

определяется из решения следующего дисперсионного уравнения:

$$(3.1) \quad \omega^2 = -|k|a + (kv_A)^2, \quad v_A = H/\sqrt{4\pi\rho}$$

где  $\rho$  — плотность движущейся плазмы.

Из (3.1) следует, что рассматриваемое движение плазмы наиболее неустойчиво относительно возникновения колебаний с  $k \perp H_0$ . Время нарастания колебаний с  $\lambda \sim L = 10^5$  см составляет  $\sim 10^{-1}$  сек. Эта оценка показывает необходимость более детального анализа вопроса о развитии желобковой неустойчивости в рассматриваемой задаче.

В заключение авторы благодарят А. И. Барченкова, Г. В. Жарову, С. А. Кучая, В. Г. Рогачева и В. П. Стаценко за ценные советы и помощь в работе.

Поступила 17 XII 1973

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Операция «Аргус». М., Атомиздат, 1960.
2. Райзер Ю. П. О торможении и превращениях энергии плазмы, расширяющейся в пустом пространстве, в котором имеется магнитное поле. ПМТФ, 1963, № 6, стр. 19.
3. Пилипенко В. А. О форме границы свободно разлетающейся плазмы в магнитном поле. ПМТФ, 1967, № 2, стр. 126.
4. Roukey J. W. Expansion of a plasma snell into a vacuum magnetic field. Phys. Fluids, 1969, vol. 12, No. 7.
5. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Электродинамика сплошных сред. М., Физматгиз, 1959.
6. Зельдович Я. Б., Райзер Ю. П. Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений. М., «Наука», 1966.
7. Батыгин В. В., Топтыгин И. Д. Сборник задач по электродинамике. М., «Наука», 1970.
8. Баталова М. В., Бахрах С. М., Винокуров О. А., Загускин В. Л., Иванова Л. Н., Калманович А. И., Шиндерман И. Д. Комплекс «Сигма» для расчета задач двумерной газодинамики. Тр. Всес. семинара по численным методам механики вязкой жидкости. Новосибирск, «Наука», 1969, стр. 283—288.
9. Марчук Г. И. Метод расщепления для решения задач математической физики. Сб. «Численные методы решения задач механики сплошных сред». М., ВЦ АН СССР, 1969.
10. Трубников Б. А. Введение в теорию плазмы. М., МИФИ, 1969.

УДК 538.4

#### ДИФФУЗИЯ ПОТОКА ПРИ МАГНИТНОЙ КУМУЛЯЦИИ В УЗКИХ ПОЛОСТЯХ

Е. Н. Биченков, Е. П. Маточкин

(Новосибирск)

Получено уравнение диффузии потока при сжатии однородного магнитного поля в плоской щели. Проведены расчеты для быстрой и медленной накачки полости начальным током, а также для постоянного, линейного возрастающего и возрастающего пропорционально  $\sqrt{t}$  начального тока. Показано, что даже для больших магнитных чисел Рейнольдса потери потока значительны; потери потока существенно зависят от времени накачки и слабо зависят от формы импульса тока накачки.

1. Сжатие магнитного потока внутри проводящего контура называют магнитной кумуляцией. При этом индуктивность цепи  $L$  уменьшается, а ток  $I$  и магнитное поле  $B$  возрастают. Энергия магнитного поля

$$U = \frac{1}{2} LI^2 = \frac{L_0}{L} \left( \frac{LI}{L_0 I_0} \right)^2 = \frac{1}{2} L_0 I_0^2 = \lambda F^2 U_0$$

Здесь  $L_0$  — начальная индуктивность цепи,  $I_0$  — начальный ток в ней,  $\lambda = L_0/L$  — коэффициент перестройки цепи,  $F = LI/L_0I_0$  — доля магнитного потока, оставшаяся в цепи.

Энергетические возможности магнитной кумуляции ограничиваются долей сохраняющегося в цепи потока  $F$ , в связи с чем исследование потерь потока представляет важнейшую задачу при анализе работы энергетических магнитнокумулятивных устройств, так называемых МК генераторов.

Большое количество задач о диффузии магнитного поля в неподвижный проводник приведено в [1]. Решения этих задач переносятся на магнитную кумуляцию путем вычисления эффективной глубины скин-слоя и использования результата о сохранении суммы потока в полости МК генератора и проводнике [2].

