

УДК 519.6

**АСИМПТОТИЧЕСКОЕ УСРЕДНЕНИЕ
ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ
С ФАЗОВЫМИ ПЕРЕХОДАМИ В СЛОИСТЫХ СРЕДАХ**

А. Н. Власов¹, В. Л. Саваторова², А. В. Талонов³

¹ *Московский государственный строительный университет,
117935 Москва*

² *Московский государственный горный университет,
117935 Москва*

³ *Московский государственный инженерно-физический институт,
115409 Москва*

При описании многих физических явлений возникает необходимость рассмотрения задач, в которых нужно исследовать теплопроводность в материалах, претерпевающих фазовые превращения с выделением или поглощением тепла. Существенная черта таких задач — наличие движущейся поверхности раздела (фронта) между различными фазами. Первой работой, в которой рассматривались подобные задачи, является, по-видимому, работа Стефана, посвященная изучению толщины полярных льдов. Более общий подход был сформулирован Нейманом (см. [1]).

Описание продвижения фронта плавления — довольно сложная нелинейная задача, точные решения которой имеются только для нескольких частных случаев распространения фронта плавления (затвердевания) в однородных телах [2, 3]. Наличие в среде неоднородностей существенно усложняет решение задач теплопроводности. Даже в случае отсутствия фазовых переходов в неоднородной среде существуют только приближенные аппроксимационные методы [4, 5], а задача о распространении плоского фронта плавления в слоистой среде представляет сложность даже для численных методов [6]. Движение границы раздела фаз, закон которого определяется из решения задачи, не позволяет непосредственно использовать хорошо развитые численные методы, работающие в средах с фиксированными границами (метод конечных элементов, метод граничных элементов).

В настоящей работе предлагается использовать метод асимптотического усреднения [7–10], применяемый в случае неоднородных сред с периодической структурой для решения задачи теплопроводности с учетом процессов фазовых переходов. Цель работы — получение относительно простых аналитических выражений, позволяющих оценить динамику процессов плавления (затвердевания) в материалах со структурой, близкой к периодической.

1. Рассмотрим полубесконечную среду, представляющую собой ряд периодически чередующихся слоев различной толщины (рис. 1). Слои располагаются параллельно свободной поверхности, и размер ячейки периодичности равен H , т. е. для всех параметров среды выполняется условие $R(x) = R(x + mH)$, $m = 1, 2, 3 \dots$. Для заданной геометрии решим задачу о распространении тепла в глубь среды, если в момент времени $t = 0$ на свободной поверхности температура

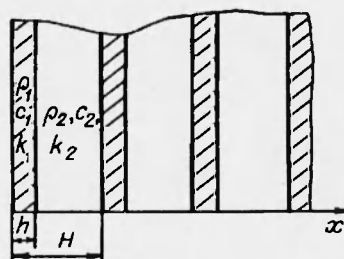


Рис. 1

становится равной T_1 и поддерживается постоянной при $t > 0$. Предполагается, что температура T_1 выше начальной температуры среды T_0 . Распределение температуры в среде будет определяться нестационарным уравнением теплопроводности

$$\rho(x)c(x) \frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(k(x) \frac{\partial T(x,t)}{\partial x} \right) \quad (1.1)$$

с начальным условием

$$T(x,0) = T_0 \quad \text{при } x > 0. \quad (1.2)$$

Здесь $T(x,t)$ — распределение температуры; ρ , c , k — плотность, теплоемкость, коэффициент теплопроводности среды.

В случае, когда $T_1 < \min \{T_1^*, \dots, T_m^*\}$ (T_i^* — температура плавления i -го слоя, $i = 1, \dots, m$, m — число слоев в ячейке периодичности), уравнение (1.1) дополняется граничными условиями

$$T(0,t) = T_1 \quad \text{при } t \geq 0; \quad (1.3)$$

$$[T(x,t)]|_G = 0; \quad (1.4)$$

$$\left[k(x) \frac{\partial T(x,t)}{\partial x} \right] |_G = 0, \quad (1.5)$$

где квадратные скобки обозначают скачок на границе слоев G , т. е. $[T(x,t)]|_G = T(x,t)|_{G+0} - T(x,t)|_{G-0}$.

