УДК 539.3:534.1

И. А. Поташников

ИЗГИБНЫЕ РЕЗОНАНСНЫЕ ВОЛНЫ В ОБОЛОЧКЕ С ПРИСОЕДИНЕННЫМИ МАССАМИ

В публикациях, посвященных изучению нестационарного деформирования протяженных цилиндрических конструкций под действием движущейся поверхностной нагрузки (см., например, [1—3]), существенное внимание уделяется анализу дисперсионных кривых (зависимости фазовой скорости c от волнового числа q), который позволяет выявить особые точки (q_*, c_*), где фазовые и групповые ($c_g = c + q\,dc/dq$) скорости равны. В [2] показано, что группы волн с длинами, близкими к $2\pi/q_*$, распространяются почти без дисперсии и формируют волновой пакет с квазистационарной огибающей, движущийся с постоянной скоростью c_*. Величина $c = c_*$ определяет критическую скорость движения нагрузки. Численное моделирование изгибных резонансных волн в цилиндрической оболочке проведено в [4], а в более сложной системе — оболочке с амортизированной средой — в [5], где также показано, что средневолновая часть спектра в зависимости от параметров системы может иметь различное число особых точек, причем, несмотря на одинаковую степень роста резонансных волн, определяемую асимптотикой, качественная картина развития возмущений при разных c_{j*} ($j = 1, \ldots, m$; m — число особых точек) различна. Этот факт, обнаруженный в численном эксперименте, потребовал теоретического обоснования и дополнительного анализа результатов, что проведено ниже.

Рассматривается чисто изгибное напряженное состояние бесконечно длинной тонкой цилиндрической оболочки, контактирующей со средой плотности m_0 и частотой амортизации f^2. Система уравнений движения при моделировании среды инерционными массами имеет вид

$$\ddot{w} = -\varepsilon w^{(\mathrm{IV})}_{,x} - w + h^{-1}\overline{m}_0 f^2 (W - w) + Q_1 h^{-1}, \tag{1.1}$$

$$\ddot{W} = f^2 (w - W) + Q_2 m_0^{-1}, \quad \varepsilon = h^2/12, \quad \overline{m}_0 = m_0/\rho,$$

где w, W — перемещения оболочки и амортизированных масс; $Q_{1,2} = A_{1,2} H_0(t) H_0(c_0 t - |x|)$ — приложенные к оболочке и массам нагрузки ($A_{1,2}$ — амплитуды, $H_0(z)$ — функция Хевисайда); h — толщина оболочки; единицами измерения служат скорость звука в тонкой пластине $c_p = \sqrt{E/[\rho(1 - \nu^2)]}$, плотность материала оболочки ρ и ее радиус R.

Вследствие симметрии нагрузки достаточно рассмотреть область $x \geqslant 0$, тогда в плоскости $x = 0$ должны выполняться граничные условия $w'_{,x} = w'''_{,x} = 0$ $(x = 0)$. Начальные условия нулевые, а при $x \to \infty$ ставится условие излучения w, $W \to 0$ $(x \to \infty)$.

Применим к (1.1) интегральные преобразования Лапласа по t (с параметром p) и Фурье по x (с параметром q). Двукратной трансформанте придадим значок $(\ )^{LF}$. Тогда решение в изображениях запишется так:

$$w^{LF} = \frac{(p^2 + f^2) Q_1^{LF} + f^2 Q_2^{LF}}{hA(p, q)}, \tag{1.2}$$

$$W^{LF} = \frac{(p^2 + \varepsilon q^4 + 1) h m_0^{-1} Q_2^{LF} + f^2 \left(Q_1^{LF} + Q_2^{LF}\right)}{hA(p, q)},$$

где $A(p, q)$ — дисперсионный оператор:

$$A(p, q) = (p^2 + \varepsilon q^4 + 1)(p^2 + f^2) + h^{-1}\overline{m}_0 f^2 p^2. \tag{1.3}$$

