

3. Вовк А. А., Кравец В. Г., Ляхов Г. М., Плаксий В. А., Салицкая В. И., Султанов К. С. Экспериментальное определение параметров взрывных волн и вязкопластических характеристик грунта. — ПМ, 1977, № 7.
4. Ляхов Г. М., Плаксий В. А., Султанов К. С. Исследование взаимодействия волны в грунте с преградой по записям напряжений и деформаций. — ПМТФ, 1976, № 3.
5. Нарожная З. В. Об экспериментальном определении скорости разгрузки в грунте при динамических процессах. — ФГВ, 1965, № 1.

УДК 534.222.2

СТРУКТУРА УДАРНЫХ ВОЛН В УПРУГОПЛАСТИЧЕСКИХ РЕЛАКСИРУЮЩИХ СРЕДАХ

В. Г. Григорьев, А. С. Немиров, В. К. Сироткин
(Москва)

В настоящее время ударные и взрывные нагрузки находят все более широкое применение в различных технических процессах. Важное значение при этом имеет адекватное описание как процесса распространения ударной волны, так и изменения среды в результате ударного воздействия.

Упругопластические волны с учетом поведения дислокаций на фронте ударной волны рассматривались ранее в ряде работ [1—3]. В работе [1] развивается модель для описания неупругого поведения железа и малоуглеродистых сталей в широком диапазоне изменения скоростей деформации. Численно решена задача о плоском соударении пластин. В работе [2] наряду с численным решением задачи о распространении упругопластической волны рассматривается стационарная волна. Показано, что фронт ударной волны имеет многоволновую структуру. Однако в качестве выражения для скорости дислокаций авторы [2] использовали только экспоненциальную зависимость от интенсивности касательных напряжений и не рассматривали важный случай степенной зависимости. В [3] на основе динамики дислокаций рассматривается теория установившегося волнового профиля, численно рассчитанные профили сравниваются с экспериментальными, полученными методами лазерной интерферометрии. Показано, что скорость дислокаций при ударно-волновом сжатии алюминия хорошо описывается степенной зависимостью. Кроме того, показано, что для алюминия плотность подвижных дислокаций линейно увеличивается с возрастанием величины пластического сдвига γ_p .

В данной работе рассматривается вопрос о структуре волн нагрузки в упругопластических средах, при этом используется дислокационная модель динамической пластичности [4—6]. В рамках этой модели удастся не только описать динамику пластического деформирования, но и рассмотреть те структурные изменения, которые происходят в материале под действием динамических нагрузок.

Аналогичная задача о структуре ударной волны с использованием феноменологического подхода к описанию релаксации касательных напряжений рассматривалась в работе [7], однако в ней детально не рассматривалась роль нелинейности процесса релаксации напряжений, а также не учитывались эффекты, связанные с изменением плотности дислокаций.

Рассмотрим ударную волну, ширина фронта Δ которой мала по сравнению с кривизной фронта и расстоянием, на котором происходит заметное затухание ударной волны. В этом случае структура волны будет определяться решением стационарной плоской задачи [8].

Переходя к сопровождающей системе координат, в которой фронт волны неподвижен, уравнения движения можно записать в виде [7]

$$(1) \quad \rho u = \rho_0 u_0, \quad \sigma_1 - \sigma_{10} = (\rho_0 u_0)^2 (1/\rho - 1/\rho_0),$$

где ρ — плотность; u — скорость; σ_1 — напряжение вдоль оси распространения; ρ_0 , u_0 , σ_{10} — соответствующие величины перед фронтом.

Будем рассматривать не слишком сильные ударные волны, так что температура за фронтом волны не превышает температуры плавления. В этом случае можно пренебречь тепловыми составляющими давления [8] и записать уравнение состояния в виде

$$(2) \quad p = p(\rho), \quad p = -(\sigma_1 + 2\sigma_2)/3,$$

где p — давление; σ_2 — напряжение в направлении, перпендикулярном направлению распространения волны.

Кроме уравнения состояния, в твердом теле необходимо задать также связь касательных напряжений $\tau = \rho_1 - \sigma_2$ с деформациями. В качестве соотношений, определяющих касательные напряжения, возьмем уравнения дислокационной модели динамической пластичности [4—6], которые в нашем случае принимают вид

$$(3) \quad -\frac{\rho_0 u_0}{\rho} \frac{d\rho}{dx} = \frac{\rho_0 u_0}{2G\rho} \frac{d\tau}{dx} + \mu b N_m v(\tau),$$

где G — модуль сдвига; u — модуль тензора ориентации, b — вектор Бюргера; N_m — число подвижных дислокаций на единицу поверхности; $v(\tau)$ — средняя скорость движения дислокаций под действием касательного напряжения. Скорость дислокаций $v(\tau)$ зависит от температуры. Однако для больших скоростей эта зависимость недостаточно хорошо исследована [9] и в дальнейшем не будет учитываться.