Из задач магнитной кумуляции рассмотрены сжатие поля двумя бесконечными плоскими проводниками, движущимися навстречу друг другу с постоянной скоростью [3], и ряд автомодельных осесимметричных задач при  $v = q/2\pi r$  [4]. Проводимость при этом предполагалась постоянной. Показано, что к концу сжатия как в плоской, так и в осесимметричной задачах весь поток уходит в проводник.

2. Среди разных типов МК генераторов выделяются простотой конструкции и хорошими энергетическими показателями плоские генераторы [5,6].

Пренебрегая неоднородностью поля в полости плоского МК генератора и потерями потока в месте соударения стенок кассеты с шинами, можно принять следующую модель непрофилированного плоского МК генератора (фиг. 1).

Однородное магнитное поле сжимается в плоской полости идеальным поршнем, движущимся со скоростью детонации  $D$  между двумя параллельными проводниками. Другая сторона полости замкнута идеальным проводником, что следует из симметрии конструкции генераторов, описанных в [5, 6]. Однородность поля в полости позволяет рассматривать утечку потока лишь в направлении  $x$ , перпендикулярном к поверхности проводников. Проводники можно предполагать неограниченными, так как толщина скин-слоя мала по сравнению с толщиной шин генератора.

Поле в проводнике при  $\sigma = \text{const}$  определяется решением уравнения диффузии [7]

$$(2.1) \quad B_t = \mu^{-1} B_{xx}$$

удовлетворяющим на границе полости  $x = 0$  уравнению индукции и начальному условию соответственно

$$(2.2) \quad \frac{d}{dt} (1-t) B(t) = \frac{2}{\mu} (1-t) B_x|_{x=0}$$

$$(2.3) \quad B(x, 0) = B_0(x)$$

Здесь время отнесено к времени движения сжимающего поршня  $l_0/D$ ,  $x$  — к расстоянию между шинами  $a$ , магнитное поле — к полю  $B_0$  в момент захвата потока, поток — к начальному потоку в полости  $B_0 l_0 a$ .

Параметр  $\mu = 4\pi\sigma a^2 D / c^2 l_0$  представляет собой магнитное число Рейнольдса. Положив

$$(2.4) \quad B_x|_{x=0} = -q(t)$$

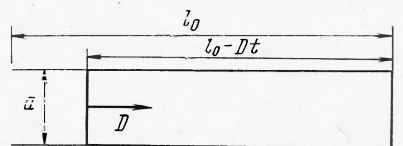
можно найти решение уравнения (2.1), удовлетворяющее условиям (2.3), (2.4), и вычислить из него значение поля на границе проводника

$$B(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi\mu}} \int_0^t \frac{q(\zeta) d\zeta}{\sqrt{t-\zeta}} + \sqrt{\frac{\mu}{\pi}} \frac{1}{\sqrt{t}} \int_0^\infty B_0(\zeta) e^{-\zeta^2\mu/4t} d\zeta$$

Разрешив это интегральное уравнение относительно  $q(t)$ , можно получить значение  $B_x|_{x=0}$  и после подстановки в условие (2.2) прийти к уравнению для поля в полости

$$(2.5) \quad \frac{d}{dt} (1-t) B(t) = -\frac{2(1-t)}{\sqrt{\pi\mu}} \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{B(\tau) d\tau}{\sqrt{t-\tau}} + \frac{2}{\sqrt{\pi\mu}} \frac{1-t}{\sqrt{t}} + f(t)$$

$$(2.6) \quad f(t) = \frac{4(1-t)}{\mu\sqrt{\pi}} \int_0^\infty B_0' \left( \zeta \frac{2\sqrt{t}}{\sqrt{\mu}} \right) e^{-\zeta^2} d\zeta$$



Фиг. 1

После интегрирования (2.5) по времени

$$(2.7) \quad 1 - F = \frac{2}{\sqrt{\pi\mu}} \int_0^t \frac{1+t-2\tau}{\sqrt{t-\tau}} B(\tau) d\tau - \frac{4\sqrt{t}}{\sqrt{\pi\mu}} \left(1 - \frac{t}{3}\right) - \int_0^t f(\tau) d\tau$$