Рассмотрим дисперсионные свойства гармонических волн, распространяющихся в исследуемой системе. В (1.3) положим $p = iqc$ (q — волновое число, c — фазовая скорость) и приравняем его нулю. В результате получим уравнение второй степени относительно c^2, определяющее две моды гармонических колебаний. Его корни имеют вид

$$c_1(q) = \sqrt{(a - b)/2}, \quad c_2(q) = \sqrt{(a + b)/2}, \quad a = dq^{-2} + \varepsilon q^2, \tag{1.4}$$

$$b = \sqrt{a^2 - 4f^2(1 + \varepsilon q^4) q^{-4}}, \quad d = f^2(1 + h^{-1}\overline{m}_0) + 1.$$

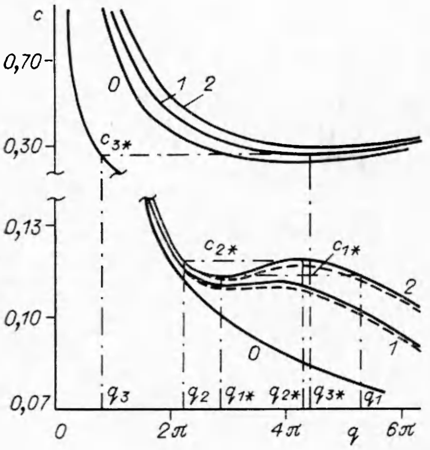


Рис. 1

Здесь в зависимости от жесткости оболочки, плотности среды, частоты амортизации возможно появление на дисперсионной кривой первой (нижней) моды различных экстремумов (c_{j*}, $j = 1, 2$) — минимума, максимума, точки перегиба, при этом вторая мода всегда имеет минимум c_{3*} (рис. 1, сплошные кривые; номерам 0, 1, 2 соответствуют $f^2 = 1$; 3,6; 4,9, $m_0 = 0{,}05$). Из рис. 1 видно, что прямые $c = c_{j*}$ ($f^2 > 3{,}6$), имея касание с фазовыми кривыми в точках $q = q_{j*}$, в то же время пересекают кривую первой моды в точках q_j ($j = 1, 2, 3$). Таким образом, при движении нагрузки с критической скоростью c_{j*} в системе одновременно формируются возмущения с длинами волн $2\pi/q_{j*}$ и $2\pi/q_j$, и вклад резонансных колебаний с частотой формы q_{j*} в суммарный процесс на конечном временно́м интервале заранее не известен. Какую при этом долю энергии возьмет на себя та или иная мода, зависит от соотношения амплитуд в разложении нагрузки по формам движения, отвечающим этим модам, и от величин групповых скоростей в точках $q = q_j$.

Перейдем к решению системы (1.1). Получить оригиналы в явном виде из (1.2) проблематично, поэтому будем искать асимптотику возмущений при больших временах ($t \to \infty$) с начала действия нагрузки. Для этого воспользуемся методом совместного обращения двукратных интегральных преобразований в окрестности луча $x = c_{j*}t + \eta$, $\eta = \mathrm{const}$ [2]. При переходе на луч в изображениях $f^{LF}(p, q)$ искомых функций делается замена $p = s + i\bar{q}_j c_{j*} + iq'x/t$ ($s \to 0$, $\bar{q}_j$ принимает значения q_{j*} или q_j, а q' — малая величина, определяющая окрестность точек $q = \pm\bar{q}_j$, по которой в дальнейшем происходит интегрирование).

Опуская промежуточные выкладки, выпишем полученные асимптотические формулы эволюции возмущений (сохраняя вклад от нерастущих составляющих решения). Когда скорость нагрузки $c = c_{j*}$ ($j = 1, 2$) соответствует максимуму (минимуму) дисперсионной кривой первой моды, асимптотика ($t \to \infty$) возмущений имеет вид

$$(1.5)\quad w, W \sim B_{w,W}\left\{\left(\operatorname{sgn}\eta + \left[C\left(\frac{\varkappa_0^2}{4}\right) + S\left(\frac{\varkappa_0^2}{4}\right)\right]\operatorname{sgn}\varkappa_0\right)\cos(q_j\eta) + \right.$$

