ПМТФ, № 4, 1968

АВТОМОДЕЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ПРОСТРАНСТВЕННОГО ЛАМИНАРНОГО МАГНИТОГИДРОДИНАМИЧЕСКОГО ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ

Г. В. Филиппов, В. Г. Шахов

(Куйбышев)

Автомодельные решения уравнений пространственного пограничного слоя несжимаемой жидкости в обычной гидродинамике рассматривались в работах [1-3] и др. Ниже отыскиваются автомодельные решения уравнений магнитогидродинамического пространственного пограничного слоя.

1. Основные уравнения. Поставим задачу отыскать систему дифференциальных уравнений и условия для «автомодельных» движений несжимаемого газа в произвольных ортогональных криволинейных координатах τ, δ, ζ.

Поверхность, над которой течет пограничный слой, определяется условием $\zeta = 0$, где ζ — расстояние от этой поверхности, измеряемое по нормали. На поверхности $\zeta = 0$ располагаются два семейства координатных кривых $\tau = \mathrm{const}$ и $\delta = \mathrm{const}$, ортогональных одно другому.

В этой системе координат элемент длины ds определяется уравнением

$$ds^2 = h_1^2 d\tau^2 + h_2^2 d\delta^2 + d\zeta^2 \tag{1.1}$$

где h_1, h_2 — коэффициенты Ламе.

Обычно предполагается, что в пограничном слое h_1 и h_2 будут функциями только τ и δ. Это предположение имеет силу, если кривизна поверхности изменяется не резко и если местная толщина пограничного слоя мала по сравнению с главным радиусом кривизны поверхности.

Тогда уравнения движения несжимаемого газа в пограничном слое, когда магнитное поле, индуцируемое электрическими токами в жидкости, пренебрежимо мало по сравнению с налагаемым магнитным полем, будут иметь вид [4].

$$\frac{u}{h_1}\frac{\partial u}{\partial \tau} + \frac{v}{h_2}\frac{\partial u}{\partial \delta} + w\frac{\partial u}{\partial \zeta} - \varkappa_2 uv + \varkappa_1 v^2 = -\frac{1}{\rho h_1}\frac{\partial p}{\partial \tau} + \nu\frac{\partial^2 u}{\partial \zeta^2} - \frac{\sigma B_0^2}{\rho}u \tag{1.2}$$

$$\frac{u}{h_1}\frac{\partial v}{\partial \tau} + \frac{v}{h_2}\frac{\partial v}{\partial \delta} + w\frac{\partial v}{\partial \zeta} - \varkappa_1 uv + \varkappa_2 u^2 = -\frac{1}{\rho h_2}\frac{\partial p}{\partial \delta} + \nu\frac{\partial^2 v}{\partial \zeta^2} - \frac{\sigma B_0^2}{\rho}v \tag{1.3}$$

$$\frac{\partial}{\partial \tau}(h_2 u) + \frac{\partial}{\partial \delta}(h_1 v) + \frac{\partial}{\partial \zeta}(h_1 h_2 w) = 0 \tag{1.4}$$

$$\varkappa_1 = -\frac{1}{h_1 h_2}\frac{\partial h_2}{\partial \tau}, \qquad \varkappa_2 = -\frac{1}{h_1 h_2}\frac{\partial h_1}{\partial \delta} \tag{1.5}$$

Здесь $\varkappa_1$ и $\varkappa_2$ — геодезические кривизны линий $\tau = \mathrm{const}$ и $\delta = \mathrm{const}$, а u, v, w — составляющие скорости в направлении координатных осей τ, δ, ζ, соответственно.

