ТУРБУЛЕНТНЫЙ ПОГРАНИЧНЫЙ СЛОЙ ПЛОСКОЙ ПЛАСТИНЫ

Г. Л. Гродзовский (*Москва*)

Ряд известных расчетных формул для коэффициента сопротивления турбулентного трения C_f пластины выведен на основе логарифмического закона Прандтля для профиля скорости u в пограничном слое, который хорошо совпадает с результатами измерения в трубах. Однако при обтекании плоской пластины логарифмический профиль не совпадает с экспериментальным для внешней части пограничного слоя [1].

ля определения формы профиля скорости вблизи границы пограничного слоя применим метод, используемый при решении задач свободной турбулентности. Условие подобия скоростей запишем в виде

$$\frac{u}{u_0} = f\left(\frac{y}{\delta_*}\right) = f(\eta) \qquad \left(\delta_* = \delta_*(x) = \int_0^\delta \left(1 - \frac{u}{u_0}\right) dy\right) \tag{1}$$

Здесь δ_* — толщина вытеснения. Вводим функцию тока ψ следующим образом (коэффициент A будет выбран ниже):

$$\psi = A\delta_* F(\eta), \qquad u = \frac{\partial\psi}{\partial y} = AF', \qquad v = -\frac{\partial\psi}{\partial x} = A\delta_{*x}' (F'\eta - F) \tag{2}$$

(Производные по x будем обозначать штрихом с индексом x внизу, производные по η штрихом без индекса).

Уравнение движения (пренебрегая вязкостью) представим в виде

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial\tau}{\partial y} = -A^2\delta_{*x}' F''F \tag{3}$$

Выражение для касательного напряжения турбулентного трения τ принимаем по Прандтлю (при этом получается простое аналитическое решение) [2]

$$\tau = \rho l^2 \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 \tag{4}$$

(l — путь смешения)

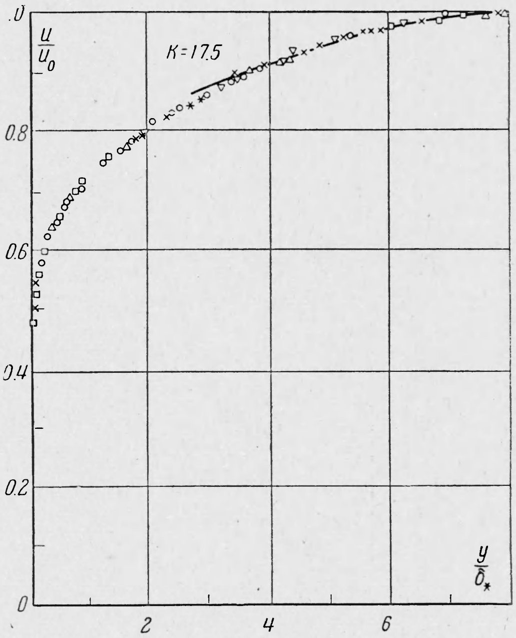
Из условия подобия профиля скорости (1) следует необходимость существования зависимости

$$\frac{l}{\delta_* \sqrt{\delta_{*x}'}} = \Phi(\eta) \tag{5}$$

где $\Phi(\eta)$ — некоторая функция от η, не зависящая (при условии подобия профиля скорости) от числа Рейнольдса R_x (см. также [3]). Такая зависимость была обнаружена экспериментально Никурадзе [1].

Согласно (3) — (5) уравнение для $F(\eta)$ будет иметь вид

$$-FF'' = \frac{d}{d\eta}[\Phi(\eta) F'']^2 \tag{6}$$



Фиг. 1

Вблизи границы пограничного слоя профиль скорости можно определить, принимая, как и в задачах свободной турбулентности $\Phi(\eta) = \mathrm{const}$. При $\Phi(\eta) = k$ уравнение (6) совпадает с известным уравнением для турбулентного размывания свободной границы плоского потока (см., например, [4])

$$F + 2k^2 F''' = 0 \quad \text{или} \quad F + \frac{d^3F}{d\eta_*^3} = 0 \tag{7}$$

Здесь

$$\eta_* = \alpha_1(\eta - \eta_\Gamma) \qquad (\alpha_1 = (2k^2)^{-1/3}) \tag{8}$$

где η_Γ соответствует внешней границе, т. е. толщине пограничного слоя.

