять координаты центра и радиус i -го пузырька. В этом случае $M = 4N$ и

$$(\chi_{4i-3}, \chi_{4i-2}, \chi_{4i-1}, \chi_{4i}) = (n, 1) \text{ на } \Gamma_i, 0 \text{ на } \Gamma_k (k \neq i)$$

Условие обтекания (3.2) будем выполнять точно, т. е. в каждой точке поверхности Γ . Тогда потенциал скоростей

$$(3.7) \quad \varphi(\mathbf{x}, t) = \sum_{j=1}^M \psi_j(\mathbf{x}, q) q_j', \quad \Delta \psi_j = 0 \text{ в } \Omega, \quad \psi_j|_{\infty} = 0, \\ \frac{\partial \psi_j}{\partial n} = \chi_j \text{ на } \Gamma$$

Граничное условие (3.1) не может быть выполнено в каждой точке поверхности Γ . Его можно удовлетворить в среднем в следующем смысле. Возьмем M линейно-независимых функций $\chi_1^*(\mathbf{x}, t), \dots, \chi_M^*(\mathbf{x}, t)$, $\mathbf{x} \in \Gamma$ и положим

$$(3.8) \quad \sum_{i=1}^N \int_{\Gamma_i} (\partial \varphi / \partial t + 1/2 |\nabla \varphi|^2 + p_i - \kappa K + U) \chi_j^* dS = 0 \quad (j = 1, \dots, M)$$

Получим M уравнений для определения M неизвестных функций времени $q(t)$. В этом состоит метод Галеркина. При слабых ограничениях на функции χ_j^* (система функций $\{\chi_j^*\}$ должна быть полной) система уравнений (3.8) при $M = \infty$ эквивалентна граничному условию (3.1). При $M < \infty$ имеем конечномерную аппроксимацию задачи.

Систему функций $\{\chi_j^*\}$ выберем исходя из того, чтобы закон сохранения энергии (3.4) не нарушался. Равенство (3.8) выполняется для любой линейной комбинации функций $\chi_1^*, \dots, \chi_M^*$, т. е. для любой функции χ^* из линейного множества X с базисом $\{\chi_1^*, \dots, \chi_M^*\}$. Для справедливости закона сохранения энергии (3.4) при условии (3.2) необходимо и достаточно, чтобы равенство (3.8) было выполнено для любой нормальной скорости $\chi^* = \partial \varphi / \partial n$ из рассматриваемого класса. При фиксированном q скорости $\partial \varphi / \partial n$ образуют M -мерное линейное множество (3.7), которое должно совпадать, следовательно, с X , т. е.

$$(3.9) \quad \chi_j^* = \chi_j \quad (j = 1, \dots, M)$$

Убедимся, что равенства (3.7) — (3.9) эквивалентны системе уравнений Лагранжа

$$(3.10) \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial q_j'} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = \sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial q_j} \left(p_i V_i - \kappa S_i + \int_{\Omega_i} U dx \right) \quad (j = 1, \dots, M)$$

Согласно (3.5) имеем

$$(3.11) \quad \sum_{i=1}^N \int_{\Gamma_i} (p_i - \kappa K + U) \chi_j dS = \sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial q_j} \left(p_i V_i - \kappa S_i + \int_{\Omega_i} U dx \right)$$

В работе [9] (стр. 505) доказано, что для произвольной функции $q(t)$ при условиях (3.7) справедливы тождества

$$(3.12) \quad \int_{\Gamma} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + 1/2 |\nabla \varphi|^2 \right) \chi_j dS = - \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial q_j'} + \frac{\partial T}{\partial q_j} \quad (j = 1, \dots, M)$$

Из (3.11) и (3.12) вытекают уравнения Лагранжа (3.10). Теорема доказана.

Поскольку установлено, что уравнения движения Лагранжа N сферических пузырьков являются конечномерной ($4N$ -мерной) аппроксимацией точной задачи, то возможны различные модификации этих уравнений при одной и той же размерности аппроксимации $4N$. Неудобство аппроксимации Лагранжа состоит в том, что потенциал скоростей нужно вычислять как решение задачи Неймана (3.7), что не всегда возможно сделать в явном виде. Поэтому в сумме (3.7) гармонические функции $\psi_j(\mathbf{x}, q)$ можно задать априори, а вместо коэффициентов q_j' ввести новые переменные q_j^* . Тогда условие обтекания (3.2) можно выполнить в среднем, что даст уравнения для определения q_j^* через q_j' .

Будем рассматривать далее уравнения Лагранжа (3.10) для пузырьков сферической формы. В качестве обобщенных координат выберем координаты центров и радиусы пузырьков. Найдем приближенное выражение для кинетической энергии, предполагая, что объемная концентрация пузырьков $c \ll 1$ и $s = O(r)$.