Граничные условия имеют вид

$$u = v = w = 0 \quad \text{при } \zeta = 0, \qquad u \to U, \quad v \to V \quad \text{при } \zeta \to \infty \tag{1.6}$$

Величины $\partial p / \partial\tau$ и $\partial p / \partial\delta$ в (1.2) и (1.3) определяются течением на границе пограничного слоя

$$\frac{U}{h_1}\frac{\partial U}{\partial\tau} + \frac{V}{h_2}\frac{\partial U}{\partial\delta} - \varkappa_2 UV + \varkappa_1 V^2 = -\frac{1}{\rho h_1}\frac{\partial p}{\partial\tau} - mU \tag{1.7}$$

$$\frac{U}{h_1}\frac{\partial V}{\partial\tau} + \frac{V}{h_2}\frac{\partial V}{\partial\delta} - \varkappa_1 UV + \varkappa_2 V^2 = -\frac{1}{\rho h_2}\frac{\partial p}{\partial\delta} - mV \tag{1.8}$$

$$(m = \sigma B_0^2 / \rho)$$

Исключая при помощи (1.7) и (1.8) давление из системы уравнений (1.2) — (1.4), получим

$$\frac{u}{h_1}\frac{\partial u}{\partial\tau} + \frac{v}{h_2}\frac{\partial u}{\partial\delta} + w\frac{\partial u}{\partial\zeta} - \varkappa_2 uv + \varkappa_1 v^2 =$$

$$= \frac{U}{h_1}\frac{\partial U}{\partial\tau} + \frac{V}{h_2}\frac{\partial U}{\partial\delta} - \varkappa_2 UV + \varkappa_1 V^2 + \nu\frac{\partial^2 u}{\partial\zeta^2} - m(u - U) \tag{1.9}$$

$$\frac{u}{h_1}\frac{\partial v}{\partial\tau} + \frac{v}{h_2}\frac{\partial v}{\partial\delta} + w\frac{\partial v}{\partial\zeta} - \varkappa_1 uv + \varkappa_2 u^2 =$$

$$= \frac{U}{h_1}\frac{\partial V}{\partial\tau} + \frac{V}{h_2}\frac{\partial V}{\partial\delta} - \varkappa_1 UV + \varkappa_2 U^2 + \nu\frac{\partial^2 v}{\partial\zeta^2} - m(v - V) \tag{1.10}$$

$$\frac{\partial(h_2 u)}{\partial\tau} + \frac{\partial(h_1 v)}{\partial\delta} + \frac{\partial(h_1 h_2 w)}{\partial\zeta} = 0 \tag{1.11}$$

При «автомодельном» движении жидкости профили соответственных составляющих скорости в различных точках поверхности отличаются только масштабами. В таком случае скорости автомодельного пограничного слоя могут быть представлены в виде

$$u(\tau, \delta, \zeta) = U(\tau, \delta)\,\Phi'(\eta) \tag{1.12}$$

$$v(\tau, \delta, \zeta) = V(\tau, \delta)\,D'(\eta) \tag{1.13}$$

$$\left(\eta = \frac{\zeta}{\sqrt{\nu}}\, g(\tau, \delta)\right)$$

Здесь $\Phi(\eta)$ и $D(\eta)$ — некоторые функции переменной η, а $g(\tau,\delta)$ — некоторая функция координат τ и δ. Из (1.11) с учетом (1.6) следует:

$$w = \frac{-\sqrt{\nu}}{h_1 h_2 g}\left[\frac{\partial(h_2 U)}{\partial\tau}\Phi + h_2 U\frac{\partial \ln g}{\partial\tau}(\eta\Phi' - \Phi) + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial(h_1 V)}{\partial\delta} D + h_1 V\frac{\partial \ln g}{\partial\delta}(\eta D' - D)\right] \tag{1.14}$$

