ТЕЧЕНИЕ ГАЗА БОЛЬШОЙ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ В ОКРЕСТНОСТИ КРИТИЧЕСКОЙ ТОЧКИ ТУПОГО ТЕЛА

А. М. Климов

(Москва)

В работах [1,2] рассмотрены некоторые характерные типы течений жидкостей с большой теплопроводностью. Такие жидкости (ионизованные газы, жидкие металлы) имеют малые числа Прандтля $\sigma = \mu C_p / k$. Если числа Пекле $P = \rho u L C_p / k$ достаточно велики для справедливости концепции температурного пограничного слоя, а числа Прандтля малы по сравнению с 1, температурный пограничный слой можно в первом приближении считать невязким, а динамический пограничный слой изотермическим поперек слоя и рассматривать последний как поверхностный источник тепла [1].

В настоящей работе рассмотрена задача о теплопередаче в окрестности критической точки при произвольных числах Прандтля.

Будем относить индекс 0 к параметрам торможения внешнего течения, индекс e — к величинам на внешней границе пограничного слоя, индекс w — к величинам на поверхности тела. Делая в обычных уравнениях двумерного пограничного слоя замену переменных, предложенную А. А. Дородницыным [3]

$$\xi = \int_0^x \frac{p_e}{p_0} dx, \qquad \eta = \int_0^y \frac{\rho}{\rho_0} dy, \qquad V = \frac{p_0}{p_e} u \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{v}{\tau} \tag{1}$$

и принимая, что $k / k_0 = T / T_0 = \tau$, $\mu / \mu_0 = \tau$, получим:

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial V}{\partial \eta} = 0, \qquad u \frac{\partial u}{\partial \xi} + V \frac{\partial u}{\partial \eta} = \frac{\tau}{\tau_e} u_e u_e' + \nu_0 \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}$$
$$u \frac{\partial S}{\partial \xi} + V \frac{\partial S}{\partial \eta} = \chi \left[\frac{\partial^2 S}{\partial \eta^2} + (1 - \sigma) \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \left(\frac{u^2}{2 h_0} \right) \right] \tag{2}$$

Граничными условиями для этой системы будут

$$u = 0, \quad V = 0, \quad S = S_w(\xi) \quad \text{при } \eta = 0; \qquad u \to u_e, \quad S \to 1 \quad \text{при } \eta \to \infty$$

Здесь $S = h / h_0$, $\chi = k_0 / C_p \rho_0$, $h = C_p T + u^2 / 2$ — полная энтальпия. Остальные обозначения общепринятые. При $u_e = C \xi^m$ система (2) сводится к обыкновенным дифференциальным уравнениям. Пусть $\varphi(\xi, \eta)$ — функция тока, интегрирующая уравнение неразрывности системы (2). Полагая

$$\psi = \left(\frac{2 \chi u_e \xi}{m+1} \right)^{\frac{1}{2}} f(\zeta), \qquad \zeta = \eta \left(\frac{m+1}{2} \frac{u_e}{\chi \xi} \right)^{\frac{1}{2}}, \qquad \beta = \frac{2m}{m+1}, \qquad S = S(\zeta), \qquad \tau = \varphi(\zeta) \tag{3}$$

получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\sigma f''' + f f'' = \beta (f'^2 - \varphi), \qquad \varphi = \frac{S - f'^2 \frac{\varkappa - 1}{\varkappa + 1} \lambda_e^2}{1 - \frac{\varkappa - 1}{\varkappa + 1} \lambda_e^2}$$
$$S'' + f S' = 2(1 - \sigma) \frac{\varkappa - 1}{\varkappa + 1} \lambda_e^2 (f' f''' + f''^2) \tag{4}$$

с граничными условиями:

$$f = 0, \quad f' = 0, \quad S = S_w \quad \text{при } \zeta = 0; \qquad f' \to 1, \quad S \to 1 \quad \text{при } \zeta \to \infty$$

Здесь $\lambda = u / a_*$ — приведенная скорость.

Члены уравнений системы (4) будут функциями одной только переменной ζ либо при $\varkappa = 1$, либо при $\lambda_e = \text{const}$, в частности и при $\lambda_e = 0$, т. е. если внешнее течение можно считать несжимаемым. Для газа такое предположение означает пренебрежение частью работы сил давления; учитывается влияние градиента давления лишь на профиль скорости (и только через последний на профиль температуры).