Здесь введен поток в полости  $F = (1-t)B(t)$ . Умножив тождество

$$1 = \frac{1}{\pi} \int_{\tau}^t \frac{d\zeta}{\sqrt{(t-\zeta)(\zeta-\tau)}}$$

на  $(1+t-2\tau)B(\tau)$  и проинтегрировав его по  $\tau$  от 0 до  $t$ , получим

$$\begin{aligned} \int_0^t \left(1 + \frac{t}{2} - \frac{3}{2}\tau\right) B(\tau) d\tau &= \sqrt{\frac{\mu}{\pi}} \sqrt{t} + \left(t - \frac{t^2}{4}\right) + \sqrt{\frac{\mu}{\pi}} \int_0^t f(\tau) \times \\ &\times \sqrt{t-\tau} d\tau - \frac{1}{4} \sqrt{\frac{\mu}{\pi}} \int_0^t \frac{1+t-2\tau}{\sqrt{t-\tau}} B(\tau) d\tau - \frac{1}{4} \sqrt{\frac{\mu}{\pi}} (1-t) \int_0^t \frac{B(\tau) d\delta}{\sqrt{t-\tau}} \end{aligned}$$

После двукратного дифференцирования по времени получаем с помощью (2.5) и (2.7) уравнение для потока в полости

$$(2.8) \quad \mu(1-t) \frac{d^2 F}{dt^2} - \left(\frac{\mu}{2} + 4(1-t)\right) \frac{dF}{dt} - 2F = \Phi(t)$$

$$(2.9) \quad \begin{aligned} \Phi(t) &= 2(1-t) - 2\sqrt{\frac{\mu}{\pi}} \frac{1-t}{\sqrt{t}} - \frac{\mu}{2} f(t) + \mu(1-t) f'(t) - \\ &- 2\sqrt{\frac{\mu}{\pi}} (1-t) \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{f(\tau) d\tau}{\sqrt{t-\tau}} \end{aligned}$$

Начальные условия

$$(2.10) \quad F(0) = 1, \quad F'(0) = f(0)$$

Последнее условие получается из (2.5) предельным переходом  $t \rightarrow 0$ ,  $B(t) \rightarrow 1$ . Заменой переменной  $1-t = x^2$  уравнение (2.8) сводится к

$$(2.11) \quad \frac{\mu}{4} \frac{d^2 F}{dx^2} + 2x \frac{dF}{dx} - 2F = \Psi(x)$$

решение которого имеет вид

$$(2.12) \quad F(x) = F_* e^{-1/x^2} + F_*' x + F_* 2\sqrt{\pi/\mu} x \Phi(2x/\sqrt{\mu}) + F_1(x)$$

Здесь  $\Phi(z)$  — интеграл вероятности,  $F_1(x)$  — частное решение неоднородного уравнения (2.11), удовлетворяющее нулевым условиям при  $x = 0$ . Нетрудно выписать  $F_1(x)$  в квадратурах и, используя (2.6) и (2.9), показать, что при  $x \rightarrow 0$   $F_1(x) = 0$  ( $x^4$ ), т. е. в конце сжатия поток в полости

$$F(x) = F_*' + F_* x + 4\mu^{-1} F_* x^2 + 0(x^4)$$

Таким образом, к концу сжатия из начального распределения поля в стенках полости вырабатываются две постоянных ( $F_*$ ,  $F_*'$ ), которые определяют утечку потока.

3. В экспериментах начальное поле в полости генератора создает источник тока, который накачивает генератор. Начальное распределение поля  $B_0(x)$  в стенках полости зависит от времени накачки  $t_0$  и формы импульса тока накачки и определяется решением уравнения (2.1) при заданном законе изменения поля на границе проводника.

Можно выделить два крайних случая накачки: медленную ( $t_0 \rightarrow \infty$ ), когда поле глубоко проникает в стенки полости и  $B_0(x) = 1$ , и быструю ( $t_0 \rightarrow 0$ ), когда поле не проникает в проводник и  $B_0(x) = 0$ , а на границе  $B_0(0) = 1$ . При медленной накачке

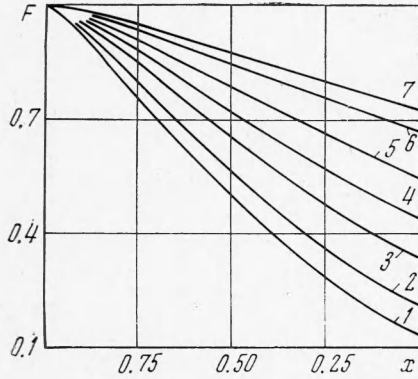
решение уравнения (2.8) имеет вид

$$F_s(t) = 2 \left(1 - \frac{\mu}{8}\right) B_*(t) + \frac{\mu}{4} - \sqrt{\frac{\mu}{\pi}} \sqrt{t} + \frac{8(1-t)}{\sqrt{\pi\mu}} \arcsin \sqrt{t} -$$