Положим

$$\varphi = \varphi_i + \varphi_i', \quad \varphi_i = \sum_{m=0}^{\infty} \Phi_i^m$$

Учитывая, что φ_i' — гармоническая функция внутри Γ_i , получим

$$(3.13) \quad 2T = - \int_{\Gamma} \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n} dS = - \sum_{i=1}^N \left(\int_{\Gamma_i} \left(\varphi_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial n} + \varphi_i \frac{\partial \varphi_i'}{\partial n} + \varphi_i' \frac{\partial \varphi_i}{\partial n} \right) dS + \int_{\Omega_i} |\nabla \varphi_i'|^2 d\mathbf{x} \right)$$

Отбросим в сумме φ_i сферические гармоники Φ_i^m порядка $m \geq 2$. Возникающую при этом погрешность δ в интеграле по Γ_i преобразуем и оценим с помощью неравенств (2.16) и (2.18)

$$(3.14) \quad |\delta| \leq \sum_{m=2}^{\infty} \frac{r_i^3}{m+1} (|w_i^m|^2 + |w_i^m| |\nabla^m \varphi_i'(\mathbf{x}_i, t)| r_i^{m-1}) = O(r^3 c^3)$$

Так как $\nabla \varphi_i' = O(c)$ на Ω_i , то с ошибкой $O(c^3)$ в равенстве (3.13) пренебрежем интегралами по Ω_i . Тогда

$$(3.15) \quad 2T = \sum_{i=1}^N \left(\frac{2\pi}{3} r_i^3 (|w_i|^2 - w_i \cdot \nabla \varphi_i'(\mathbf{x}_i, t)) + 4\pi r_i^2 (r_i s_i^2 - s_i \varphi_i'(\mathbf{x}_i, t)) \right) + O(c^3)$$

Согласно (2.14) заменим здесь $w_i = v_i - \nabla \varphi_i'(\mathbf{x}_i, t)$. Получим выражение для кинетической энергии

$$(3.16) \quad 2T = \sum_{i=1}^N \left(\frac{2\pi}{3} r_i^3 (|v_i|^2 - \frac{3}{2} v_i \cdot \nabla \varphi_i'(\mathbf{x}_i, t)) + 4\pi r_i^2 (r_i s_i^2 - s_i \varphi_i'(\mathbf{x}_i, t)) \right) + O(c^3)$$

В силу (2.22), (2.16) и (2.18) в формуле (3.16), не ухудшая ее точности, положим

$$(3.17) \quad \varphi_i'(\mathbf{x}, t) \approx \sum_{j \neq i} (-r_j^2 s_j + \frac{1}{2} r_j^3 v_j \cdot \nabla) |\mathbf{x} - \mathbf{x}_j|^{-1}$$

Тогда

$$(3.18) \quad \begin{aligned} \partial T / \partial v_i &= (2\pi/3)r_i^3 (v_i - 3\nabla\varphi_i'(\mathbf{x}_i, t)) \\ \partial T / \partial s_i &= 4\pi r_i^2 (r_i s_i - \varphi_i'(\mathbf{x}_i, t)) \\ \partial T / \partial \mathbf{x}_i &= -2\pi\nabla(r_i^3 v_i \cdot \nabla\varphi_i'(\mathbf{x}_i, t) + 2r_i^2 s_i \varphi_i'(\mathbf{x}_i, t)) \\ \partial T / \partial r_i &= 4\pi r_i^2 (1/4 |\mathbf{v}_i|^2 - 3/2 v_i \cdot \nabla\varphi_i'(\mathbf{x}_i, t) + 3/2 s_i^2 - \\ &\quad - (2s_i / r_i)\varphi_i'(\mathbf{x}_i, t)) \end{aligned}$$

Вычислим правые части уравнений (3.10)

$$(3.19) \quad (\partial / \partial r_i) (p_i V_i - \kappa S_i) = 4\pi r_i^2 (p_i - 2\kappa / r_i) \equiv 4\pi r_i^2 p^+(r_i)$$

Производные по всем \mathbf{x}_j и остальным r_j ($j \neq i$) равны нулю. При малых радиусах пузырьков

$$(3.20) \quad \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_i} \int_{\Omega_i} U dx \approx \frac{4\pi}{3} r_i^3 \nabla U(\mathbf{x}_i, t), \quad \frac{\partial}{\partial r_i} \int_{\Omega_i} U dx \approx 4\pi r_i^2 U(\mathbf{x}_i, t)$$

(если $\Delta U = 0$, то эти равенства верны для произвольных r_i), производные по \mathbf{x}_j , r_j ($j \neq i$) равны нулю.