Решение уравнения (7) будет следующее:

$$F = c_1 e^{-\eta_*} + e^{\eta_*/2}\left(c_2 \cos\frac{\sqrt{3}}{2}\eta_* + c_3 \sin\frac{\sqrt{3}}{2}\eta_*\right) \tag{9}$$

В выражении (2) принимаем $A = u_0 / \alpha_1$; при этом

$$\frac{u}{u_0} = -c_1 e^{-\eta_*} + \frac{1}{2} e^{\eta_*/2}\left(c_2 \cos\frac{\sqrt{3}}{2}\eta_* + c_3 \sin\frac{\sqrt{3}}{2}\eta_*\right) + $$
$$+\frac{\sqrt{3}}{2} e^{\eta_*/2}\left(-c_2 \sin\frac{\sqrt{3}}{2}\eta_* + c_3 \cos\frac{\sqrt{3}}{2}\eta_*\right) \qquad (10)$$

Для определения трех постоянных интегрирования и связи η_Γ с экспериментальной константой k воспользуемся следующими четырьмя граничными условиями

1) $u = u_0$, или $F' = 1.0$ при $\eta_* = 0$

2) $\dfrac{du}{dy} = 0$, или $F'' = 0$ при $\eta_* = 0$

3) $v = 0$, или $F = 0$ при $\eta = 0$, $\eta_* = -\alpha_1\eta_\Gamma$

(4) $\delta_* = \int\limits_0^\delta \left(1 - \dfrac{u}{u_0}\right) dy$, $\alpha_1 = \int\limits_{-\alpha_1\eta_\Gamma}^{0} (1 - F')\, d\eta_*$

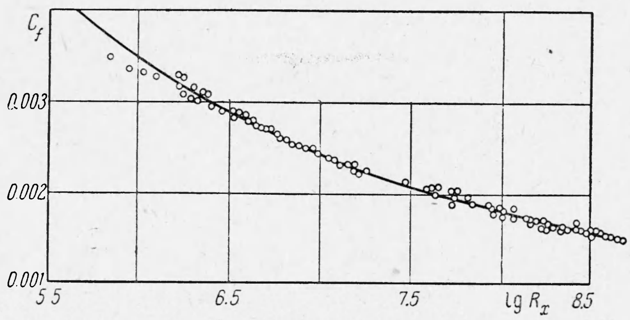
Отсюда $F = \alpha_1\eta_\Gamma - \alpha_1$ при $\eta_* = 0$ или $v_\Gamma / u_0 = \delta_{*x}'$. В результате получим

$$c_1 = \frac{1}{3}(\alpha_1\eta_\Gamma - \alpha_1 - 1), \qquad c_2 = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}(\alpha_1\eta_\Gamma - \alpha_1), \qquad c_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} \qquad (11)$$

$$\alpha_1 = \frac{(1 - \alpha_1\eta_\Gamma)\exp(3\alpha_1\eta_\Gamma/2) + \sqrt{3}\sin(\sqrt{3}\alpha_1\eta_\Gamma/2) - (1 + 2\alpha_1\eta_\Gamma)\cos(\sqrt{3}\alpha_1\eta_\Gamma/2)}{-2\cos(\sqrt{3}\alpha_1\eta_\Gamma/2) - \exp(3\alpha_1\eta_\Gamma/2)} \qquad (12)$$

По опытам [1] вблизи границы пограничного слоя $k \approx 17.5$. На фиг. 1 приведено сопоставление экспериментальных профилей скорости (для значений числа Рейнольдса R_x от $1.67 \cdot 10^6$ до $17.9 \cdot 10^6$) с расчетным при $k = 17.5$, расчетный профиль хорошо согласуется с экспериментом на участке пограничного слоя от внешней границы примерно до середины толщины пограничного слоя.

Определим соотношение полученных значений экспериментальной константы k и значений констант, определенных в задачах свободной турбулентности. Для сравнения рассмотрим, в каких пределах изменяется константа $\gamma = l/\delta$, представляющая собой отношение пути смешения к толщине пограничного слоя, в случае обтекания пластины и в задачах свободной турбулентности.



Фиг. 2

Для пластины имеют место следующие соотношения:

$$\gamma = \frac{l}{\delta} = \frac{k\sqrt{\delta_{*x}'}}{\eta_\Gamma}$$

$$\delta_{*x}' = \frac{C_f}{2}\frac{\delta_*}{\delta_{**}} = 0.66 C_f$$

При изменении значений коэффициента трения C_f от 0.002 до 0.004 экспериментальная константа γ по опытам на пластине будет изменяться от 0,069 до 0.098.

В случае турбулентного размывания свободной границы плоского потока константа γ связана с константой свободной турбулентности a соотношением (см., например, [2])

$$\gamma = \frac{l}{\delta} = \frac{\sqrt{a}}{4.27}$$

где a по экспериментальным данным [2,3] изменяется от 0.0825 до 0.12 и соответственно величина γ изменяется от 0.068 до 0.081.