$$\left. + \left[C\left(\frac{\varkappa_0^2}{4}\right) - S\left(\frac{\varkappa_0^2}{4}\right)\right]\operatorname{sgn}\varkappa_0 \operatorname{sgn}\varphi_0 \sin(q_j\eta)\right\} +$$

$$+ D_{w,W}t^{1/2}\left[F_1(\varkappa)\cos(q_{j*}\eta) + F_2(\varkappa)\sin(q_{j*}\eta)\operatorname{sgn}\varphi\right],$$

$$B_w = -\frac{(A_1 + A_2) f^2 - A_1 q_j^2 c_{j*}^2}{\psi}, \quad D_w = -\frac{(A_1 + A_2) f^2 - A_1 q_{j*}^2 c_{j*}^2}{\chi},$$

$$B_W = -\frac{(A_1 + A_2) f^2 + A_2\left(\varepsilon q_j^4 + 1 - q_j^2 c_{j*}^2\right) h m_0^{-1}}{\psi},$$

$$D_W = -\frac{(A_1 + A_2) f^2 + A_2\left(\varepsilon q_{j*}^4 + 1 - q_{j*}^2 c_{j*}^2\right) h m_0^{-1}}{\chi},$$

$$\eta = x - c_{j*}t, \quad \varkappa_0 = \left(c_{g1}^0 t - x\right)\left(|\varphi_0|\, t\right)^{-1/2}, \quad \varkappa = -\eta\left(|\varphi|\, t\right)^{-1/2},$$

$$\varphi_0 = \frac{1}{2}\left.\frac{dc_{g1}}{dq}\right|_{q=q_j}, \quad \varphi = \frac{1}{2}\left.\frac{dc_{g1}}{dq}\right|_{q=q_{j*}}, \quad c_{g1}^0 = c_{g1}(q_j),$$

$$c_{g1} = c_{g1}(q) = [qc_1(q)]_q', \quad \psi = 2hq_j^4 c_{j*}\left(c_2^2(q_j) - c_{j*}\right)\left(c_{g1}^0 - c_{j*}\right),$$

$$\chi = \pi h q_{j*}^4 c_{j*}\left(c_2^2(q_{j*}) - c_{j*}^2\right)|\varphi|^{1/2},$$

$$F_1(\varkappa) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\left(\cos\left(\frac{\varkappa^2}{4}\right) + \sin\left(\frac{\varkappa^2}{4}\right)\right) - \frac{\pi|\varkappa|}{2}\left[C\left(\frac{\varkappa^2}{4}\right) - S\left(\frac{\varkappa^2}{4}\right)\right],$$

$$F_2(\varkappa) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\left(\cos\left(\frac{\varkappa^2}{4}\right) + \sin\left(\frac{\varkappa^2}{4}\right)\right) - \frac{\pi|\varkappa|}{2}\left[1 - C\left(\frac{\varkappa^2}{4}\right) - S\left(\frac{\varkappa^2}{4}\right)\right].$$

Графики $F_1(\varkappa)$ и $F_2(\varkappa)$ показаны на рис. 2 (кривые *1*, *2*); $S(z)$, $C(z)$ — интегралы Френеля.

Выражения, аналогичные (1.5), можно получить и в случае соответствия скорости нагрузки минимуму кривой второй моды ($j = 3$). Из (1.5) видно, что второе слагаемое с общим множителем $D_{w,W}t^{1/2}$ неограниченно растет с увеличением t и при больших t определяет, по существу, окончательные величины w и W, поскольку выражение в фигурных скобках, стоящее множителем при $B_{w,W}$, — ограниченная функция. Для конечных значений t вклад каждого из двух составных слагаемых асимптотики в суммарную амплитуду можно оценить путем сравнения $B_{w,W}$ и $D_{w,W}t^{1/2}$. Очевидно также, что при определенных значениях некоторых параметров (например, A_1, A_2) возможна ситуация, когда волновой резонанс длительное время не формируется ($B_{w,W} > D_{w,W}t^{1/2}$), а основная доля энергии переносится волнами с длиной $2\pi/q_j$.