Подставив выражения (3.18) — (3.20) в (3.10), получим искомую систему уравнений движения N пузырьков

$$(3.21) \quad \begin{aligned} d\mathbf{x}_i / dt &= \mathbf{v}_i \\ d\mathbf{v}_i / dt + (3s_i / r_i) (\mathbf{v}_i - \nabla\varphi_i'(\mathbf{x}_i, t)) - (3\nabla\partial / \partial t)\varphi_i'(\mathbf{x}_i, t) &= \\ &= 2\nabla U(\mathbf{x}_i, t) \\ \partial r_i / \partial t &= s_i \\ r_i \frac{ds_i}{dt} + \frac{3}{2} s_i^2 &= \frac{\partial}{\partial t} \varphi_i'(\mathbf{x}_i, t) - \frac{1}{2} \mathbf{v}_i \cdot \nabla\varphi_i'(\mathbf{x}_i, t) + \\ &+ \frac{1}{4} |\mathbf{v}_i|^2 + p^+(r_i) + U(\mathbf{x}_i, t) \quad (i = 1, \dots, N) \end{aligned}$$

4. Гидродинамические уравнения. В выражении (3.17) для $\varphi_i'(\mathbf{x}, t)$ заменим \mathbf{v}_i на \mathbf{w}_i . При этом точность приближения (при $c \ll 1$) не ухудшится, и применим предположения (1) — (3) п. 2. Тогда предел $\varphi_i'(\mathbf{x}_i, t)$ при $l \rightarrow 0$ совпадает с $\Phi(\mathbf{x}_i, t)$ (2.24). В уравнениях (3.21) заменим φ_i' значением Φ в окрестности \mathbf{x}_i . Для этого нужно предположить, что

(4) почти для всех пузырьков

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \varphi_i'(\mathbf{x}_i, t) &\rightarrow \frac{\partial}{\partial t} \Phi(\mathbf{x}_i, t), \\ \frac{\nabla\partial}{\partial t} \varphi_i'(\mathbf{x}_i, t) &\rightarrow \frac{\nabla\partial}{\partial t} \Phi(\mathbf{x}_i, t) \quad \text{при } l \rightarrow 0 \end{aligned}$$

Согласно (2.24) функция Φ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$(4.1) \quad \nabla((1 - 3c/2)\nabla\Phi + 3/2 c\mathbf{v}) = 3cs/r$$

и условию

$$\Phi|_{\infty} = 0$$

Из уравнений (3.21) в пределе в предположениях (1) — (4) получим

$$(4.2) \quad d\mathbf{v} / dt + 3s(\mathbf{v} - \nabla\Phi) / r - 3\nabla(\partial\Phi / \partial t + 1/2 |\nabla\Phi|^2) = 2\nabla U$$

$$(4.3) \quad \begin{aligned} \partial\Phi / \partial t + 1/2 |\nabla\Phi|^2 + 1/4 |\mathbf{v} - \nabla\Phi|^2 + p^+(r) + U - \\ - r_0^2 - (rds / dt + 3/2 s^2) = 0 \end{aligned}$$

$$(4.4) \quad dr / dt = s \quad (d/dt = \partial / \partial t + \mathbf{v} \cdot \nabla)$$

Здесь $r' = r/r_0$, $s' = s/r_0$ обозначены через r , s , так что r , s в этих уравнениях не малы, $r_0 \ll M$ — характерный радиус пузырьков. Сюда добавлены также некоторые члены порядка c^2 (в (4.2) — $3/2 |\nabla\Phi|^2$, в (4.3) $3/4 |\nabla\Phi|^2$). Это не ухудшает принятую точность приближения. Это сделано для того, чтобы уравнения были инварианты относительно преобразования Галилея (см. ниже). Слагаемое порядка r_0^2 оставлено только со старшей производной, потому что только оно является существенным при $r_0 \rightarrow 0$.

Уравнение сохранения числа пузырьков имеет вид

$$(4.5) \quad dc/dt + c\nabla \cdot \mathbf{v} = 3cs/r$$

Уравнения (4.1) — (4.5) представляют собой замкнутую систему гидродинамических уравнений.

Исключая s из (4.1) и (4.5), получим

$$(4.6) \quad \partial c / \partial t - \nabla \cdot ((1 - 3c/2) \nabla \Phi + 1/2 c \mathbf{v}) = 0$$

которое равносильно тождеству (2.28). В силу (2.33) уравнение (4.6) является уравнением неразрывности.

Полагая в уравнении (4.2) $r_0 = 0$, получим предельные уравнения. Функция $p^+(r)$ либо должна быть постоянной, либо зависеть от $r' = r/r_0$.

Изучим некоторые общие свойства системы уравнений (4.1) — (4.5).

Выполнение неравенств $r > 0$, $c > 0$. По физическому смыслу переменных должно быть $r \geq 0$, $c \geq 0$, $c \leq 1$. Из уравнения (4.5) следует, что если $|s/r| < \infty$ и $c \neq 0$ в некоторой точке \mathbf{x}_0 в момент времени t_0 , то $c \neq 0$ вдоль всей траектории пузырька (т. е. линии $d\mathbf{x}/dt = \mathbf{v}$), проходящей через \mathbf{x}_0 . Далее, исключив s из уравнений (4.1) и (4.4), получим

$$dr/dt = r\nabla \cdot \mathbf{N} / 3c; \quad \mathbf{N} = (1 - 3c/2)\nabla\Phi + 3/2 c\mathbf{v}$$

Поэтому, если $|\nabla \cdot \mathbf{N}| / (3c) < \infty$ и $r \neq 0$ в некоторой точке, то $r \neq 0$ вдоль всей траектории пузырька, проходящей через эту точку. На гладких решениях, на которых ограничены s/r и $\nabla \cdot \mathbf{N} / (3c)$, неравенства $c > 0$ и $r > 0$ выполняются при всех $t > 0$, если их начальные значения положительны.