Таким образом, диапазон изменения γ в случае обтекания пластины и для задач свободной турбулентности практически совпадает.

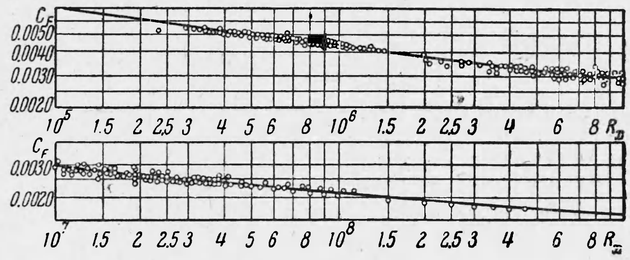
Для данных фиг. 1 отношения основных кинематических параметров внешней части турбулентного пограничного слоя пластины были равны

$$\frac{\delta_*}{\delta_{**}} = 1.32, \qquad \frac{\delta_*}{\delta_p} = 0.143 \qquad \left(\delta_{**} = \int\limits_0^\delta \frac{u}{u_0}\left(1 - \frac{u}{u_0}\right) dy\right) \qquad (13)$$

Здесь δ_{**} — толщина потерь импульса.

Используя рассмотренные характеристики внешней части пограничного слоя и характеристики логарифмического профиля для внутренней части слоя (непосредственно вблизи пластины), можно получить следующие приближенные формулы для расчета местного C_f и полного C_F коэффициентов трения пластины в зависимости от числа Рейнольдса

$$C_f \approx \frac{0.0905}{(\lg 0.125 R_x)^2}, \qquad C_F \approx \frac{0.0905}{(\lg 0.0355 R_x)^2} \tag{14}$$



Фиг. 3

Из фиг. 2 и 3 следует, что приведенные формулы (сплошные кривые) хорошо согласуются с результатами экспериментов для значений числа R_x от $0.23 \cdot 10^6$ до $435.0 \times \times 10^6$.

Поступила 24 II 1962

ЛИТЕРАТУРА

1. Nikuradse J. Turbulente Reibungsschichten an der Platte. Herausgegeben von ZWB der Lftf.— Forsch. 1942.
2. Абрамович Г. Н. Турбулентные свободные струи жидкостей и газов. Госэнергоиздат, 1948.
3. Goldstein S. Modern developments in fluid dynamics. London, 1943.
4. Лойцянский Л. Г. Аэродинамика пограничного слоя. ГИТТЛ, 1941.

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ СТАЦИОНАРНОГО ВРАЩЕНИЯ КАРУСЕЛЬНОГО ГИДРОКАНАЛА

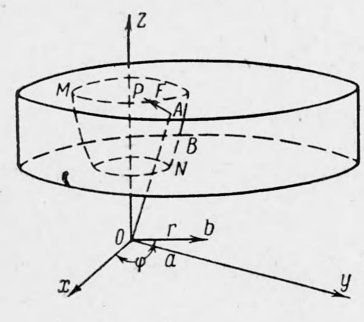
Г. К. Пожарицкий

(*Москва*)

Для решения озаглавленной задачи используется схема, близкая к схеме ротора на гибком валу [1].

Вообразим систему координат x, y, z с началом в неподвижной точке O и вертикальной осью z, вращающуюся с постоянной угловой скоростью ω вокруг этой оси, и ротор — тяжелое твердое тело,— стесненное идеальными голономными связями, могущее совершать поступательные перемещения по отношению к этой системе.

Пусть ротор имеет цилиндрическую полость с осью (фигура), параллельной оси z, радиусом R и высотой H, частично заполненную жидкостью плотности σ, тяжелой и несжимаемой. Предположим, что некая точка A ротора удерживается идеальной связью на постоянном расстоянии l от точки O и что в точке A приложена сила F, направленная из точки A к оси z перпендикулярно к ней, пересекающая эту ось в точке P и пропорциональная AP.



Вообразим ротор, целиком заполненный жидкостью, и обозначим через m массу системы, через b — проекцию ее центра тяжести B на плоскость xy и зададим положение G' в этой плоскости полярными координатами r, φ.

Пусть a — проекция точки A на плоскость xy, а ось x выбрана параллельной отрезку ba, имеющему постоянную длину e. Тогда координаты a будут

$$x_a = r\cos\varphi + e, \qquad y_a = r\sin\varphi$$

Если система жидкость-ротор находится в относительном равновесии r_0, φ_0, то свободная поверхность жидкости имеет формулу параболоида

$$z - \frac{\omega^2}{2g}(x^2 + y^2) = \alpha \tag{1}$$