В окрестности критической точки всегда реализуется течение с малыми дозвуковыми скоростями. Поэтому течение на внешней границе возникающего пограничного слоя можно считать несжимаемым. Скорость на внешней границе может быть представлена соотношением

$$u_e = \gamma x = \left[\frac{\partial u_e}{\partial x} \right]_{x=0} x$$

Вязкую диссипацию можно не учитывать, она ничтожна по сравнению с внутренней энергией ионизованного газа. Совершая в системе (4) предельный переход при $\lambda_e \to 0$ и учитывая, что преобразование (1) принимает вид

$$\xi = x, \qquad \eta = \int_0^y \frac{\rho}{\rho_0}\,dy, \qquad V = u\frac{\partial\eta}{\partial x} + \frac{v}{\tau}$$

(т. е. $u_e = \gamma\xi$), получим

$$f'^2 - ff'' = \varphi + \sigma f'', \qquad -f\varphi' = \varphi'' \tag{5}$$

Граничными условиями будут

$$\begin{aligned} &f = 0, \quad f' = 0 \quad \varphi = \varphi_w \quad \text{при } \zeta = 0 \\ &f' \to 1 \quad \varphi \to 1 \quad \text{при } \zeta \to \infty \end{aligned} \tag{6}$$

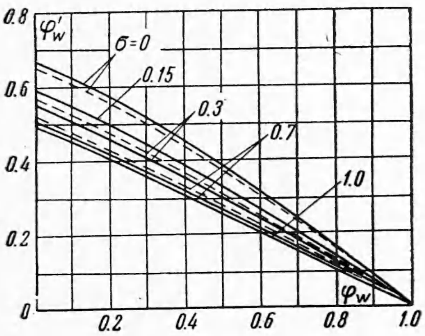
Формулы (3) приняли вид

$$\psi = \xi\sqrt{\gamma\chi}f(\zeta), \qquad \zeta = \eta\sqrt{\frac{\gamma}{\chi}}, \qquad \beta = 1$$

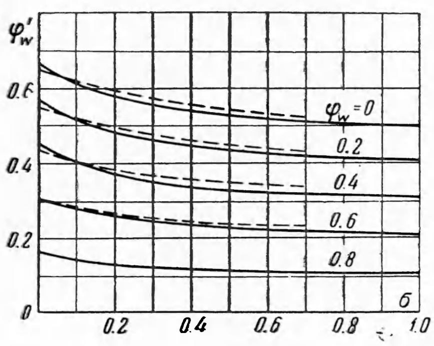
Отметим, что

$$u = u_e \cdot f'(\zeta), \qquad V = -\sqrt{\gamma\chi}f(\zeta)$$

Уравнения пограничного слоя в осесимметрическом случае приводятся к пло-



Фиг. 1



Фиг. 2

скому виду чисто геометрическим преобразованием Степанова — Манглера [4,5], которое в данном случае имеет вид

$$s = x^3, \qquad n = xy$$

В результате для осесимметрического случая получим:

$$f'^2 - 2ff'' = \varphi + 2\sigma f''', \qquad -f\varphi' = \varphi'' \tag{7}$$

Граничными условиями будут условия (6). Формулы (3) выглядят так:

$$\psi = \xi^{\frac{2}{3}}\left(\frac{3}{2}\gamma\chi\right)^{\frac{1}{2}} f(\zeta), \qquad \zeta = \eta\xi^{-\frac{1}{3}}\left(\frac{2}{3}\frac{\gamma}{\chi}\right)^{\frac{1}{2}}, \qquad \beta = \frac{1}{2}$$

Соответственно

$$u = u_e f'(\zeta) = \gamma\xi^{\frac{1}{3}} f'(\zeta)$$

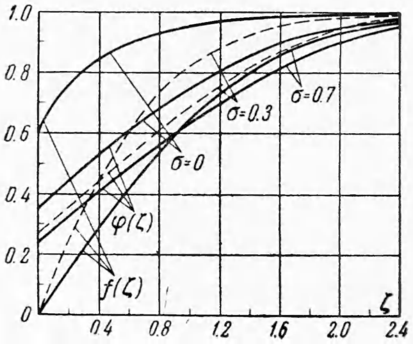
Решение систем (5) и (7) проводим численным интегрированием, подбирая граничные условия при $\zeta = 0$ так, чтобы удовлетворить граничным условиям при $\zeta \to \infty$.