Неравенство $c \leq 1$ не гарантируется, если $\mathbf{v} \neq \nabla\Phi$. Пузырькам «разрешено» перемещаться относительно жидкости, поэтому они могут скапливаться, образуя кавитационные полости. Гидродинамические уравнения будут справедливы вне этой полости.

Преобразование Галилея и растяжение. Уравнения (4.1) и (4.5) не меняют своего вида при замене переменных

$$(4.7) \quad \mathbf{x} = \mathbf{a}t + \mathbf{x}', \quad \Phi = \mathbf{a} \cdot \mathbf{x} - 1/2 |\mathbf{a}|^2 t + b + \Phi', \quad \mathbf{v} = \mathbf{a} + \mathbf{v}'$$

остальные переменные t , s , r , c не меняются, где \mathbf{a} , b — произвольные постоянные. Эта замена переменных называется преобразованием Галилея и в физическом отношении соответствует переходу к системе координат, движущейся относительно исходной с постоянной скоростью \mathbf{a} .

При $p^+(r) \equiv \text{const}$ уравнения (4.1) — (4.5) инварианты относительно группы растяжений:

$$(4.8) \quad \mathbf{x} = a\mathbf{x}', \quad t = at', \quad \Phi = a\Phi', \quad r = ar'$$

переменные \mathbf{v} , s , c не меняются, a — произвольная постоянная.

Тип системы. Система уравнений (4.1) — (4.5) квазилинейна. Уравнение ее характеристик $\theta(\mathbf{x}, t) = 0$ имеет вид (при $r_0 > 0$)

$$(4.9) \quad r\mu^2 |\nabla\theta|^2 ((1 + 3c)\mu^2 - 9c\mathbf{w} \cdot \nabla\theta\mu + 9/2 c (\mathbf{w} \cdot \nabla\theta)^2) = 0$$

$$\mu = \partial\theta / \partial t + \mathbf{v} \cdot \nabla\theta, \quad \mathbf{w} = \mathbf{v} - \nabla\Phi$$

Квадратный трехчлен относительно μ в скобке имеет отрицательный дискриминант, если $\mathbf{w} \cdot \nabla \theta \neq 0$ и

$$(4.10) \quad 0 < c < 2/3$$

и, следовательно, не равен нулю. Поэтому при условии (4.10) и $r > 0$ имеются вещественные характеристики

$$(4.11) \quad \partial \theta / \partial t + \mathbf{v} \cdot \nabla \theta = 0 \quad (\text{кратности } 2)$$

$$(4.12) \quad |\nabla \theta| = 0 \quad (\text{кратности } 2)$$

и две комплексные различные характеристики при $\mathbf{w} \neq 0$, которые при $\mathbf{w} = 0$ становятся вещественными и сливаются с (4.11).

Система уравнений (4.1) — (4.5) смешанного типа. Многообразие $\mathbf{w} = 0$ является особым. Заметим, что \mathbf{w} есть скорость перемещения пузырьков относительно жидкости.

Предельные уравнения при $r_0 = 0$ в одномерном случае преобразуем: уравнение (4.3) проинтегрируем по x и исключим s с помощью уравнения (4.1). Условие гиперболичности полученной системы имеет вид

$$(4.13) \quad -3/2 < w^{-2} r dp^+(r) / dr < \beta_0(c)$$

Функция $\beta_0(c)$ определена в п. 5.

5. Скорость распространения малых возмущений. Пусть имеем постоянное течение при отсутствии внешних сил ($U \equiv 0$)

$$(5.1) \quad \Phi = \mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{x}, \quad \mathbf{v} = 0, \quad s = 0, \quad r = 1, \quad c = c_0 \\ p^+(1) = -3/4 |\mathbf{u}_0|^2$$

Более общий случай, когда $\mathbf{v} = \mathbf{v}_0$, сводится к (5.1) преобразованием Галилея (4.7). Линеаризуем систему уравнений (4.1) — (4.5) в окрестности решения (5.1). Положим

$$\Phi = \mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{x} + \Phi', \quad r = 1 + r', \quad c = c_0 (1 + c') \\ p^+(r) = p^+(1) - br'$$

Получим (штрих опускаем)

$$(5.2) \quad (A - 3/2)\Delta \Phi + 1/2 \nabla \cdot \mathbf{v} - s - 1/2 \mathbf{u}_0 \cdot \nabla c = 0 \\ -3 \nabla (\partial \Phi / \partial t + \mathbf{u}_0 \cdot \nabla \Phi) + \partial \mathbf{v} / \partial t - 3 \mathbf{u}_0 s = 0 \\ \partial \Phi / \partial t + 3/2 \mathbf{u}_0 \cdot \nabla \Phi - 1/2 \mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{v} - r_0^2 \partial s / \partial t - br = 0 \\ -s + r_t = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{v} - 3s + \partial c / \partial t = 0 \\ (A = 1 / (3c_0) + 1)$$