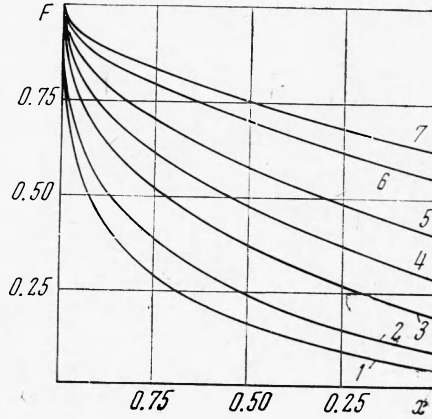
$$- 2 \sqrt{1-t} + (1-t) + 4 \sqrt{\frac{\pi}{\mu}} \left(1 - \frac{\mu}{8}\right) \sqrt{1-t} (1 - B_*(t))$$

$$B_*(t) = e^{At/\mu} (1 - \Phi(2 \sqrt{t} / \sqrt{\mu}))$$

Функция  $B_*(t)$  описывает убывание магнитного поля в неподвижной плоской щели, ограниченной проводником без поля.



Фиг. 2



Фиг. 3

В конце сжатия при медленной накачке в полости остается поток

$$F_{s*} = \mu/4 - \sqrt{\mu/\pi} + 2(1 - \mu/8) B_*(1)$$

$$F_{s*} \approx 1 - \frac{16}{3\sqrt{\pi}} \frac{1}{\sqrt{\mu}} + \frac{6}{\mu} - \dots \quad \text{при } \mu \gg 1$$

$$F_{s*} \approx \frac{\mu}{4} + \frac{1}{4\sqrt{\pi}} \mu^{3/2} + \frac{1}{16\sqrt{\pi}} \mu^{5/2} - \dots \quad \text{при } \mu \ll 1$$

В случае быстрой накачки

$$F_r(t) = \left(1 + \frac{8}{\mu}\right) B_*(t) - \frac{4}{\sqrt{\pi\mu}} \sqrt{t} - \frac{8}{\mu} \sqrt{1-t} + \frac{4(1+8/\mu)}{\sqrt{\pi\mu}} \times$$

$$\times \sqrt{1-t} \arcsin \sqrt{t} - 2 \sqrt{\frac{\pi}{\mu}} \left(1 + \frac{8}{\mu}\right) \sqrt{1-t} (1 - B_*(t))$$

В конце сжатия

$$F_{r*} = (1 + 8/\mu) B_*(1) - 4/\sqrt{\pi\mu}$$

$$F_{r*} \approx 1 - 8/\sqrt{\pi\mu} + 12/\mu - \dots \quad \text{при } \mu \gg 1$$

$$F_{r*} \approx \frac{1}{8\sqrt{\pi}} \mu^{3/2} - \frac{3}{32\sqrt{\pi}} \mu^{5/2} + \dots \quad \text{при } \mu \ll 1$$

Отношение потерь потока в двух рассмотренных случаях накачки при  $\mu \gg 1$

$$(1 - F_{r*}) / (1 - F_{s*}) = 3/2$$

Зависимость  $F(x)$  для значений  $\mu = 1, 2, 5, 10, 20, 50, 80$ , соответствующих кривым 1—7, приведена на фиг. 2 (медленная накачка) и фиг. 3 (быстрая накачка).

Быстрая накачка приводит к наибольшим потерям потока, а медленная — к наименьшим. Другие случаи накачки нарастающим во времени током дадут

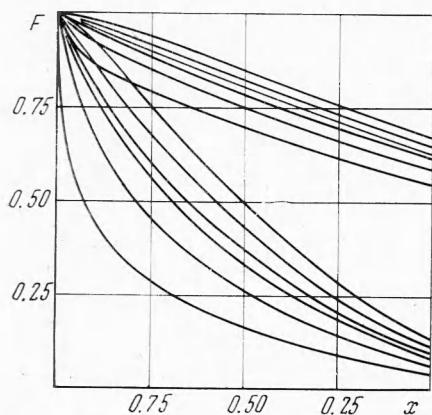
$$F_{r*} \leq F_* \leq F_{s*}$$

Были проведены численные расчеты диффузии потока при накачке постоянным током, током, нарастающим пропорционально  $\sqrt{t}$ , и линейно нарастающим током,