Если критическая скорость нагрузки соответствует значению c_{1*}, определяемому точкой перегиба нижней фазовой кривой, то асимптотическое ($t \to \infty$) решение записывается следующим образом:

(1.6) $$w, W \sim R_{w,W}t^{2/3}\left(F_3(\varkappa_1) + F_4(\varkappa_1)\operatorname{sgn}\varphi_1\right)\cos(q_{1*}\eta),$$

$$R_w = -\frac{(A_1 + A_2)f^2 - A_1 q_{1*}^2 c_{1*}^2}{\zeta}, \quad \varkappa_1 = \eta\,(|\varphi_1|\,t)^{-1/3},$$

$$R_W = -\frac{(A_1 + A_2)f^2 + A_2\left(\varepsilon q_{1*}^4 + 1 - q_{1*}^2 c_{1*}^2\right)hm_0^{-1}}{\zeta},$$

$$\zeta = \pi h q_{1*}^4 c_{1*}\left(c_2^2(q_{1*}) - c_{1*}^2\right)|\varphi_1|^{1/3}, \quad \varphi_1 = \frac{1}{6}\left.\frac{d^2 c_{g1}}{dq^2}\right|_{q=q_{1*}},$$

$$F_3(\varkappa) = \int_0^\infty \frac{\cos\varkappa y \sin y^3}{y^3}\,dy, \quad F_4(\varkappa) = \int_0^\infty \frac{\sin\varkappa y\,(1 - \cos y^3)}{y^3}\,dy.$$

Графики функций $2F_3(\varkappa)$, $2F_4(\varkappa)$ представлены на рис. 2 (кривые *3*, *4*).

Анализируя (1.6), легко установить, что по системе вместе с нагрузкой движется возбужденная ею волна с той же фазовой (и групповой) скоростью и растущей пропорционально $t^{2/3}$ амплитудой. Степень резонансного роста при этом по сравнению с (1.5) существенно выше, поскольку порядок кривизны дисперсионной кривой в окрестности точки перегиба меньше, чем в окрестности других экстремумов.

Кроме аналитического, использовался и численный метод исследования исходных уравнений (1.1). Применялась явная конечно-разностная схема типа «крест». Численная дисперсия минимизировалась выбором оптимальных параметров сетки, при которых выполняются условия устойчивости счета и фазовые кривые разностной и континуальной моделей в окрестности экстремумов максимально близки. Как показывает сравнение фазовых зависимостей указанных моделей, добиться полного совпадения критических точек (q_{j*}, c_{j*}) возможно лишь при τ, $\delta \to 0$ (τ, δ — шаги сетки по време-

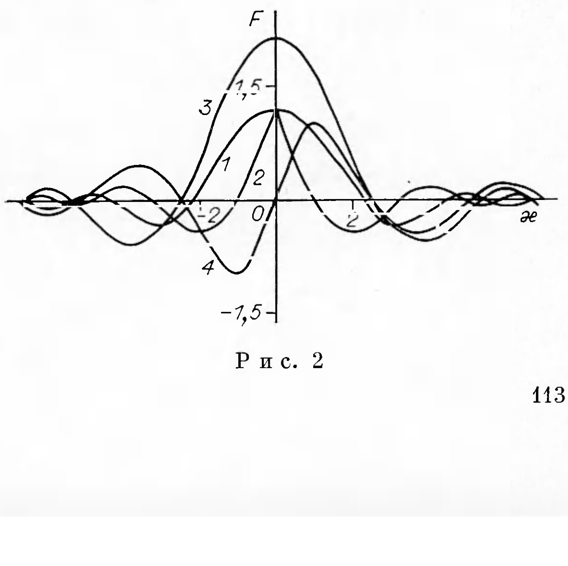
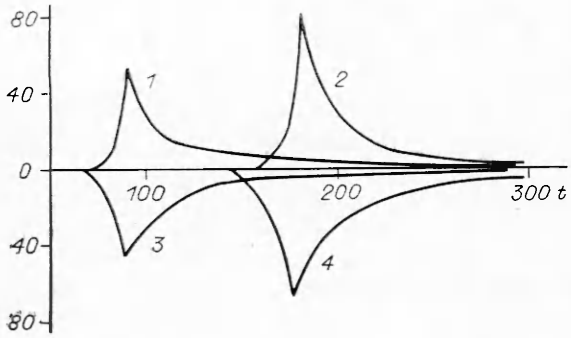