Число подвижных дислокаций N_m меняется в процессе пластической деформации, что связано как с размножением, так и закреплением дислокаций. Это изменение можно связать с абсолютной величиной пластического сдвига [6] γ_p

$$(4) \quad \frac{\rho_0 u_0}{\rho} \frac{d\gamma_p}{dx} = \mu b N_m (\gamma_p) |v(\tau)|.$$

Это соотношение важно не только для определения профиля волны, но и для предсказания изменений деформационных свойств материала в результате ударного воздействия.

Систему уравнений (1)—(4) можно разрешить относительно плотности ρ

$$(5) \quad \frac{(\rho c_t)^2 - (\rho_0 u_0)^2}{\rho^3 (c_t^2 - c^2)} \frac{d\rho}{dx} = -\mu b N_m (\gamma_p) \frac{\rho v(\tau)}{\rho_0 u_0},$$

$$\tau = \frac{3}{2} \left[p - (\rho_0 u_0)^2 \frac{\rho - \rho_0}{\rho^2 \rho_0} \right] \quad (\sigma_{10} = 0);$$

$$(6) \quad \frac{d\gamma_p}{dx} = \frac{(\rho c_t)^2 - (\rho_0 u_0)^2}{\rho^3 (c_t^2 - c^2)} \frac{d\rho}{dx},$$

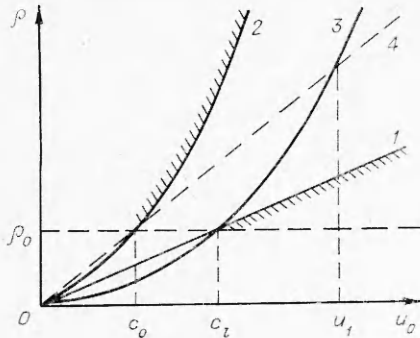
где $c^2 = dp/d\rho$; $c_t^2 = c^2 + 4G/3\rho$ — объемная и продольная скорости звука, которые, вообще говоря, зависят от плотности.

Для того чтобы определить характер решения уравнения (5), рассмотрим поведение коэффициентов этого уравнения в плоскости $\{\rho, u_0\}$. Будем при этом считать, что скорость дислокаций $v(\tau)$ обращается в нуль при $\tau = 0$, а $N_m > 0$. Линии, определяемые уравнениями

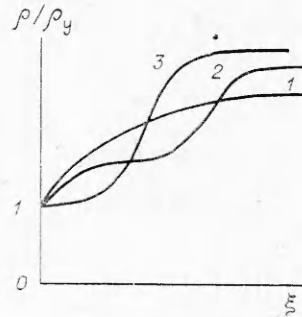
$$(7) \quad \rho = \rho_0 u_0 / c_t;$$

$$(8) \quad p(\rho) - \rho_0 u_0^2 \left(1 - \frac{\rho_0}{\rho}\right) = 0,$$

являются линиями, на которых выполняются следующие условия:



Ф и г. 1



Ф и г. 2

коэффициент при $d\rho/dx$ обращается в нуль и правая часть уравнения (5) обращается в нуль соответственно.

Эти линии схематически приведены на фиг. 1, где кривая 1 соответствует решению уравнения (7). Уравнение (8) имеет одно тривиальное решение $\rho = \rho_0$, а второе решение представлено на фиг. 1 кривой 2. Эти линии делят плоскость $\{\rho, u_0\}$ на части с различными знаками производной $d\rho/dx$. Область положительных $d\rho/dx$, соответствующая волнам нагрузки, на фиг. 1 не заштрихована.

Как видно из фиг. 1, при $c < u_0 < c_l$ может существовать непрерывная волна нагрузки. При $u_0 > c_l$ решения надо искать на классе разрывных функций. Из уравнения (3) следует, что разрыв в решении должен представлять собой упругий скачок. Условия на упругом скачке даются соотношениями

$$\rho \frac{d\tau}{d\rho} = -2G, \quad \tau = \frac{3}{2} \left[p(\rho) - \rho_0 u_0^2 \left(1 - \frac{\rho_0}{\rho} \right) \right],$$

которые следуют из условия, что на упругом скачке не происходит пластического деформирования. Линия упругого скачка представлена на фиг. 1 кривой 3. Она расположена в области положительных $d\rho/dx$. Таким образом, при $u_0 > c_l$ ударный фронт состоит из упругого скачка, за которым следует релаксационная часть. При решении уравнений (5), (6) необходимо учитывать, что на упругом скачке $\gamma_p = 0$. В релаксационной части профиля происходит дальнейший рост плотности, пока она не достигнет линии, определяемой уравнением (8), на которой $\tau = 0$. Как следует из условия $\tau = 0$, эта линия соответствует гидродинамической адиабате Гюгонио.