В рамках метода асимптотического усреднения [7] решение задачи (1.1)–(1.5) для периодической среды ищется в виде

$$T(x, \xi, t) = T^{(0)}(x, \xi, t) + \varepsilon T^{(1)}(x, \xi, t) + \dots + \varepsilon^n T^{(n)}(x, \xi, t). \quad (1.6)$$

Здесь ε — малый параметр, равный отношению размера ячейки периодичности H к характерному размеру задачи ($\varepsilon \ll 1$); $\xi = x/\varepsilon$ — быстрая переменная, которая в пределах каждой ячейки изменяется от 0 до H .

Подставим разложение (1.6) в исходное уравнение (1.1), предварительно осуществив переход к переменным (x, ξ, t) . Тогда, учитывая правило дифференцирования сложной функции и приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях ε , получим

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left(k(\xi) \frac{\partial T^{(0)}}{\partial \xi} \right) = 0; \quad (1.7)$$

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left(\hat{k}(\xi) \frac{\partial T^{(1)}}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial}{\partial \xi} \left(k(\xi) \frac{\partial T^{(0)}}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(k(\xi) \frac{\partial T^{(0)}}{\partial \xi} \right) = 0; \quad (1.8)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\hat{k}(\xi) \frac{\partial T^{(2)}}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial}{\partial \xi} \left(k(\xi) \frac{\partial T^{(1)}}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(k(\xi) \frac{\partial T^{(1)}}{\partial \xi} \right) + \\ + \frac{\partial}{\partial x} \left(k(\xi) \frac{\partial T^{(0)}}{\partial x} \right) - \rho(\xi)c(\xi) \frac{\partial T^{(0)}}{\partial t} = 0; \quad (1.9) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dots \dots \dots \\ \frac{\partial}{\partial \xi} \left(k(\xi) \frac{\partial T^{(n+2)}}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial}{\partial \xi} \left(k(\xi) \frac{\partial T^{(n+1)}}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(k(\xi) \frac{\partial T^{(n+1)}}{\partial \xi} \right) + \\ + \frac{\partial}{\partial x} \left(\hat{k}(\xi) \frac{\partial T^{(n)}}{\partial x} \right) - \rho(\xi)c(\xi) \frac{\partial T^{(n)}}{\partial t} = 0, \quad (1.10) \end{aligned}$$

где $\rho(\xi)$, $c(\xi)$, $k(\xi)$ — периодические функции с периодом H .

Подстановка разложения (1.6) в начальное и граничное условия после приравнивания коэффициентов при одинаковых степенях ε дает

$$T^{(n)}(x, \xi, 0) = \begin{cases} T_0, & n = 0 \\ 0, & n \geq 1 \end{cases} \quad \text{при } x > 0,$$

$$T^{(n)}(0, \xi, t) = \begin{cases} T_1, & n = 0 \\ 0, & n \geq 1 \end{cases} \quad \text{при } t > 0,$$

$$[T^{(n)}(x, \xi, t)]\Big|_G = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

$$\left[k(x) \frac{\partial T^{(n)}(x, \xi, t)}{\partial x} \right]\Big|_G = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Считая формально x и ξ независимыми переменными, будем рассматривать соотношение (1.7)–(1.10) как рекуррентную цепочку дифференциальных по ξ уравнений с неизвестной функцией $T^{(i)}(x, \xi, t)$ ($i = 0, 1, 2, \dots, n$) и соответствующими начальными и граничными условиями. При этом x считается параметром уравнений (1.7)–(1.10).

Функции $T^{(i)}(x, \xi, t)$ ($i = 0, 1, 2, \dots, n$) являются периодическими по ξ . Согласно [7], интегрирование уравнения (1.7) по быстрой переменной с последующим усреднением по периоду дает независимость $T^{(0)}(x, \xi, t)$ от ξ .