Будем рассматривать синусоидальные волны, бегущие вдоль оси координат x^1

$$(5.3) \quad \begin{pmatrix} \Phi \\ \mathbf{v} \\ s \\ r \\ c \end{pmatrix} = \text{Re} \begin{pmatrix} \Phi_1 / i \\ \mathbf{v}_1 \\ is_1 \\ r_1 \\ c_1 \end{pmatrix} e^{i(kx^1 + \omega t)}$$

Подставив это выражение в (5.2), получим систему линейных однородных алгебраических уравнений для Φ_1, \dots, c_1 . Для существования ненулевых решений вида (5.3) нужно приравнять нулю определитель этой системы

$$Q(k, \omega) = 0$$

Далее рассмотрим два частных случая.

1. $u_0^1 = 0$, т. е. направление скорости волны возмущения перпендикулярно скорости основного потока (5.1). Можно вычислить

$$(5.4) \quad Q = \omega^4 (\omega^2 + Ak^2 (r_0^2 \omega^2 - b - {}^{3/2} |u_0|^2)) = 0$$

Отсюда получаем фазовую скорость волны возмущения

$$(5.5) \quad \lambda = \omega / k = (A (b + {}^{3/2} |u_0|^2 - r_0^2 \omega^2))^{1/2}$$

При $u_0 = 0$ это выражение совпадает с формулой в модели [5].

Все корни ω уравнения (5.4) вещественны при любом (вещественном) k . Следовательно, поток (5.1) устойчив к таким возмущениям.

2. $u_0^2 = u_0^3 = 0$, т. е. скорость распространения волны возмущения параллельна скорости основного потока (5.1). Обозначим $u_0^1 = u_0$. Вычислим

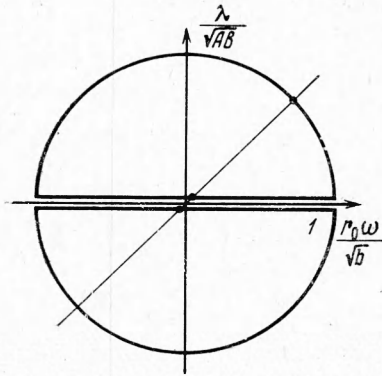
$$(5.6) \quad Q = \omega^2 (\omega^4 - (3A/2 + 3)u_0^2 k^2 \omega^2 - {}^{3/2} u_0^3 k^3 \omega - (b - r_0^2 \omega^2) (Ak^2 \omega^2 + 3u_0 k^3 \omega + {}^{3/2} u_0^2 k^4))$$

Это многочлен шестой степени относительно ω . Он имеет нулевой корень кратности два, другие четыре его корня найдем, приравняв нулю второй сомножитель

$$(5.7) \quad (\lambda^2 - 3u_0^2/2)^2 - (b + 3u_0^2/2 - r_0^2 \omega^2)(A\lambda^2 + 3u_0 \lambda + {}^{3/2} u_0^2) = 0$$

Если пара чисел λ, u_0 является корнем уравнения (5.7), то $-\lambda, -u_0$ тоже будут его корнями. Поэтому достаточно рассмотреть случай $u_0 \geq 0$.

При $u_0 = 0$ график функции $\lambda = \lambda(\omega)$ приведен на фиг. 2. По этому графику можно найти частоту ω как функцию k . Из фигуры видно, что для любого k имеется четыре вещественных корня (два из них равны нулю).



Фиг. 2

Пусть $u_0 > 0$. Из уравнения (5.7) выразим ω через λ . При $0 < c_0 < {}^{2/3}$, $u_0 \neq 0$ имеет место неравенство $A\lambda^2 + 3u_0 \lambda + 3u_0^2/2 > 0$ для всех λ . Поэтому для таких значений c_0 имеем четыре различных случая в зависимости от параметра $\beta = bu_0^{-2}$.

1. $\infty > \beta \geq \beta_1(c_0)$. При всех k имеется два вещественных (и, следовательно, два комплексно-сопряженных) корня ω (фиг. 3).

2. $\beta_1(c_0) > \beta \geq \beta_0(c_0) \approx 3/(1 + 3c_0)$ (при $c_0 \ll 1$). Если $k_1 \leq |k| \leq k_2$, то имеем четыре вещественных корня, если $|k| \notin [k_1, k_2]$, то только два (фиг. 4).

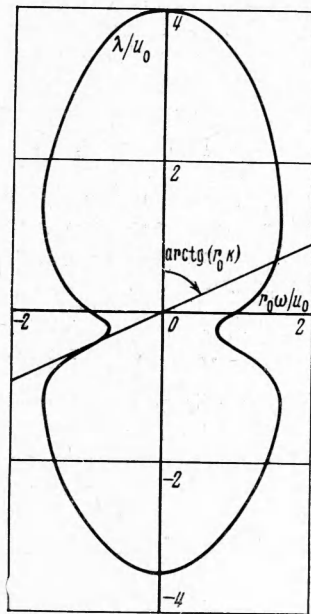
3. $\beta_0(c_0) > \beta \geq 0$. При $|k| \leq k_2$ имеем четыре вещественных корня ω , а при $|k| > k_2$ — только два (фиг. 5).