При $c < u_0 < c_l$ могут существовать непрерывные стационарные волны. Для того чтобы понять их физический смысл, рассмотрим (5) при $\rho \rightarrow \rho_0$

$$(9) \quad u_0 \frac{c_l^2 - u_0^2}{\rho_0 (c_l^2 - c^2)} \frac{d\rho}{dx} = -\mu b N_m v(\tau),$$

$$\tau = -\frac{3}{2} (\rho - \rho_0) (u_0^2 - c^2).$$

Предполагая, что $v(\tau) = \alpha\tau$, при малых τ получим $\rho - \rho_0 = e^{Ax}$, где $A = \frac{3}{2} \alpha \frac{(u_0^2 - c^2) \mu b N_m}{(c_l^2 - u_0^2) u_0} \rho_0 (c_l^2 - c^2)$. Такое решение соответствует случаю, когда передний фронт волны уходит на бесконечность ($x \rightarrow -\infty$). При этом образуется стационарный профиль, отвечающий асимптотике $t \rightarrow \infty$.

Фактически время выхода на асимптотику определяется величиной

$$t_{ac} = 1/A (c_l - u_0) = \frac{2}{3} \frac{(c_l + u_0) u_0 \rho_0 (c_l^2 - c^2)}{\alpha \mu b N_m (u_0^2 - c^2)}.$$

Таким образом, стационарные ударные волны могут существовать лишь при $u_0 > c_l$. При $u_0 \leq c_l$ волна оказывается нестационарной и переходит в стационарную асимптотику при $t \gg t_{ac}$.

Рассмотрим структуру ударной волны без учета изменения плотности подвижных дислокаций при $N_m = \text{const}$. При этом необходимо задать конкретным видом уравнения состояния. Возьмем уравнение состояния в виде

$$(10) \quad p = (\rho - \rho_0) c^2,$$

где c^2 — постоянная. Будем считать также постоянной продольную скорость звука c_l .

Условия на уругом скачке в этом случае принимают вид

$$\rho_y = \rho_0 \frac{u_0^2}{c_l^2}, \quad p_y = \frac{\rho_0 c^2}{c_l^2} (u_0^2 - c_l^2), \quad u_y = c_l^2 / u_0, \quad \tau_y = -\frac{3}{2} \rho_0 (c_l^2 - c^2) \left(\frac{u_0^2}{c_l^2} - 1 \right).$$

За фронтом волны нагрузки выполняются соотношения, соответствующие гидродинамической адиабате:

$$(11) \quad \rho_r = \rho_0 u_0^2 / c^2, \quad p_r = \rho_0 c^2 (u_0^2 / c^2 - 1), \quad u_r = c^2 / u_0.$$

Исследование структуры фронта волны удобно производить в безразмерных переменных

$$(12) \quad \xi = \mu b N_m (1 - c^2 / c_l^2) x, \quad \tilde{\rho} = \rho / \rho_0, \quad \tilde{u}_0 = u_0 / c_l, \\ \tilde{v} = v / c_l, \quad \tilde{\tau} = \frac{2}{3} \tau / \rho_0 c^2.$$

Уравнение (5) в этих переменных принимает вид

$$(13) \quad \frac{d\tilde{\rho}}{d\xi} = -\frac{\tilde{\rho}^4}{\tilde{\rho}^2 - \tilde{u}_0^2} \frac{\tilde{v}(\tilde{\tau})}{\tilde{u}_0}, \quad \tilde{\tau} = (\tilde{\rho} - 1) \left(1 - \frac{\tilde{u}_0^2 v^2}{\tilde{\rho}} \right), \quad v^2 = c_l^2 / c^2.$$

Для того чтобы определить особенности поведения $\tilde{\rho}(\xi)$, вычислим вторую производную $d^2\tilde{\rho}/d\xi^2$

$$(14) \quad \frac{d^2\tilde{\rho}}{d\xi^2} = \left[2 \frac{\tilde{\rho}^2 - 2\tilde{u}_0^2}{\tilde{\rho}(\tilde{\rho}^2 - \tilde{u}_0^2)} + \left(1 - \frac{\tilde{u}_0^2 v^2}{\tilde{\rho}^2} \right) \frac{v'(\tau)}{v(\tau)} \right] \left(\frac{d\tilde{\rho}}{d\xi} \right)^2.$$

Как видно из этого выражения, знак второй производной определяется знаком выражения, стоящего в квадратных скобках, и существенно зависит от поведения скорости дислокаций $v(\tau)$. Экспериментальные данные по зависимости скорости дислокаций от напряжения обычно описываются зависимостями вида $v \sim \tau^n$ или $v = v_0 \exp(-\tau_0/|\tau|)$. Вторая зависимость правильно воспроизводит предельную скорость дислокаций при больших $|\tau|$.