Используя при интегрировании уравнений (1.8), (1.9) условие независимости $T^{(0)}$ от быстрой переменной ξ , можно показать, что первый член в разложении (1.6) записывается в виде

$$T^{(0)}(x, t) = T_1 - (T_1 - T_0) \operatorname{erf}(x/2(\chi t)^{1/2}).$$

Здесь $\operatorname{erf}(y)$ — интеграл ошибок; $\widehat{K} = \langle 1/k(\xi) \rangle^{-1}$; $\chi = \widehat{K}/\langle \rho c \rangle$ — эффективный коэффициент теплопроводности; угловые скобки означают усреднение по ячейке периодичности. Второй член разложения записывается как

$$T^{(1)}(x, \xi, t) = -(T_1 - T_0) \frac{\exp(-x^2/4\chi t)}{(\pi\chi t)^{1/2}} \int_0^\xi \left(\frac{\widehat{K}}{k(\eta)} - 1 \right) d\eta,$$

и, следовательно, после того, как вернемся к переменным (x, t) , решение исходной задачи в первом приближении примет вид

$$T(x, t) \approx T_1 - (T_1 - T_0) \left\{ \operatorname{erf} \left(\frac{x}{2\sqrt{t\chi}} \right) + \frac{\exp(-x^2/4\chi t)}{(\pi\chi t)^{1/2}} \int_0^x \left(\frac{\widehat{K}}{k(\eta)} - 1 \right) d\eta \right\}. \quad (1.11)$$

Как показано в [7], учет нулевой и первой поправки дает результат, близкий к точному решению. Однако с помощью уравнений (1.7)–(1.10) можно получить рекуррентное выражение для определения поправок более высокого порядка и решение задачи с произвольной наперед заданной точностью.

2. Обратимся к случаю, когда температура T_1 превышает температуру плавления какого-либо из слоев, например первого ($T_1 > T_1^*$). Будем рассматривать плавление как мгновенный процесс. В рамках такого подхода различные фазы разделяются плоской движущейся поверхностью (фронтом плавления). В этом случае исходная задача (1.1) помимо начального условия (1.2) и граничного (1.3) будет иметь дополнительные граничные условия, заданные на фронте плавления. Первое из этих усло-

вий следует из неизменности температуры на границе фазового перехода

$$T(x, t) \Big|_{x=x_f(t)} = T_1^*, \quad (2.1)$$

а второе является уравнением теплового баланса

$$\left[k(x) \frac{\partial T(x, t)}{\partial x} \right] \Big|_{x=x_f(t)} = \rho(x_f) \lambda(x_f) \frac{dx_f}{dt}, \quad (2.2)$$

где λ — удельная теплота плавления; $x_f(t)$ — координата фронта плавления, закон изменения которой определяется в ходе решения задачи.

Из уравнения (2.1) формально следует, что фронт плавления распространяется в средах, где не происходит фазового перехода. В этом случае в уравнении (2.2) в таких средах нужно считать $\lambda = 0$ и данное уравнение переходит в соответствующее условие (1.5). Следуя методу асимптотического усреднения, решение поставленной задачи снова будем искать в виде ряда (1.6). Подстановка этого разложения в (1.1) дает для определения $T^{(n)}(x, \xi, t)$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) уже известную систему уравнений (1.7)–(1.10). Граничные и начальные условия в нулевом приближении имеют вид

$$\begin{aligned} T^{(0)}(x, \xi, 0) = T_0 \quad \text{при } x > 0, \quad T^{(0)}(0, \xi, t) = T_1 \quad \text{при } t \geq 0, \\ T^{(0)}(x, \xi, t) \Big|_{\substack{x=x_f(t) \\ \xi=\xi_f(t)}} = T_1^*, \quad \left[k(\xi) \frac{\partial T^{(0)}}{\partial \xi} \right] \Big|_{\substack{x=x_f(t) \\ \xi=\xi_f(t)}} = 0, \end{aligned} \quad (2.3)$$