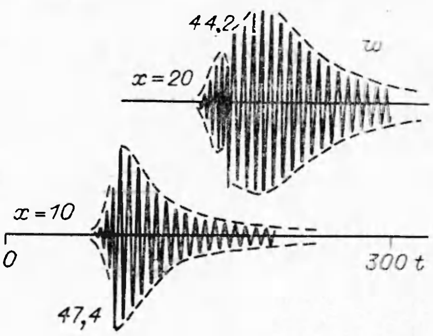
Рис. 2



Р и с. 3

ни и координате), поэтому в численных расчетах значение c_{j*} берется из разностного дисперсионного соотношения — штриховые линии на рис. 1 ($\tau = \delta = h = m_0 = 0{,}05$). Вторая мода в любом случае имеет минимум (например, для $f^2 = 3{,}6$ $q_{3*} = 14{,}45$, $c_{3*} = 0{,}2610$), а первая мода при $f^2 < 3{,}6$ не имеет особых точек, при $f^2 = 3{,}6$ имеет точку перегиба ($q_{1*} = 10{,}98$, $c_{1*} = 0{,}1100$) и при $f^2 > 3{,}6$ — две точки экстремума: минимум и максимум (при $f^2 = 4{,}9$, $q_{1*} = 9{,}25$, $c_{1*} = 0{,}1130$ и $q_{2*} = 13{,}45$, $c_{2*} = 0{,}1163$).

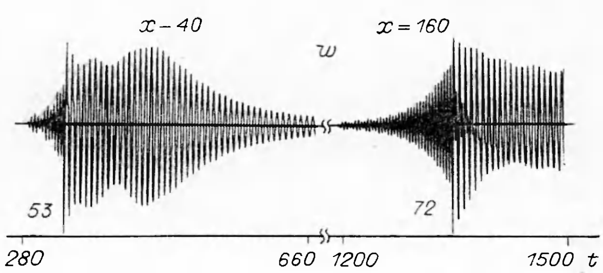
На рис. 3—6 представлены осциллограммы прогиба w оболочки, рассчитанные при $\tau = \delta = h = 0{,}05$ и различных значениях скорости c_0 движущейся ступенчатой нагрузки. Статический прогиб w_c на рис. 6 показан штрихпунктиром (в остальных случаях он не учитывается), пунктир отвечает квазистационарным огибающим. Пиковая амплитуда указана в окрестности максимума каждой приводимой кривой.



Р и с. 4

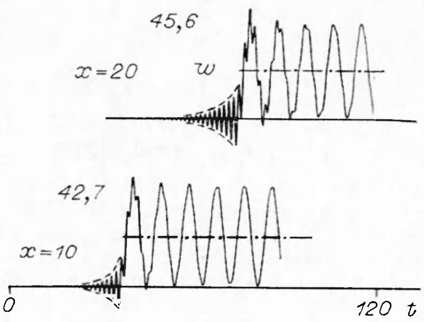
Анализ результатов свидетельствует о том, что максимальный резонансный рост ($\sim t^{2/3}$) реализуется, в соответствии с асимптотикой (1.6), в случае $c_0 = c_{1*} = 0{,}1100$ ($f^2 = 3{,}6$), при этом расплывание пакета с несущей частотой $q_{1*} = 10{,}98$ минимально и $\sim t^{1/3}$ (см. рис. 3: огибающие осциллограмм w в сечениях $x = 10$; 20 (кривые 1, 2), $t \leqslant 300$, $A_1 = 1$, $A_2 = 0$). Когда $c_0 = c_{1*} = 0{,}1130$, в системе также возникает волновой резонанс, но здесь изгибные возмущения растут со временем как $t^{1/2}$, пакет с частотой формы $q_{1*} = 9{,}25$ расплывается тоже пропорционально $t^{1/2}$ (кривые 3, 4 при указанных выше условиях).