Рассмотрим сначала зависимость вида $v \sim \tau^n$. Подставляя $v'(\tau)/v(\tau) = n/\tau$ в (14), получим

$$(15) \quad \frac{d^2\tilde{\rho}}{d\xi^2} = \frac{1}{\tilde{\rho}} \left(\frac{d\tilde{\rho}}{d\xi} \right)^2 \left[2 \frac{\tilde{\rho}^2 - 2\tilde{u}_0^2}{\tilde{\rho}^2 - \tilde{u}_0^2} + n \frac{\tilde{\rho}^2 - \tilde{u}_0^2 v^2}{(\tilde{\rho} - 1)(\tilde{\rho} - \tilde{u}_0^2 v^2)} \right].$$

На уругом скачке $\tilde{\rho} = \tilde{u}_0^2$ и знак $d^2\tilde{\rho}/d\xi^2$ определяется знаком величины

$$(\tilde{u}_0^2 - u_c^2) [2(v^2 - 1) - n], \quad u_c^2 = \frac{4(v^2 - 1) - nv^2}{2(v^2 - 1) - n}.$$

Из этих соотношений видно, что структура фронта волны существенно зависит от степени нелинейности релаксации касательных напряжений. При слабой нелинейности, когда $n < 2(v^2 - 1)$, для сильных ударных волн ($\tilde{u}_0^2 > u_c^2$) вторая производная оказывается положительной на упругом скачке. Заметим, что если $n < 2$, то $u_c > 1$ и для достаточно слабых ударных волн ($\tilde{u}_0 > u_c$) вторая производная отрицательна. В случае сильной нелинейности, когда $n > 2(v^2 - 1)$, ситуация изменяется. Если при этом выполняется условие $n > 2$, то $u_c > 1$ и вторая производная положительна только для достаточно слабых ударных волн ($\tilde{u}_0 < u_c$). Для сильных волн ($\tilde{u}_0 > u_c$) вторая производная вблизи упругого скачка оказывается отрицательной. Такое поведение профиля волны связано с резкой зависимостью скорости дислокаций от касательных напряжений. Как следует из выражения (13), максимальные касательные напряжения достигаются на линии $\tilde{\rho} = \tilde{u}_0 v$, которой соответствует кривая 4 на фиг. 1, пересекающая линию ударного фронта в точке $\tilde{u}_1 = v$. Можно показать, что всегда выполняется условие $\tilde{u}_1 < u_c$. Как видно из выражения (15), при $\tilde{\rho} \rightarrow \tilde{u}_0^2 v^2$ знак второй производной отрицателен (так как $\tilde{\rho} < \tilde{u}_0^2 v^2$) при любых n . Поэтому в зависимости от скорости ударной волны и степени нелинейности релаксации касательных напряжений могут наблюдаться следующие характерные профили ударной волны: а) слабая нелинейность ($n < 2(v^2 - 1)$) и слабые волны ($\tilde{u}_0^2 < u_c^2$) — либо обычный релаксационный профиль с отрицательной второй производной, качественно представленный на фиг. 2 (кривая 1), либо профиль, показанный кривой 2 на фиг. 2; б) слабая нелинейность ($n < 2(v^2 - 1)$) и сильные волны ($\tilde{u}_0^2 > u_c^2$) — профиль, качественно представленный кривой 3 на фиг. 2; в) сильная нелинейность ($n > 2(v^2 - 1)$) и слабые ударные волны ($\tilde{u}_0^2 < u_c^2$) — профиль, качественно представленный кривой 3 на фиг. 2; г) сильная нелинейность ($n > 2(v^2 - 1)$) и сильные ударные волны ($\tilde{u}_0^2 > u_c^2$) — релаксационный профиль, качественно представленный кривой 1 на фиг. 2; наличие перегиба на фронте ударной волны в случаях «б» и «в» имеет различную природу. Если в случае «б» он возникает за счет кинематики, то в случае «в» перегиб возникает за счет развитого пластического течения. Поэтому только в случае «в» его можно отождествить с пластической волной, описанной в работе [7].