Подстановка (1.12) — (1.14) в (1.10) позволяет преобразовать последние к виду

$$\Phi''' + (C_1 - C_5 - C_7)\,\Phi\Phi'' + (C_4 - C_6 - C_8)\,D\Phi'' + (C_8 - C_2)(D'\Phi' - 1) -$$

$$- C_1(\Phi'^2 - 1) - C_{10}(D'^2 - 1) - C_{11}(\Phi' - 1) = 0 \tag{1.15}$$

$$D''' + (C_3 - C_5 - C_7)\,\Phi D'' + (C_4 - C_6 - C_8)\,DD'' + (C_7 - C_3)(\Phi' D' - 1) -$$

$$- C_9(\Phi'^2 - 1) - C_4(D'^2 - 1) - C_{11}(D' - 1) = 0 \tag{1.16}$$

Здесь

$$C_1 = \frac{1}{h_1 g^2}\frac{\partial U}{\partial\tau}, \quad C_2 = \frac{V}{U h_2 g^2}\frac{\partial U}{\partial\delta}, \quad C_3 = \frac{U}{V h_1 g^2}\frac{\partial V}{\partial\tau}$$

$$C_4 = \frac{1}{h_2 g^2}\frac{\partial V}{\partial\delta}, \quad C_5 = \frac{U}{h_1 g^2}\frac{\partial \ln g}{\partial\tau}, \quad C_6 - \frac{V}{h_2 g^2}\frac{\partial \ln g}{\partial\delta} \tag{1.17}$$

$$C_7 = \frac{\varkappa_1 U}{g^2}, \quad C_8 = \frac{\varkappa_2 V}{g^2}, \quad C_9 = \frac{\varkappa_1 U^2}{V g^2}, \quad C_{10} = \frac{\varkappa_2 V^2}{U g^2}, \quad C_{11} = \frac{m}{g^2}$$

Граничные условия для (1.15), (1.16)

$$\Phi = D = \Phi' = D' = 0 \quad \text{при } \eta = 0, \qquad \Phi' \to 1, \quad D' \to 1 \quad \text{при } \eta \to \infty \qquad (1.18)$$

Для каждой конкретной системы координат (τ, δ, ζ) h_1 и h_2, а следовательно, $\varkappa_1$ и $\varkappa_2$ — известные функции. Тогда можно исследовать систему (1.17) и получить возможные для автомодельных решений распределения функций $U(\tau, \delta)$, $V(\tau, \delta)$, $g(\tau, \delta)$ и $m(\tau, \delta)$.

Так для декартовой системы координат $h_1 = h_2 = 1$, $\varkappa_1 = \varkappa_2 = 0$ и из (1.15) — (1.17) следует (заменяя $\tau \equiv x$, $\delta \equiv z$):

$$\Phi''' - C_1\Phi'^2 + (C_1 - C_5)\quad \Phi\Phi'' + (C_4 - C_6)\, D\Phi'' - C_2 D'\Phi' - C_{11}\Phi' + \\ + C_1 + C_2 + C_{11} = 0 \qquad (1.19)$$

$$D''' - C_4 D'^2 + (C_4 - C_6)\, DD'' + (C_1 - C_5)\,\Phi D'' - C_3 D'\Phi' - C_{11} D' + \\ + C_4 + C_3 + C_{11} = 0 \qquad (1.20)$$

где

$$C_1 = \frac{1}{g^2}\frac{\partial U}{\partial x}, \quad C_2 = \frac{V}{Ug^2}\frac{\partial U}{\partial z}, \quad C_3 = \frac{U}{Vg^2}\frac{\partial V}{\partial x}, \quad C_4 = \frac{1}{g^2}\frac{\partial V}{\partial z} \\ C_5 = \frac{U}{g^2}\frac{\partial \ln g}{\partial x}, \quad C_6 = \frac{V}{g^2}\frac{\partial \ln g}{\partial z}, \quad C_{11} = \frac{m}{g^2} \qquad (1.21)$$

Граничные условия для Φ и D имеют вид (1.18).

Система (1.19), (1.20) будет системой обыкновенных дифференциальных уравнений относительно η (условие «автомодельности»), если C_i ($i = 1, 2, \ldots, 6, 11$) постоянны.

При $C_{11} = 0$ уравнения (1.19)—(1.21) описывают автомодельные решения при отсутствии магнитного поля [1-3]. Из (1.21) следует, что если известны распределения U, V и g, то распределение m находится непосредственно из (1.21)

$$m = C_{11} g^2 \qquad (1.22)$$

В соответствии с изложенным в [1-3], можно привести четыре возможных способа задания функций U, V, g и m.