а в первом приближении соответственно

$$\begin{aligned} T^{(1)}(x, \xi, 0) = 0 \quad \text{при } x > 0, \quad T^{(1)}(0, \xi, t) = 0 \quad \text{при } t \geq 0; \\ T^{(1)}(x, \xi, t) \Big|_{\substack{x=x_f(t) \\ \xi=\xi_f(t)}} = 0; \end{aligned} \quad (2.4)$$

$$\left[k(\xi) \left(\frac{\partial T^{(0)}}{\partial x} + \frac{\partial T^{(1)}}{\partial \xi} \right) \right] \Big|_{\substack{x=x_f(t) \\ \xi=\xi_f(t)}} = \lambda(\xi_f) \rho(\xi_f) \frac{dx_f}{dt}. \quad (2.5)$$

Отметим, что переход к координатам x и ξ приводит к необходимости формального введения закона изменения во времени положения фронта плавления в ячейке $\xi_f(t)$.

Для удобства введем следующие обозначения: $\rho_-(\xi)$, $c_-(\xi)$, $k_-(\xi)$ — характеристики среды за фронтом плавления, а $\rho_+(\xi)$, $c_+(\xi)$, $k_+(\xi)$ — перед фронтом плавления. Из уравнения (1.7) вытекает, что нулевая поправка может быть записана в общем виде

$$T^{(0)}(x, \xi, t) = \begin{cases} A(x, t) \int d\xi / k_-(\xi) + v_0(x, t), & 0 \leq x \leq x_f(t), \\ A(x, t) \int d\xi / k_+(\xi) + v_0(x, t), & x > x_f(t). \end{cases} \quad (2.6)$$

Можно показать, что нулевая поправка (2.6) будет удовлетворять условиям (2.3) для любых положений фронта $x_f \geq 0$ только при $A(x, t) \equiv 0$, т. е., как и при отсутствии фазовых переходов, в нулевом приближении решение данной задачи также не зависит от быстрой переменной ξ , и

$$T^{(0)}(x, \xi, t) = v_0(x, t). \quad (2.7)$$

В этом случае первая поправка

$$T^{(1)}(x, \xi, t) = \begin{cases} N_1^-(\xi) \frac{\partial v_0(x, t)}{\partial x} + C_1(x, t), & 0 \leq x \leq x_f(t), \\ N_1^+(\xi) \frac{\partial v_0(x, t)}{\partial x} + C_2(x, t), & x > x_f(t), \end{cases}$$

где

$$N_1^-(\xi) = \int_0^\xi \left(\frac{\langle 1/k_- \rangle^{-1}}{k_-(\eta)} - 1 \right) d\eta, \quad N_1^+(\xi) = \int_\xi^H \left(\frac{\langle 1/k_+ \rangle^{-1}}{k_+(\eta)} - 1 \right) d\eta. \quad (2.8)$$

В соотношении (2.8) при определении функций $N_1^-(\xi)$, $N_1^+(\xi)$ было использовано выражение (1.8) и условие, что среда перед фронтом плавления сохраняет периодичность, а в процессе фазового перехода происходит формирование периодической среды за фронтом плавления с ячейкой периодичности, характеризуемой уже другими свойствами.

Учитывая соотношение (2.8) и граничное условие (2.5), получаем уравнение для определения закона движения фронта плавления:

$$\langle 1/k_+ \rangle^{-1} \frac{\partial v_0}{\partial x} \Big|_{x=x_f+0} - \langle 1/k_- \rangle^{-1} \frac{\partial v_0}{\partial x} \Big|_{x=x_f-0} = \langle \lambda \rho \rangle \frac{dx_f}{dt}. \quad (2.9)$$

Поскольку функция $v_0(x, t)$, являясь нулевой поправкой к решению, описывает усредненную среду, то в данном уравнении плавление рассматривается как непрерывный процесс, происходящий в среде с усредненными свойствами.