Рассмотрим коротко зависимость $v = v_0 \exp(-\tau_0/|\tau|)$. В этом случае в (15) необходимо подставить $n_{\text{eff}} = \tau_0/|\tau|$. На упругом скачке $n_{\text{eff}} = 2\tau_0/3\rho_0 c^2 (v^2 - 1) (\tilde{u}_0 - 1)$. Как видно из этого выражения, только очень слабые волны ($(\tilde{u}_0 - 1) \ll 1$) будут характеризоваться большими n_{eff} . Для остальных волн $n_{\text{eff}} \ll 1$, так как, согласно экспериментальным данным, $\tau_0 \ll \rho_0 c^2$. Из выражения (15) видно, что профиль волн при $\tilde{u}_0 < 2$ будет иметь вид, приведенный на фиг. 2 (кривая 1). Этот вывод подтверждается численным расчетом. На фиг. 3, а показаны профили волн, полученные численным интегрированием уравнения (13), для следующих значений параметров: $v^2 = 1,7$, $\tau_0/\rho_0 c^2 = 2 \cdot 10^{-3}$, $\tilde{u}_{01} = 1,001$, $\tilde{u}_{02} = 1,05$; $\tilde{u}_{03} = 1,1$, кривые 1—3 соответственно.

Оценим ширину ударного фронта. Воспользовавшись уравнением (13) и учитывая, что $\tilde{v} < 1$, $v^2 \sim 1$ и $\tilde{u}_0 \sim 1$, получим

$$(16) \quad \Delta \xi_{\text{ф}} \sim 1.$$

Таким образом, переходя к размерным величинам и беря $\mu b N_m \sim 1 \text{ см}^{-1}$, получим $\Delta \sim 1 \text{ см}$.

Рассмотрим структуру волны при изменяющемся значении N_m . В процессе пластической деформации происходит изменение плотности подвижных дислокаций, что проявляется как деформационное упрочнение. Этот эффект учитывается в уравнении (5), в котором плотность подвижных дислокаций зависит от величины пластической деформации. Используя уравнение состояния (10) и решая уравнение (6), получим

$$(17) \quad \gamma_p(\rho) = \frac{v^2}{v^2 - 1} \left(\ln \frac{\tilde{\rho}}{\tilde{\rho}_y} + \frac{1}{2} \tilde{u}_0^2 \frac{\tilde{\rho}_y^2 - \tilde{\rho}^2}{\tilde{\rho}^2 \tilde{\rho}_y^2} \right).$$

В этом выражении учтено, что на упругом скачке пластическая деформация отсутствует. Особенно простой вид уравнение (17) принимает вблизи от упругого скачка, где $(\tilde{\rho} - \tilde{\rho}_y)/\tilde{\rho}_y \ll 1$,

$$(18) \quad \gamma_p = \frac{v^2}{v^2 - 1} \frac{\tilde{u}_0^2 - 1}{\tilde{u}_0^4} (\tilde{\rho} - \tilde{u}_0^2),$$

здесь учтено, что $\tilde{\rho}_y = \tilde{u}_0^2$. Если выполняется условие $v^2 - 1 \ll 1$, то выражение (18) справедливо на всем фронте ударной волны. Заметим, что соотношения (17), (18) позволяют определить максимальную пластическую деформацию, происходящую во фронте ударной волны. Подставляя соотношение (11) в выражение (17), получим

$$(19) \quad \gamma_p^{\max} = \frac{v^2}{v^2 - 1} \left[\ln v^2 - \frac{1}{2\tilde{u}_0^2} (1 - v^{-4}) \right].$$

если $v^2 - 1 \ll 1$, то (19) дает $\gamma_p^{\max} = v^2 (1 - \tilde{u}_0^{-2})$. Как видно из (19), величина γ_p^{\max} монотонно возрастает с ростом \tilde{u}_0 и v^2 . Выражение (19) позволяет определить плотность дислокаций за фронтом ударной волны при известной зависимости $N(\gamma_p)$.