4. $0 > \beta \geq -{}^{3/2}$. Этот случай может иметь место благодаря силам поверхностного натяжения в пузырьках. При $|k| \leq k_2$ имеется четыре вещественных корня ω , при $k_2 < |k| \leq k_3$ — только два, а при $|k| > k_3$ — ни одного (фиг. 6).

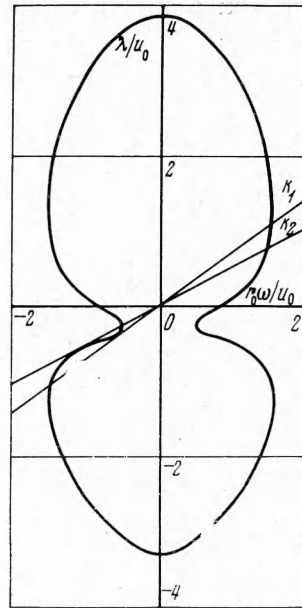
При $\beta < -{}^{3/2}$ нет ни одного вещественного корня ω .

На фиг. 3–6 приведены графики $\lambda(\omega)$ при $c_0 = 0.1$ и $\beta = 1, 0.75, 0.25, -1$ соответственно.

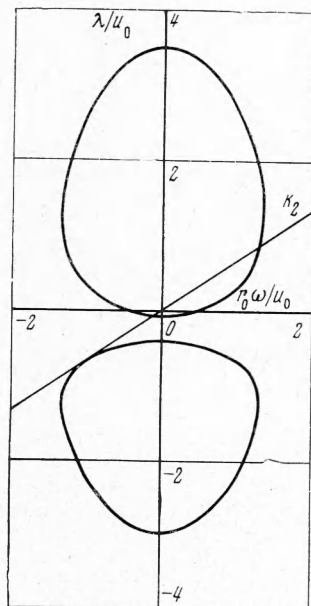
На фиг. 7 изображен график $\omega(k)$ при $k \geq 0$ для значений $c_0 = 0.1, \beta = 0.75$. При $k < 0$ $\omega(k) = -\omega(-k)$.



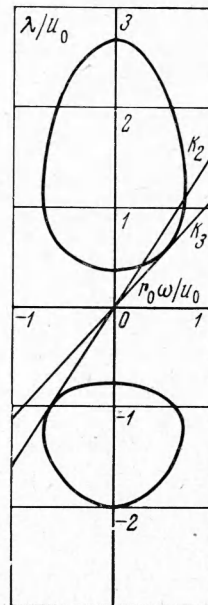
Фиг. 3



Фиг. 4



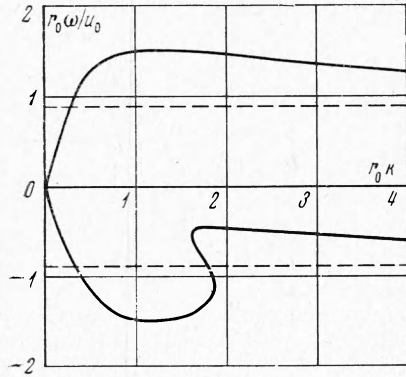
Фиг. 5



Фиг. 6

Таким образом, при $r_0 > 0$ поток (5.1) неустойчив по отношению к коротковолновым возмущениям, при $\beta > \beta_0(c_0)$ — и к длинноволновым. При $r_0 = 0$ поток (5.1) устойчив, если $-\frac{3}{2} \leq \beta \leq \beta_0(c)$, и неустойчив, если $\beta > \beta_0$ или $\beta < -\frac{3}{2}$. Гидродинамические уравнения (4.1) — (4.5) выведены в предположении, что длина волны $\gg r_0$. Поэтому к выводу о неустойчивости потока при коротковолновых возмущениях следует подходить, имея ввиду это ограничение.

6. Одномерная задача «о боржоми». Решим задачу о боржоми, сформулированную в п. 1 в одномерном случае, когда скорость пузырьков параллельна оси $x^1 = x$ и все величины зависят только от x и t . Пусть при $x < X(t)$ имеем «чистую» неподвижную жидкость с постоянным



Фиг. 7

давлением p_- , так что потенциал скоростей в ней равен $-p_-t$; $X(t)$ — граница раздела между чистой жидкостью и смесью, которую предстоит определить. Предположим, что при $x = \infty$ имеем постоянное течение, давление в котором равно нулю

$$\begin{aligned} \Phi_t &\rightarrow 0, \quad \Phi_x \rightarrow u_0, \quad v \rightarrow v_0, \quad r \rightarrow 1, \\ c &\rightarrow c_0 \quad \text{при } x \rightarrow +\infty \end{aligned}$$

где индексы обозначают соответствующие производные.