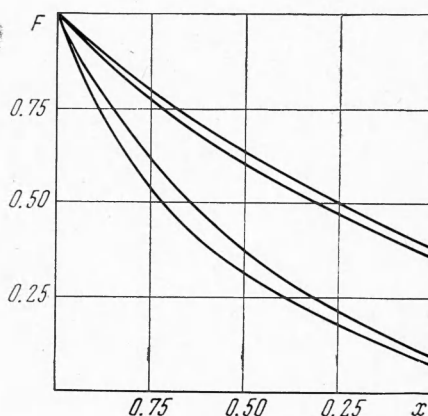
Счет проводился в два этапа. Сначала по стандартной программе Рунге—Кутты с автоматическим выбором шага отыскивалось частное решение  $F_1(x)$  неоднородного уравнения (2.11) с нулевыми условиями при  $x = 0$  и выводились только значения  $F_1$  и  $F_1'$  в точке  $x = 1$ . Затем подстановкой этих значений в общее решение (2.12) из начальных условий (2.10) определялись постоянные  $F_*$  и  $F_*'$ ; снова решалось уравнение (2.11) при  $F(0) = F_*$ ,  $F'(0) = F_*'$ . Для всех рассмотренных случаев накачки  $F_*' = 2\sqrt{\pi/\mu} F_*$ .

Зависимость потерь потока от времени накачки показана на фиг. 4, где приведены графики для  $\mu = 1$  (нижняя группа кривых) и  $\mu = 50$  (верхняя группа кривых) и  $t_0 = 10^{-8}, 0.1, 0.5, 1, 5, 10^4$  при накачке постоянным током. Большим значением  $t_0$  соответствует кривая, лежащая выше на фиг. 4.

Влияние формы импульса накачки на потери потока иллюстрирует фиг. 5. Приведенные на ней кривые относятся к  $t_0 = 1$  и  $\mu = 1$  (две нижние кривые) и  $\mu = 10$



Фиг. 4



Фиг. 5

(верхние кривые) при накачке постоянным — верхние из двух соседних кривых — и линейно возрастающим током — нижние кривые. При накачке током, возрастающим пропорционально  $\sqrt{t}$ , график  $F(x)$  расположен между кривыми накачки линейным и постоянным током.

Потери потока слабо зависят от формы импульса тока накачки и определяются в основном магнитным числом Рейнольдса  $\mu$  и временем накачки  $t_0$ .

В рассмотренной модели потери потока оказались значительными даже для больших  $\mu$ . Так,  $0.23 \leq 1 - F_* \leq 0.45$  при  $\mu = 50$ ,  $0.56 \leq 1 - F_* \leq 0.72$  при  $\mu = 10$ . Такие потери связаны со сжатием магнитного поля в полости и сильным возрастанием градиента поля на границе проводников.

Описанная модель потерь потока может быть использована для оценок этого параметра плоских МК генераторов и должна быть улучшена при рассмотрении последних этапов сжатия, когда меняется геометрия сжатия поля и задача оказывается близкой к рассмотренной в [3].

Авторы благодарны Б. С. Новоселову за помощь при проведении расчетов.

Поступила 22 I 1974

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Кнопфель Г. Сверхсильные импульсные магнитные поля. М., «Мир», 1972.
2. Биченков Е. И. Некоторые особенности диффузии магнитного поля в движущийся проводник. ПМТФ, 1967, № 1.
3. Биченков Е. И. Влияние конечной проводимости на получение сильных магнитных полей путем быстрого обжатия проводящих оболочек. ПМТФ, 1964, № 6.
4. Биченков Е. И., Маточкин Е. П. Магнитное поле в движущемся цилиндрическом проводнике, скорость которого пропорциональна  $r^{-1}$ . ПМТФ, 1973, № 5.
5. Биченков Е. И., Войтенко А. Е., Демчук А. Ф., Дерibas А. А., Куликов Б. И., Нестерихин Ю. Е., Соболев О. П. Эксперименты со взрыво-магнитным генератором в лабораторных условиях. Докл. АН СССР, 1968, т. 183, № 6.
6. Herlach F., Knoepfel H. Megagauss fields generated in explosive-driven flux compression devices. Rev. Sci. Instruments, 1965, vol. 36, No. 8.
7. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Электродинамика сплошных сред. М., Гостехиздат, 1957.