Для того чтобы исследовать влияние изменения плотности подвижных дислокаций на структуру ударной волны, предположим, что плотность подвижных дислокаций определяется законом [1, 4, 5]

$$(20) \quad N_m = N_{m0} (1 + m\gamma_p),$$

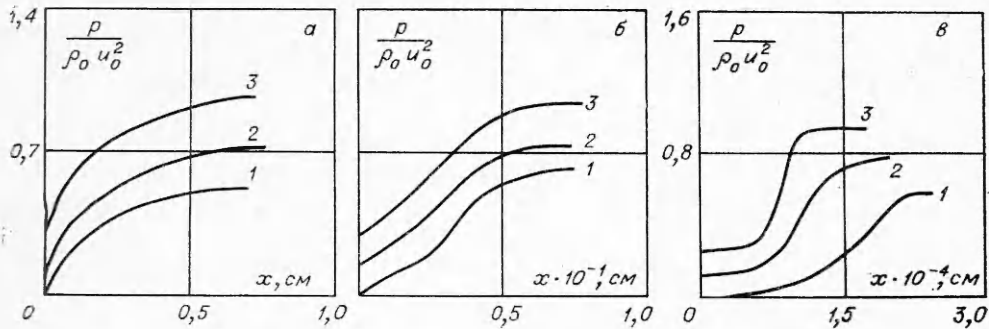
где m — коэффициент, определяющий изменение плотности дислокаций. В случае $m < 0$ этот закон отвечает линейному упрочнению материала, а $m > 0$ — разупрочнению. С использованием (20) уравнение (5) в безразмерных переменных (12) принимает вид

$$\frac{d\tilde{\rho}}{d\tilde{\xi}} = - \frac{\tilde{\rho}^4 (1 + m\gamma_p) \tilde{v}(\tilde{\tau})}{\tilde{\rho}^2 - \tilde{u}_0^2} \frac{1}{\tilde{u}_0},$$

где $\tilde{\xi} = \mu b N_{m0} \left(1 - \frac{c^2}{c_l^2} \right) x$, а $\gamma_p(\tilde{\rho})$ дается выражением (17). Размножение дислокаций приводит к возникновению резкого пластического фронта и к существенному уменьшению ширины фронта ударной волны. Производя оценку ширины фронта аналогично тому, как это делалось при выводе (16), получим

$$(21) \quad \Delta \tilde{\xi}_\phi \sim (1 + m\gamma_p^{\max})^{-1}.$$

Отсюда видно, что учет размножения дислокаций приводит к более сильной зависимости ширины фронта от скорости ударной волны. Наиболее



Ф и г. 3

простой вид выражение (21) принимает при $v^2 - 1 \ll 1$, когда $1 + m\gamma_{\rho}^{\max} \simeq 1 + mv^2(1 - \tilde{u}_0^{-2})$. В этом случае при $m \gg 1$ получим

$$\Delta\xi_{\Phi} \sim \frac{1}{mv^2} \frac{\tilde{u}_0^2}{\tilde{u}_0^2 - 1}.$$

Отсюда видно, что для слабых ударных волн ($\tilde{u}_0^2 - 1 \ll 1$) ширина фронта будет резко зависеть от мощности волны. При $\tilde{u}_0^2 \gg 1$ эта зависимость становится несущественной.

Величина m определяется из опытов по пластическому деформированию и оказывается равной $\sim 10^5$ [4, 5, 6]. Подставляя $v^2 = 2$ в (19) и оценивая $\Delta\xi_{\Phi}$ по формуле (21), получим $\Delta\xi_{\Phi} \sim 10^{-4}$ при $m \sim 10^5$ и $\Delta\xi_{\Phi} \sim 10^{-1}$ при $m \sim 10^2$. Эта оценка подтверждается численным расчетом, представленным на фиг. 3, б, в, расчеты проводились для следующих значений параметров: $v^2 = 1,7$, $\tau_0/\rho_0 c^2 = 2 \cdot 10^{-3}$, $\tilde{u}_{01} = 1,001$, $\tilde{u}_{02} = 1,05$, $\tilde{u}_{03} = 1,1$ (кривые 1-3 соответственно), $m = 10^2$ и $m = 10^5$ (фиг. 3, б, в соответственно).

Используя соотношения (19), (20), можно оценить плотность дислокаций за фронтом ударной волны. Максимальная плотность дислокаций достигается для сильных ударных волн ($\tilde{u}_0^2 \gg 1$) и равна $N_m = N_0 \left(1 + mv^2 \ln \frac{v^2}{v^2 - 1} \right)$. При $v^2 \sim 2$, $N_0 \sim 10^7 \text{ см}^{-2}$ и $m \sim 10^5$ максимальная плотность дислокаций оказывается $\sim 10^{12} \text{ см}^{-2}$.