Вместе с тем для тех же расчетных значений времени и $c_0 = c_{2*} = 0{,}1163$ резонансный процесс не успевает развиться (см. рис. 4: осциллограммы w в сечениях $x = 10$; 20, $t \leqslant 300$, $A_1 = 1$, $A_2 = 0$, статический прогиб не учитывается). При этом зафиксировано максимальное расплывание пакета волн, в котором вклад «резонансной» частоты формы ($q_{2*} = 13{,}45$) мал, зато преобладает волна с частотой q_2, групповая скорость которой существенно меньше. При сопоставлении численных и аналитических результатов обнаруживается приемлемое качественное и количественное соответствие, которого, очевидно, не наблюдалось бы при от-



Р и с. 5

сутствии в (1.5) нерастущего слагаемого, дающего весьма существенный вклад на начальном этапе. Задержка в развитии резонанса в исследуемой ситуации может быть довольно длительной. Это подтверждают, в частности, полученные с использованием асимптотического решения (1.5) осциллограммы w (см. рис. 5) в сечениях $x = 40$; 160 ($t \leqslant 1500$, $A_1 = 1$, $A_2 = 0$), из которых видно, что изгибные возмущения с «резонансной» частотой формы $q_{2*} = 13{,}45$ (передняя группа) начинают реально проявляться лишь при относительно больших значениях времени (или на большом расстоянии от плоскости $x = 0$).



Р и с. 6

Если при $c_0 = 0{,}1163$ рассмотреть одновременное нагружение оболочки и амортизированных масс и при этом подобрать значения амплитуд A_1 и A_2 так, чтобы в асимптотике (1.5) множитель B_w стал равен нулю, то можно минимизировать влияние возмущений с «нерезонансной» частотой формы q_j на формирование результирующего волнового пакета и развитие резонанса в системе.

Процесс «задержки» резонанса реализуется и при $c_0 = c_{3*} = 0{,}2610$ (см. рис. 6: осциллограммы w в сечениях $x = 10$; 20, $t \leqslant 300$, $A_1 = 1$, $A_2 = 0$). Здесь в основном возбуждается первая мода, возмущения, отвечающие ей, описываются простой асимптотикой: $w = w^0(1 - \cos q_3 \times c_{3*} t)$, которая соответствует предельному случаю $c_0 \to \infty$.

Обобщая приведенные результаты, отметим, что в механической системе, для которой дисперсионный анализ выявляет при одной и той же фазовой скорости c_{j*} распространения возмущений существование нескольких волновых чисел q_{j*} и q_j, возможна длительная задержка в формировании волнового резонанса, возбуждаемого нагрузкой, движущейся с критической скоростью $c_0 = c_{j*}$. Таким образом, при построении асимптотических оценок ($t \to \infty$) возмущений, распространяющихся в системе, целесообразно сохранить и «нерастущие» слагаемые, поскольку только в этом случае можно получить адекватное описание исследуемого волнового процесса на конечном интервале времени, что требуется в практических задачах.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Слепян Л. И.** Резонансные явления в пластинах и оболочках при бегущей нагрузке // Тр. VI Всесоюз. конф. по теории оболочек и пластинок.— М.: Наука, 1966.
2. **Слепян Л. И.** Нестационарные упругие волны.— Л.: Судостроение, 1972.
3. **Пинчукова Н. И., Степаненко М. В.** Низкочастотные резонансные волны в цилиндрической оболочке с присоединенными массами // ФТПРПИ.— 1979.— № 4.
4. **Александрова Н. И., Поташников И. А., Степаненко М. В.** Изгибные резонансные волны в цилиндрической оболочке при движущейся нагрузке // ПМТФ.— 1989.— № 3.
5. **Кадыров Т. К., Поташников И. А., Степаненко М. В.** Резонансное взаимодействие пластин и оболочек со средой при бегущей нагрузке // Тр. XIV Всесоюз. конф. по теории пластин и оболочек, Тбилиси, 1987.— Т. 2.

г. Новосибирск *Поступила 30/XII 1988 г., в окончательном варианте — 13/IV 1989 г.*