Подстановка (2.7), (2.8) в уравнение (1.9) после интегрирования по ξ дает:

при $0 \leq x \leq x_f(t)$

$$k_-(\xi) \frac{\partial T^{(2)}}{\partial \xi} = \int \left(\rho_- c_- \frac{\partial v_0(x, t)}{\partial t} - \langle 1/k_- \rangle^{-1} \frac{\partial^2 v_0(x, t)}{\partial x^2} \right) d\xi - \\ - k_- N_1^-(\xi) \frac{\partial^2 v_0(x, t)}{\partial x^2} - k_- \frac{\partial C_1(x, t)}{\partial x} + D(x, t), \quad (2.10)$$

а при $x > x_f(t)$

$$k_+(\xi) \frac{\partial T^{(2)}}{\partial \xi} = \int \left(\rho_+ c_+ \frac{\partial v_0(x, t)}{\partial t} - \langle 1/k_+ \rangle^{-1} \frac{\partial^2 v_0(x, t)}{\partial x^2} \right) d\xi - \\ - k_+ N_1^+(\xi) \frac{\partial^2 v_0(x, t)}{\partial x^2} - k_+ \frac{\partial C_2(x, t)}{\partial x} + D(x, t).$$

В ячейках перед фронтом плавления среду можно считать периодической и, значит, пользоваться процедурой усреднения, подобно тому, как это делалось при выводе уравнения (1.11). За фронтом плавления также формируется периодическая среда. Для того чтобы в пределе при переходе к периодической среде без фронта снова было получено решение (1.11), необходимо выполнение равенства

$$\langle k_{+,-} \left(\frac{\partial T^{(2)}}{\partial \xi} + N_1^{\pm}(\xi) \left(\frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + \frac{\partial C_{1,2}}{\partial x} \right) - D(x, t) \right) \rangle = 0, \quad (2.11)$$

и тогда усреднение выражений (2.10) даст

$$\begin{aligned} \langle \rho_- c_- \rangle \frac{\partial v_0(x, t)}{\partial t} - \langle 1/k_- \rangle^{-1} \frac{\partial^2 v_0(x, t)}{\partial x^2} &= 0 \quad \text{при } 0 \leq x \leq x_f(t), \\ \langle \rho_+ c_+ \rangle \frac{\partial v_0(x, t)}{\partial t} - \langle 1/k_+ \rangle^{-1} \frac{\partial^2 v_0(x, t)}{\partial x^2} &= 0 \quad \text{при } x > x_f(t). \end{aligned}$$

Равенство (2.11) служит дополнительным условием для определения второй поправки $T^{(2)}$ до и после фронта плавления. Обозначая

$$\chi_1 = \frac{\langle 1/k_- \rangle^{-1}}{\langle \rho_- c_- \rangle}, \quad \chi_2 = \frac{\langle 1/k_+ \rangle^{-1}}{\langle \rho_+ c_+ \rangle},$$

для определения $v_0(x, t)$ имеем задачу

$$\begin{aligned} \chi_1 \frac{\partial^2 v_0(x, t)}{\partial x^2} &= \frac{\partial v_0(x, t)}{\partial t} \quad \text{при } 0 \leq x \leq x_f(t), \\ \chi_2 \frac{\partial^2 v_0(x, t)}{\partial x^2} &= \frac{\partial v_0(x, t)}{\partial t} \quad \text{при } x > x_f(t) \end{aligned} \quad (2.12)$$

с граничным условием (2.9) и условиями

$$v_0(x, 0) = T_0, \quad x > 0, \quad v_0(0, t) = T_1, \quad t \geq 0, \quad v_0(x, t)|_{x=x_f(t)} = 0, \quad (2.13)$$

полученными подстановкой (2.7) в первые три выражения из (2.3).

Легко видеть, что задача (2.12) с условиями (2.9) и (2.13) является аналогом известной задачи Стефана (см. [1]). Поэтому ее решение должно иметь вид

$$v_0(x, t) = \begin{cases} T_1 + (T_1^* - T_1) \frac{\operatorname{erf}(x/2(\chi_1 t)^{1/2})}{\operatorname{erf}(\alpha/2(\chi_1)^{1/2})}, & 0 \leq x \leq x_f(t), \\ T_0 + (T_1^* - T_0) \frac{\operatorname{erf}(x/2(\chi_2 t)^{1/2}) - 1}{\operatorname{erf}(\alpha/2(\chi_2)^{1/2}) - 1}, & x > x_f(t) \end{cases} \quad (2.14)$$

(α — постоянная, связанная с положением фронта $x_f(t)$ соотношением $x_f(t) = \alpha(t)^{1/2}$).