Рассмотрим асимптотическую структуру волны при $u_0 \leq c_l$ без учета изменения плотности подвижных дислокаций. Как показывает анализ второй производной, даваемой выражением (14), она обращается в нуль только в одной точке. Таким образом, при $u_0 \leq c_l$ на фронте волны должна быть одна точка перегиба. Заметим, что при возрастании n (сильная нелинейность скорости релаксации) эта точка перегиба приближается к точке $\tilde{\rho} = \tilde{u}_0 v$, которая отвечает максимальным касательным напряжениям. Таким образом, нелинейность скорости релаксации приводит к тому, что наибольшая крутизна фронта волны определяется точкой максимальной скорости релаксации.

Структура переднего участка фронта определяется уравнением (9), которое в безразмерных переменных (12) для $v(\tau) = \alpha\tau^n$ принимает вид

$$(22) \quad \frac{d\tilde{\rho}}{d\tilde{\xi}} = \frac{\tilde{\alpha} (\tilde{u}_0^2 v^2 - 1)^n (\tilde{\rho} - 1)^n}{(\tilde{u}_0 + 1) \tilde{u}_0 (\tilde{\rho} - \tilde{u}_0)} \equiv A(\tilde{u}_0) \frac{(\tilde{\rho} - 1)^n}{(\tilde{\rho} - \tilde{u}_0)},$$

где $\tilde{\alpha} = \alpha(3\rho_0 c^2/2)^n/c_l$. Как видно, характер нарастания напряжений зависит от величины n . Кроме того, структура переднего участка будет различаться при $\tilde{u}_0 = 1$ и $\tilde{u}_0 < 1$.

Структура заднего участка определяется уравнением (13) при $\tilde{\rho} \rightarrow \tilde{u}_0^2 v^2$, которое для $v(\tau) = \alpha \tau^n$ принимает вид

$$\frac{d\tilde{\rho}}{d\xi} = \frac{\tilde{\alpha} (\tilde{u}_0^2 v^2 - 1)^n}{(v^2 - 1) v^{2(n-4)} \tilde{u}_0^{2n-5}} (\tilde{u}_0^2 v^2 - \tilde{\rho})^n \equiv B(\tilde{u}_0) (\tilde{u}_0^2 v^2 - \tilde{\rho})^n.$$

Релаксация плотности к гидростатическому значению за фронтом волны существенно зависит от величины n . Заметим, что значение $\tilde{u}_0 = 1$ не является выделенным при рассмотрении структуры заднего участка фронта.

Рассмотрим сначала случай $\tilde{u}_0 = 1$ ($u_0 = c_l$). Решение уравнения (22) при $n < 2$ будет иметь вид $\tilde{\rho} - 1 = [(2-n)A(1)\xi]^{1/(2-n)}$, фронт такой волны имеет конечную протяженность. При $n \leq 1$ передний фронт будет представлять собой слабый разрыв. При этом для $n < 1$ (этот случай, по-видимому, не реализуется на практике, так как отвечает увеличению времени релаксации с ростом касательных напряжений) производная на переднем фронте обращается в бесконечность. При $n = 2$ решение уравнения (22) будет иметь вид $\tilde{\rho} - 1 = \exp\{A(1)\xi\}$, а при $n > 2$ $\tilde{\rho} - 1 = [(2-n)A(1)\xi]^{1/(n-2)}$. Таким образом, при достаточно сильной нелинейности ($n \geq 2$) волна, движущаяся со скоростью $u_0 = c_l$, становится разбегающейся и асимптотически стремится к виду, где нарастание на переднем фронте происходит экспоненциально ($n = 2$) или степенным образом ($n > 2$).

Для $\tilde{u}_0 < 1$ структура переднего участка при $n < 1$ будет даваться соотношением $\tilde{\rho} - 1 = [\xi(1-n)A(\tilde{u}_0)/(1-\tilde{u}_0)]^{1/(1-n)}$, в этом случае протяженность волны остается конечной. Это связано с тем, что малые напряжения релаксируют быстрее и не успевают уйти от больших напряжений. При $n = 1$ нарастание плотности на переднем участке имеет экспоненциальный характер $\tilde{\rho} - 1 = \exp\{A(\tilde{u}_0)\xi/(1-\tilde{u}_0)\}$. При этом с уменьшением \tilde{u}_0 величина $A(\tilde{u}_0)/(1-\tilde{u}_0)$ уменьшается и в пределе $\tilde{u}_0 \rightarrow 1/v$ обращается в нуль. При $n > 1$ плотность на переднем участке растет степенным образом: $\tilde{\rho} - 1 = [(1-n)A(\tilde{u}_0)\xi/(1-\tilde{u}_0)]^{1/(n-1)}$.