Движение происходит за счет начальной скорости и за счет перепада давлений. Предположим, далее, что $p^+(r) \equiv \text{const}$. Рассмотрим предельные

уравнения при $r_0 = 0$. Тогда из системы (4.1) — (4.5) легко получить замкнутую систему уравнений для функций $v, w = v - \Phi_x, c$. Для этого уравнение (4.3) (с $r_0 = 0$) нужно продифференцировать по x . Приведем окончательный вид этой системы

$$(6.1) \quad \begin{pmatrix} v \\ w \\ c \end{pmatrix}_t + B \begin{pmatrix} v \\ w \\ c \end{pmatrix}_x = 0$$

$$B = \begin{pmatrix} v + w/c & (3 - 1/c)w & 3w^2/(2c) \\ (1 + 1/c)w & v + (3/2 - 1/c)w & 3w^2/(2c) \\ -1 + c & 1 - 3c/2 & v - 3w/2 \end{pmatrix}$$

Запишем начальные при $t = 0, x > X$ и граничные при $t > 0, x = X$ условия

$$(6.2) \quad v = v_0, \quad w = w_0 (= v_0 - u_0), \quad c = c_0, \quad X = 0$$

При $l > 0$ функция $\Phi_i'(x, t)$ — непрерывная функция x . Согласно теореме 2.2 потенциал Φ является равномерным по x пределом Φ_i' при $l \rightarrow 0$. Следовательно, потенциал Φ должен быть непрерывен на границе раздела

$$\Phi(X + 0, t) = -p_-t$$

Продифференцируем это равенство по t и подставим значение Φ_t в уравнение (4.3) с ($r_0 = 0$)

$$(6.3) \quad -X'(v - w) + 1/2(v - w)^2 + 1/4w^2 = p_- - p^+ \equiv p_1 \\ (X' = (d/dt)X, \quad p^+ = -1/2(v_0 - w_0)^2 - 1/4w_0^2)$$

Далее из тождества (2.28) получаем уравнения сохранения массы

$$(6.4) \quad (1 - 3c/2)(v - w) + 1/2cv = -cX'$$

Предположим, что на границе раздела пузырьки не зарождаются и не исчезают, поэтому

$$(6.5) \quad X' = v$$

Рассмотрим автомодельное решение. Задача (6.1) — (6.5) определения неизвестных v, w, c, X допускает группу растяжений (4.8), поэтому

ее решение можно искать в виде

$$(6.6) \quad v = v(\lambda), w = w(\lambda), c = c(\lambda), \lambda = x/t, X = Dt$$

Для функций v, w, c получаем систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$(6.7) \quad (B - \lambda) \frac{d}{d\lambda} \begin{pmatrix} v \\ w \\ c \end{pmatrix} = 0 \quad \text{при } \lambda > D$$

Начальные условия (6.2) имеют следствием

$$(6.8) \quad v \rightarrow v_0, w \rightarrow w_0, c \rightarrow c_0 \quad \text{при } \lambda \rightarrow \infty$$

Граничные условия (6.3) — (6.5) при $\lambda = D$ принимают вид

$$(6.9) \quad v = (1 - 3c/2)w, \quad w = \pm 2(p_1 / (1 + 6c - 9/2 c^2))^{1/2}, \quad D = v$$

Так как

$$1 + 6c - 9/2 c^2 > 0 \quad \text{при } 0 < c < 2/3$$

то для существования решения необходимо

$$(6.10) \quad p_1 = p_- + 1/2(v_0 - w_0)^2 + 1/4 w_0^2 > 0$$

Решение дифференциального уравнения (6.7) либо имеет вид

$$(6.11) \quad \begin{pmatrix} v \\ w \\ c \end{pmatrix} = \text{const}$$

(либо должно быть

$$(6.12) \quad \det(B - \lambda) = (\lambda - v)^3 - 1/2 w^2 (9 + c^{-1}) (\lambda - v) - 9/2 w^3 = 0$$

При

$$w \neq 0, \quad 0 < c < c_* = (9(\sqrt[3]{3/2} - 1))^{-1} \approx 0.74$$

уравнение (6.12) имеет три различных вещественных корня (собственные числа матрицы B)

$$(6.13) \quad \lambda_i = v + w k_i(c) \quad (i = 1, 2, 3)$$

где $k_i(c)$ — корни уравнения

$$k^3 - (9/2 + 1/2 c^{-1})k - 9/2 = 0$$

(они зависят только от c). При $0 < c < c_*$

$$k_1 < k_* = -(3/2)^{2/3} < k_2 < 0, \quad 0 < k_3$$

Собственному числу λ_i соответствует собственный вектор матрицы B

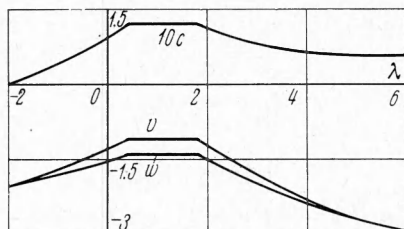
$$(6.14) \quad r_i = \begin{pmatrix} k_i + 3/2 \\ k_i + 1 \\ (-k_i^2 + k_i + 3)c / (wk_i) \end{pmatrix}$$

Наряду с постоянным решением (6.11) система уравнений (6.7) имеет три семейства решений, соответствующих трем собственным числам λ_i матрицы B

$$(6.15) \quad dv / r_i^1 = dw / r_i^2 = dc / r_i^3, \quad \lambda = \lambda_i(v, w, c)$$

Решения (6.11), (6.15) удобно изобразить графически в фазовом пространстве независимых переменных v, w, c ; решению (6.11) соответствует точка, (6.15) — три семейства непересекающихся (внутри семейства) линий. Общему решению системы (6.7) соответствует непрерывная линия, состоящая из кусков линий (6.15), вдоль которой параметр λ не убывает (но может терпеть разрывы).