Так как обе системы допускают преобразование подобия:

$$f(\zeta) = \alpha f_*(\alpha\zeta), \qquad \varphi(\zeta) = \alpha^4\varphi_*(\alpha\zeta) \tag{8}$$

процедуру можно проделывать, варьируя лишь один неизвестный параметр. Неоднородность граничных условий при $\zeta = 0$, однако не позволяет, задавшись φ_w, φ_w' ($f_w = 0$, $f_w' = 0$) и решив один раз неопределенную краевую задачу (варьируется f_w''), получить, используя преобразование (8), решение для заданного значения φ_w.

Решив задачу при выбранных φ_w, φ_w', мы получаем постоянные на бесконечности $\varphi(\infty)$, $f'(\infty)$, вообще говоря, не равные 1, и, применяя преобразование (8), получаем решение при $\varphi(\infty) = 1$, $f'(\infty) = 1$, но уже при других заранее неизвестных φ_w, φ_w'. Получив серию решений при различных φ_w, можно построить зависимость $\varphi_w' = \varphi_w'(\varphi_w)$.



Фиг. 3

Численное интегрирование с автоматическим поиском решений краевых задач было проведено на вычислительной машине «Урал». Результаты представлены на фигурах 1—3. Сплошные линии соответствуют осесимметрическому случаю, пунктирные — плоскому. Ввиду того, что при $\sigma \to 0$ уменьшается толщина вязкого слоя и увеличивается кривизна профиля скорости, решение уравнений становится затруднительным. В то же время профиль температуры слабо зависит от числа σ (примеры профилей скорости и температуры показаны на фигуре 3) и становится возможным следующий путь решения: рассматривается предельный случай $\sigma = 0$; при этом процесс приближения точки максимальной кривизны профиля скорости к стенке завершается возникновением особенности при $\zeta = 0$, заключающейся в бесконечной кривизне профиля скорости. Особенность удается выделить аналитически и затем задача решается численно без особых затруднений. Все полученные решения вместе позволяют получить (фиг. 2) градиенты температуры на стенке при произвольных числах Прандтля.

Итак, при $\sigma = 0$ имеем

$$f'^2 - ff'' = \varphi, \qquad -f\varphi' = \varphi'' \tag{9}$$

в плоском случае и

$$f'^2 - 2ff'' = \varphi, \qquad -f\varphi' = \varphi'' \tag{10}$$

в осесимметрическом случае.

Граничными условиями для систем (9) и (10) будут:

$$f = 0, \quad \varphi = \varphi_w \quad \text{при } \zeta = 0, \qquad f' \to 1, \quad \varphi \to 1 \quad \text{при } \zeta \to \infty$$

Точка $f = 0$ есть особая точка этих уравнений. При $\varphi \not\equiv \text{const}$ решения необходимо являются неаналитическими функциями. В осесимметрическом случае

$$u = \gamma \xi^{\frac{1}{3}} f'(\zeta)$$

По физическому смыслу задачи $f'(\zeta)$ суть непрерывная функция во всей области течения, в частности и при $\xi = 0$ — в особой точке. Следовательно, в малой окрестности этой точки можем записать

$$f'(\zeta) = f'(0) + \delta(\zeta) \qquad (\delta(\zeta) \to 0 \text{ при } \zeta \to 0)$$

Интегрируя, получим

$$f(\zeta) = f'(0)\,\zeta\left[1 + \frac{\delta(\theta\zeta)}{f'(0)}\right] \qquad (0 \leqslant \theta \leqslant 1)$$

Дифференцируя первое и интегрируя второе уравнения системы (10), будем иметь

$$f'' = -\frac{\varphi'}{2f}, \qquad \varphi' = \varphi'(0)\exp\left(-\int_2^\zeta f\,d\zeta\right) \tag{11}$$

Используя формулы (11) и принимая в качестве первого приближения выражения $f(\zeta) = f'(0)\,\zeta$, строим процесс последовательных приближений, дающий решение в виде рядов