Граничное условие (2.9) с учетом (2.14) дает для определения постоянной α уравнение

$$\begin{aligned} (\chi_2)^{1/2} \langle \rho_+ c_+ \rangle (T_1^* - T_0) \frac{\exp(-\alpha^2/4\chi_2)}{\operatorname{erf}(\alpha/2(\chi_2)^{1/2}) - 1} - \\ - (\chi_1)^{1/2} \langle \rho_- c_- \rangle (T_1^* - T_1) \frac{\exp(-\alpha^2/4\chi_1)}{\operatorname{erf}(\alpha/2(\chi_1)^{1/2})} = \frac{(\pi)^{1/2}}{2} \alpha \langle \lambda \rho \rangle, \end{aligned} \quad (2.15)$$

которое может быть решено численно.

Для того чтобы получить первую поправку $T^{(1)}(x, \xi, t)$, подставим (2.14) в выражения (2.8) и, пользуясь условием (2.4), получим при переходе к фронту слева

$$T^{(1)} \Big|_{\substack{x=x_f-0 \\ \xi=\xi_f-0}} = \int_0^{\xi_f} \left(\frac{\langle 1/k_- \rangle^{-1}}{k_-(\eta)} - 1 \right) d\eta \frac{\exp(-x_f^2/4\chi_1 t)}{\operatorname{erf}(\alpha/2\sqrt{\chi_1})} \frac{T_1^* - T_1}{\sqrt{\chi_1 \pi t}} + C_1(x_f-0, t) = 0$$

и аналогично справа

$$T^{(1)} \Big|_{\substack{x=x_f+0 \\ \xi=\xi_f+0}} = \int_{\xi_f}^H \left(\frac{\langle 1/k_+ \rangle^{-1}}{k_+(\eta)} - 1 \right) d\eta \frac{\exp(-x_f^2/4\chi_2 t) T_1^* - T_0}{\operatorname{erf}(\alpha/2\sqrt{\chi_2}) - 1 \sqrt{\chi_2 \pi t}} + C_2(x_f+0, t) = 0.$$

Из двух последних уравнений легко можно выразить C_1 и C_2 в той точке, где находится фронт. Но, поскольку $x_f(t)$ может пробегать все возможные значения x , то полученные таким образом выражения для $C_1(x_f, t)$ и $C_2(x_f, t)$ должны быть справедливыми и для любых x :

$$C_1(x, t) = \int_0^{\xi_f} \left(1 - \frac{\langle 1/k_- \rangle^{-1}}{k_-(\eta)} \right) d\eta \frac{\exp(-x^2/4\chi_1 t) T_1^* - T_1}{\operatorname{erf}(\alpha/2(\chi_1)^{1/2}) (\chi_1 \pi t)^{1/2}},$$

$$C_2(x, t) = \int_{\xi_f}^H \left(1 - \frac{\langle 1/k_+ \rangle^{-1}}{k_+(\eta)} \right) d\eta \frac{\exp(-x^2/4\chi_2 t) T_1^* - T_0}{\operatorname{erf}(\alpha/2(\chi_2)^{1/2}) - 1 (\chi_2 \pi t)^{1/2}}.$$

Таким образом, первая поправка $\bar{T}^{(1)}(x, \xi, t)$ определена полностью, и теперь можно выписать решение задачи (1.1) с условиями (1.2), (1.3) и (2.1), (2.2), которое в первом приближении имеет вид