Рассмотрим граничные условия (6.9). Первые два из них определяют линию K в фазовом пространстве независимых переменных v, w, c . Эту линию нужно соединить с точкой (v_0, w_0, c_0) решением системы (6.7), при этом должно быть $D \leq \lambda$ на K . Отсюда, из (6.13) и из третьего условия (6.9) получаем, что при $w_0 > 0$, к линии K может примыкать лишь



Фиг. 8

третье семейство (6.15), и с нее нельзя перейти к линиям первого и второго семейств, на которых значения λ меньше. Решение задачи единственно, но существует не при всех v_0, w_0, c_0, p_1 . Множество точек (v_0, w_0, c_0) , для которых существует решение, заполняет некоторое множество на поверхности, зависящей от p_1 . Аналогично при $w_0 < 0$ к линии K могут примыкать лишь решения (6.15) первого или второго семейства. Решение единственно, но существует, если точка (v_0, w_0, c_0) (при фиксированном p_1) лежит внутри некоторой области.

Причина несуществования решения может быть трех родов: 1) нельзя удовлетворить условиям на границе раздела; 2) нельзя удовлетворить условиям на бесконечности (в частности, условию $w|_{\infty} = 0$); 3) нарушается условие $c \leq 1$. В первом случае нужно допустить на границе раздела возникновение и схлопывание пузырьков. Во втором случае нужно рассмотреть систему уравнений с $r_0 > 0$ (для нее тоже имеется автомодельное решение). В третьем — нужно учесть кавитационную полость.

На фиг. 8 приведены графики решения задачи для начальных значений $v_0 = w_0 = -2.89$, $c_0 = 0.058$ и $p_- = -1.08$ ($p_1 = 1$).

Автор благодарит В. К. Кедринского, Л. В. Овсянникова, С. С. Кутателадзе и Б. С. Когарко за обсуждение работы и внимание к ней.

Поступила 11 VI 1973

ЛИТЕРАТУРА

1. Когарко В. С., Гарипов Р. М. Движение смеси жидкости с газовыми пузырьками. Аннотации докладов Международного Симпозиума по неустановившимся течениям воды с высокими скоростями, Л., 1971. М., «Наука», 1971.
2. Mallock A. The damping of sound by frothy liquids. Proc. Roy. Soc., Ser. A, 1910, vol. 84, pp. 394—359.
3. Akeret J. Experimentelle und theoretische Untersuchungen uber Hohraumbildung (Kavitation) im Wasser.— Forschung Gebiete Ingenieurwesen, 1930, Jrg. 1.
4. Иорданский С. В. Об уравнениях движения жидкости, содержащей пузырьки газа. ПМТФ, 1960, № 3, стр. 102—110.
5. Когарко В. С. Об одной модели кавитирующей жидкости. Докл. АН СССР, 1961, т. 137, № 6, стр. 1331—1333.
6. Van Wijngaarden L. On the equations of motion for mixtures of liquid and gas bubbles. J. Fluid Mech., 1968, vol. 33, pt. 3, pp. 465—674.
7. Бэтчелор Г. К. Волны сжатия в суспензии газовых пузырьков в жидкости. Механика. Период. сб. перев. иностр. статей, 1968, № 3.
8. Кедринский В. К. Распространение возмущений в жидкости, содержащей пузырьки газа. ПМТФ, 1968, № 4.
9. Милл-Томсон Л. М. Теоретическая гидромеханика. М., «Мир», 1964.
10. Головин А. М., Левич В. Г., Толмачев В. В. Гидродинамика системы пузырей в жидкости малой вязкости. ПМТФ, 1966, № 2, стр. 63—71.
11. Головин А. М. Уравнения Лагранжа для системы пузырей в жидкости малой вязкости. ПМТФ, 1967, № 6, стр. 20—27.
12. Крайно А. Н., Нигматулин Р. И., Старков В. К., Стернин Л. Е. Механика многофазных сред. Итоги науки и техники. Сер. гидромехан., 1972, т. 6, стр. 93—174.
13. Кузнецов Б. Г. Об уравнениях гидродинамики многофазных систем. Численные методы механики сплошной среды, 1973, т. 4, № 1, стр. 56—70.
14. Прокофьев В. В. Задача о движении жидкости и газовых пузырьков с учетом их относительного перемещения. Изв. АН СССР, МЖГ, 1972, № 3, стр. 87—96.