Способ 1

$$U = ae^{nx}z^{l-1}, \quad V = be^{nx}z^l, \quad g^2 = \frac{m}{C_{11}} = \frac{ca}{b}\frac{V}{z} = cU \qquad (1.23)$$

Способ 2

$$U = ax^n z^{l-1}, \quad V = bx^{n-1}z^l, \quad g^2 = \frac{m}{C_{11}} = \frac{cU}{x} = \frac{ca}{b}\frac{V}{z} \qquad (1.24)$$

Способ 3

$$U = ax^n, \qquad V = bx^l, \qquad g^2 = \frac{m}{C_{11}} = \frac{cU}{x} \qquad (1.25)$$

Способ 4

$$U = ae^{nx}, \qquad V = be^{lx}, \qquad g^2 = \frac{m}{C_{11}} = cU \qquad (1.26)$$

$$a, b, c, l, n = \text{const}$$

Симметричная замена независимых переменных приводит к указанию четырех дополнительных вариантов.

В [3] показано, что перечисленные способы задания функций U, V приемлемы не при любых значениях постоянных a, b, l, n. Очевидно сказанное распространение и на постоянные c и C_{11} при задании функции m.

Следует отметить, что уравнения (1.19) — (1.21) записываются в аналогичной форме и в скошенной системе координат [2], для которой, следовательно, все сказанное выше остается справедливым.

2. Условия автомодельности профилей температуры. Эти условия определим из уравнения энергии пограничного слоя в магнитной гидродинамике, предполагая постоянс во термодинамических свойств жидкости [4]

$$\rho c_p\left(u\frac{\partial T}{\partial x}+w\frac{\partial T}{\partial y}+v\frac{\partial T}{\partial z}\right)=k\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}+\mu\left[\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2\right]+\sigma B_0^2(u^2+v^2) \tag{2.1}$$

Здесь T — температура в пограничном слое; c_p — удельная теплоемкость при постоянном давлении; k — коэффициент теплопроводности.

Условие автомодельности имеет вид [2]

$$\theta(\eta)=\frac{T-T_\infty}{T_w-T_\infty}=\frac{T-T_\infty}{T_*}\qquad (T_*=T_w-T_\infty) \tag{2.2}$$

Здесь T_∞ — температура набегающего потока; $T_w(x,\ z)$ — температура поверхности. Подставив (1.12) — (1.14) и (2.2) в (2.1), получим

$$\theta''-C_{12}\Phi'\theta-C_{13}D'\theta+P(C_1-C_5)\Phi\theta'+P(C_4-C_6)D\theta'+$$
$$+C_{14}\Phi''^2+C_{15}D''^2+C_{11}(C_{14}\Phi'^2+C_{15}D'^2)=0 \tag{2.3}$$

$$C_{12}=\frac{PU}{g^2}\frac{\partial\ln T_*}{\partial x},\quad C_{13}=\frac{PV}{g^2}\frac{\partial\ln T_*}{\partial z},\quad C_{14}=\frac{PU^2}{c_pT_*},\quad C_{15}=\frac{PV^2}{c_pT_*} \tag{2.4}$$

Здесь P — число Прандтля.

Граничные условия для θ имеют вид

$$\theta=1 \quad \text{при } \eta=0;\quad \theta\to 0 \quad \text{при } \eta=\infty \tag{2.5}$$

Чтобы (2.3) было обыкновенным дифференциальным уравнением, коэффициенты C_{12} — C_{15} должны быть постоянными. При этом условии, как следует из сопоставления коэффициентов C_{14} и C_{15}, U пропорционально V, т. е. линии тока основного течения будут прямыми. Указанное обстоятельство сильно ограничивает класс функций U, V, а следовательно, и m, для которых возможны автомодельные профили температур. Аналогичный результат получен в [2] для случая $m=0$.