$$T(x, t) = \begin{cases} T_1 + \frac{T_1^* - T_1}{\operatorname{erf}(\alpha/2(\chi_1)^{1/2})} \left\{ \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2(\chi_1 t)^{1/2}}\right) + \frac{\exp(-x^2/4\chi_1 t)}{(\chi_1 \pi t)^{1/2}} \int_x^{x_f(t)} \left(1 - \frac{\langle 1/k_- \rangle^{-1}}{k_-(\eta)} \right) d\eta \right\}, & 0 \leq x \leq x_f(t), \\ T_0 + \frac{T_1^* - T_0}{\operatorname{erf}(\alpha/2(\chi_2)^{1/2}) - 1} \left\{ \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2(\chi_2 t)^{1/2}}\right) - 1 + \frac{\exp(-x^2/4\chi_2 t)}{(\chi_2 \pi t)^{1/2}} \int_{x_f(t)}^x \left(1 - \frac{\langle 1/k_+ \rangle^{-1}}{k_+(\eta)} \right) d\eta \right\}, & x > x_f(t). \end{cases} \quad (2.16)$$

Выражение (2.16) в первом приближении описывает распределение температуры в слоистой среде с учетом процессов фазового перехода.

3. С помощью уравнений (1.11) и (2.14)–(2.16) проведен расчет процесса теплопроводности в периодической среде, состоящей из чередующихся слоев льда и глины (см. рис. 1), с учетом и без учета фазовых переходов. Данная среда может быть рассмотрена как упрощенная модель реальной мерзлоты. При расчете использованы характеристики льда: $\rho_1 = 900 \text{ кг/м}^3$, $c_1 = 2100 \text{ Дж/(кг} \cdot \text{град)}$, $k_1 = 2,226 \text{ Вт/(м} \cdot \text{град)}$, $\lambda_1 = 330000 \text{ Дж/кг}$, глины: $\rho_2 = 2000 \text{ кг/м}^3$, $c_2 = 752 \text{ Дж/(кг} \cdot \text{град)}$, $k_2 = 1,113 \text{ Вт/(м} \cdot \text{град)}$ (см. [11]). Размер ячейки периодичности $H = 4 \text{ см}$, а соотношение размеров слоев определялось отношением $h/H = 0,25$.

На рис. 2 приведены результаты расчета распределения температуры в первых ячейках периодичности через 12 ч после того, как среда с начальной температурой $T_0 = -5^\circ\text{C}$ стала нагреваться. При этом на свободной поверхности поддерживалась температура $T_1 = -2^\circ\text{C}$. Расчет выполнялся с точностью до второй поправки в разложении (1.6), что позволило учесть влияние неоднородности среды. Следует отметить, что в пределах каждого слоя температура менялась по закону, близкому к линейному. Это хорошо согласуется с результатами численных расчетов.