Рассмотрим теперь характер заднего участка волны. При $n \leq 1$ плотность релаксирует к своему гидростатическому значению $\tilde{\rho} = \tilde{u}_0 v^2$ за конечное время. Это связано с тем, что малые напряжения релаксируют быстрее, чем большие. При $n = 1$ выход на гидростатическое значение происходит экспоненциальным образом: $\tilde{u}_0^2 v^2 - \tilde{\rho} = \exp[-B(\tilde{u}_0)\xi]$, а при $n > 1$ степенным образом: $\tilde{u}_0^2 v^2 - \tilde{\rho} = [(n-1)B(\tilde{u}_0)\xi]^{-1/(n-1)}$.

Заметим, что для любых значений n передний участок волны при $\tilde{u}_0 > 1/v$ ($u_0 > c$) оказывается более крутым, чем задний участок, и профиль волны оказывается асимметричным. С уменьшением \tilde{u}_0 эта асимметрия уменьшается, и в пределе очень слабых волн ($\tilde{u}_0 \rightarrow 1/v$) профиль волны становится симметричным.

Рассмотрим более детально структуру слабой волны, профиль которой асимптотически стремится к решению уравнения (13) при $\tilde{u}_0 \rightarrow 1/v$ ($u_0 \rightarrow c$). Разлагая это уравнение вблизи точки $\tilde{\rho} = 1$ и учитывая, что $\tilde{u}_0 v \rightarrow 1$, получим

$$\frac{d\tilde{\rho}}{d\xi} = \frac{\tilde{\alpha}v^3}{v^2-1} (\tilde{\rho}-1)^n (\tilde{u}_0^2v^2 - \tilde{\rho})^n.$$

При $n = 1$ решение этого уравнения имеет вид

$$\tilde{\rho} = \frac{1}{2} \{ (\tilde{u}_0^2v^2 + 1) + (\tilde{u}_0^2v^2 - 1) \operatorname{th} C\xi \},$$

где $C = \tilde{\alpha}v^3(\tilde{u}_0^2v^2 - 1)/(v^2 - 1)$. Это решение хорошо известно из задач нелинейной акустики [10]. При $n > 1$ профиль волны остается симметричным, но зависимость крутизны фронта от скорости волны становится более резкой: $d\rho/d\xi|_{\max} \sim (\tilde{u}_0^2v^2 - 1)^n$. Отметим, что для слабой волны учет изменения плотности подвижных дислокаций дает поправки следующего порядка малости по $(\tilde{u}_0^2v^2 - 1)$.

Авторы выражают благодарность Р. И. Нигматулину и Н. Н. Холину за обсуждение результатов работы и полезные советы.

Поступила 17 II 1978

ЛИТЕРАТУРА

1. Нигматулин Р. И., Холин И. И. К модели уругоупругой среды с дислокационной кинетикой деформирования. — «Изв. АН СССР. МТТ», 1974, № 4.
2. Гулидов А. И., Фомин В. М., Яненко Н. Н. Структура волн сжатия в неупругих средах. — «Изв. АН СССР. МТТ», 1975, № 5.
3. Johnson J. N., Barker L. M. Dislocation dynamics and steady wave profiles in 6061-T6 Aluminum. — «J. Appl. Phys.», 1969, vol. 40, N 11.
4. Jonston W. G., Gilman J. J. Dislocation velocities dislocations and plast flow in crystals. — «J. Appl. Phys.», 1959, vol. 30, N 129.
5. Гилман Дж. Динамика дислокаций и поведение материалов при ударном воздействии. — Сб. пер. Механика, 1970, № 2.
6. Kelly J. M., Gillis P. P. Continuum descriptions of dislocations under stress reversals. — «J. Appl. Phys.», 1974, vol. 45, N 3.
7. Годунов С. К., Козин И. С. Структура ударных волн в упруговязкой среде с нелинейной зависимостью максвелловской вязкости от параметров вещества. — ПМТФ, 1974, № 5.
8. Зельдович Я. Б., Райзер Ю. П. Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений. М., «Наука», 1966.
9. Альшиц В. И., Инденбом В. Л. Динамическое торможение дислокаций. — УФН, 1975, т. 115, вып. 1.
10. Руденко О. В., Солуян С. И. Теоретические основы нелинейной акустики. М., «Наука», 1975.

УДК 539.374

О НЕУСТОЙЧИВОСТИ СФЕРИЧЕСКОГО ТЕЛА ПРИ РАВНОМЕРНОМ НАГРУЖЕНИИ

М. Н. Кирсанов, А. Н. Спорыхин

(Воронеж)

Исходя из трехмерных уравнений теории устойчивости в динамической постановке исследована устойчивость шара из упрочняющегося упруговязкопластического материала при равномерном нагружении. Докритические деформации малые. Показано, что результаты, полученные по приближенной и трех-