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \zeta^k + \ln\zeta \sum_{k=2}^{\infty} C_k \zeta^k + \sum_{n=2}^{\infty} (\ln\zeta)^n \sum_{k=n+2}^{\infty} A_{nk}\zeta^k$$

$$\varphi = \sum_{k=1}^{\infty} B\ \zeta^k + \ln\zeta \sum_{k=4}^{\infty} D_k \zeta + \sum_{n=2}^{\infty} (\ln\zeta)^n \sum_{k=n+4}^{\infty} B_{nk}\zeta^k$$

отрезки которых используем, чтобы получить искомые функции на некотором расстоянии от особой точки. Далее решение проводим численным интегрированием с использованием преобразования (8).

Перейдем к плоскому случаю. Дважды продифференцировав первое уравнение системы (9) и проинтегрировав второе, будем иметь:

$$f^{\mathrm{IV}} = \frac{f''^2}{f}, \qquad \varphi' = \varphi'(0) \exp\left(-\int_0^\zeta f d\zeta\right) \tag{12}$$

Предположим, что $f'(\zeta)$ — непрерывная и дифференцируемая функция при $\zeta = 0$. Тогда в малой окрестности этой точки

$$f = f'(0)\zeta + O(\zeta^2) \tag{13}$$

При помощи формул (12), (13) строим процесс последовательных приближений, аналогичный проведенному выше и дающий решение в виде рядов:

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} N_k \zeta^k + \sum_{n=1}^{\infty} (\ln \zeta)^n \sum_{k=2n+1}^{\infty} N_{nk} \zeta^k$$

$$\varphi = \sum_{k=1}^{\infty} M_k \zeta^k + \sum_{n=1}^{\infty} (\ln \zeta)^n \sum_{k=2n+3}^{\infty} M_{nk} \zeta^k$$

Дальнейшая процедура решения также не отличается от проведенной в осесимметрическом случае.

Заметим, что решения, полученные при $\sigma = 1$, совпали с решениями, полученными в работе [6] способом, отличным от нашего.

Определим тепловые потоки. В плоском случае имеем:

$$q = -k_w T_0 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)_{y=0} = -k_0 T_0 \sqrt{\frac{\gamma}{\chi}}\, \varphi_w'$$

или в другой форме

$$q = -\frac{\mu_0 C_p}{\sqrt{\sigma}} \sqrt{\frac{\gamma}{\nu_0}}\, T_0 \varphi_w'$$

В осесимметрическом случае:

$$q = -k_0 T_0 \sqrt{\frac{2}{3} \frac{\gamma}{\chi}}\, \varphi_w', \quad \text{или} \quad q = -\frac{\mu_0 C_p}{\sqrt{\sigma}} \sqrt{\frac{2}{3} \frac{\gamma}{\nu_0}}\, T_0 \varphi_w'$$

Видно, что в ионизованном газе теплопередача может более чем в $1/\sqrt{\sigma}$ раз превышать (при отсутствии химических реакций) теплопередачу в неионизованном газе (при одинаковых T_0, T_w, C_p, μ_0, γ).

В заключение автор выражает искреннюю признательность М. Н. Когану за предложение темы и ценные обсуждения.

Поступила
30 III 1960

ЛИТЕРАТУРА

1. Коган М. Н. О течениях с большой теплопроводностью, ДАН СССР, 1959, 128, № 3, 488.
2. Morgan G., Pipkin A., Warner W. On heat transfer in laminar boundary-layer flows of liquids having a very Small Prandtl number. J. Aer. Sci., 1958, 25, № 3.
3. Дородницын А. А. Пограничный слой в сжимаемом газе, ПММ, 1942, 6, № 6, 449.
4. Степанов Е. И. Об интегрировании уравнений ламинарного пограничного слоя для движения с осевой симметрией, ПММ, 1947, 11, № 1.
5. Mangler W. Zusammenhang Zwischen ebenen und rotationssymmetrischen Grenzschichten in kompressiblen Flüssigkeiten. ZAMM, 1948, 28, 97.
6. Cohen E. and Reshotko C., Similar solutions of compressible boundary layer equations, NACA, Report 1293.