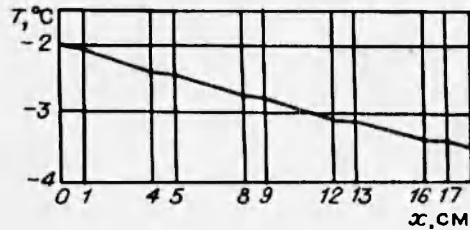


Рис. 2

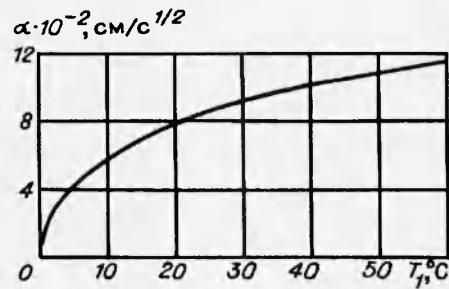


Рис. 3

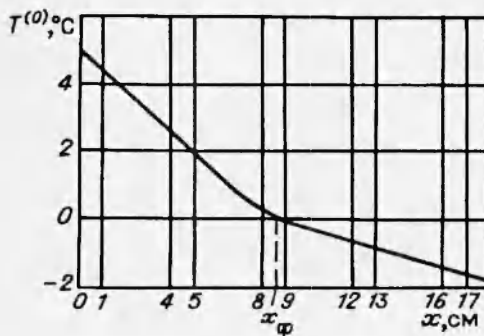


Рис. 4

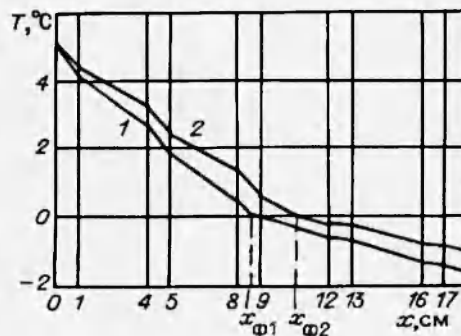


Рис. 5

При условии $T_1 > 0$ в среде начинаются процессы плавления. Движение фронта плавления в рамках данной модели определяется параметром α . На рис. 3 представлена зависимость этого параметра от температуры на свободной поверхности. При расчете вода, образующаяся при плавлении льда, характеризовалась параметрами: $\rho_3 = 1000 \text{ кг/м}^3$, $c_3 = 4200 \text{ Дж/(кг} \cdot \text{град)}$, $k_3 = 0,567 \text{ Вт/(м} \cdot \text{град)}$.

На рис. 4, 5 показаны результаты расчетов распределения температуры при $T_1 = 5^\circ\text{C}$ и $T_0 = -5^\circ\text{C}$, когда в среде происходят фазовые переходы лед — вода. На рис. 4 приведено значение нулевой поправки $T^{(0)}$ на момент времени $t = 12$ ч, когда фронт плавления находится на расстоянии $x_f = 8,54$ см от свободной поверхности. Зависимость $T^{(0)}$ от x носит плавный характер, и даже положение фронта фазового перехода не является точкой излома. Однако учет первой поправки (рис. 5, кривая 1) приводит к появлению точек излома на границах слоев и на фронте плавления. Кривая 2 — результаты расчета на момент времени $t = 18$ ч, когда фронт плавления, интерпретируемый в рассматриваемом подходе как поверхность с температурой $T_1^* = 0$, находится в глине. Сравнение результатов расчета по динамике изменения температуры в периодической среде, полученных с помощью метода асимптотического усреднения и численных методов, показало хорошее совпадение.

Таким образом, разработанный в рамках метода асимптотического усреднения подход позволяет с помощью аналитических соотношений описать процесс распространения тепла в периодических средах, в том числе

с учетом фазовых переходов. Существенным преимуществом данного метода является возможность учета большого числа слоев в пределах одной ячейки периодичности с произвольным соотношением их размеров и физических характеристик.

ЛИТЕРАТУРА

1. Франк Ф., Мизес Р. Дифференциальные и интегральные уравнения математической физики. М.: ОНТИ, 1937.
2. Карслоу Г., Егер Д. Теплопроводность твердых тел. М.: Наука, 1964.
3. Лыков А. В. Теория теплопроводности. М.: Высш. шк., 1967.
4. Stormer. Geometrisch ein Dimensionale Varmelating Baem Schelzern und Rctarren // Wiss. Veröff. Siemens-Werken. 1938. V. 17. P. 90.
5. Lecomte D., Batsale J.-C. A suitable approximate solution of Neumann's problem // Technical Notes. 1990. V. 6. P. 894-897.
6. Saliba T. E., Servais R. A. Two-dimensional heat transfer through complex-shaped composite materials. Pt 1: Literature review and model development // J. Thermophysics. 1990. V. 4, N 4. P. 493-498.
7. Бахвалов Н. С., Панасенко Г. П. Осреднение процессов в периодических средах. М.: Наука, 1984.
8. Spagnolo S. Sul limite delle soluzioni di problemi di Cauchy relativi all equazioni dell calore // Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa. 1967. V. 21, N 4. P. 657-693.
9. Колпаков А. Г. G-сходимость одного класса эволюционных операторов // Сиб. мат. журн. 1988. Т. 29, № 2. С. 90-104.
10. Damlamian A. Homogenisation du problem de Stefan // C. R. Acad. Sci. Ser. A. 1979. V. 289, N 1. P. 9-11.
11. Таблицы физических величин. Справочник / Под ред. И. К. Кикоина. М.: Атомиздат, 1976.

*Поступила в редакцию 23/VI 1994 г.,
в окончательном варианте — 12/IX 1994 г.*