Если, следуя [2], не учитывать вязкий и джоулев нагрев, то ограничениями, наложенными коэффициентами C_{14} и C_{15}, можно пренебречь и все выводы, полученные в [2], сохраняют силу и в рассматриваемом случае.

Так, если предположить, что $T_*=\text{const}$, то уравнение (2.3) принимает вид [2]

$$\theta''+P(C_1-C_5)\Phi\theta'+P(C_4-C_6)D\theta'=0 \tag{2.6}$$

Используя (2.5), представим (2.6) в квадратурах

$$\theta(\eta)=1-\vartheta(\eta)/\vartheta(\infty)$$

$$\vartheta(\eta)=\int_0^\eta\exp\left\{-P\left[(C_1-C_5)\int_0^\alpha\Phi\,d\beta+(C_4-C_6)\int_0^\alpha D\,d\beta\right]\right\}d\alpha \tag{2.7}$$

Решения для переменных T_*, соответствующие способам 1—4 для U, V, g из (2.4), (условиями C_{14} и C_{15} пренебрегается), имеют вид

$$T_*=t\,e^{rx}z^s \quad \text{(способ 1)} \tag{2.8}$$
$$T_*=tx^rz^s \quad \text{(способ 2)} \tag{2.9}$$
$$T_*=tx^re^{sz} \quad \text{(способ 3)} \tag{2.10}$$
$$T_*=te^{rx}e^{sz} \quad \text{(способ 4)} \tag{2.11}$$
$$(t,\ r,\ s=\text{const})$$

3. Приемлемые «автомодельные» пограничные слои. Движение в пространственных пограничных слоях с составляющими внешних скоростей U и V и параметром m типа (1.23) — (1.26) описывается дифференциальными уравнениями (1.19) и (1.20). В таком случае функции U, V и m должны удовлетворять уравнениям Эйлера (1.7), (1.8). Поэтому они должны быть такими, чтобы давление p определялось из (1.7), (1.8) однозначно.

Указанное обстоятельство, как и в обычной гидродинамике [3], накладывает ограничения на выбор постоянных a, b, c, C_{11}, l, n, значительно уменьшая тем самым число приемлемых способов задания функций U, V и m, при которых движение в пограничном слое будет автомодельным.

Приводим список приемлемых заданий функций $U(x, z)$, $V(x, z)$ и $m(x, z)$, при которых движение в пограничном слое автомодельно и, кроме того, удовлетворяются уравнения Эйлера (1.7), (1.8); одновременно с этим во вторых строчках в скобках даны выражения $P = -p(x, z)/\rho$, соответствующие рассматриваемым случаям (при записях для краткости положено $d = c/C_7$).

$$U = ax^n z^{-(n+d)}, \quad V = ax^{n-1} z^{1-(n+d)}, \quad m = adx^{n-1} z^{-(n+d)} \tag{3.1}$$
$$(P = \mathrm{const})$$

$$U = ax^n, \quad V = bx^{1-n}, \quad m = adx^{n-1} \tag{3.2}$$
$$\left(P = a^2 \frac{n+d}{2n} x^{2n} + ab(1-n+d)z + \mathrm{const}\right)$$

$$U = ax^n, \quad V = bx^{-d}, \quad m = a\,dx^{n-1} \tag{3.3}$$
$$\left(P = a^2 \frac{n+d}{2n} x^{2n} + \mathrm{const}\right)$$

$$U = ax, \quad V = bz, \quad m = ad \tag{3.4}$$
$$\left(P = a^2 \frac{1+d}{2} x^2 + \frac{b(b+ad)}{2} z^2 + \mathrm{const}\right)$$

$$U = ax^n, \quad V = a[1-(n+d)]x^{n-1}z, \quad m = a\,dx^{n-1} \tag{3.5}$$
$$\left(P = a^2 \frac{n+d}{2n} x^{2n} + \mathrm{const}\right)$$

$$U = axz^{n-1}, \quad V = a\frac{1+d}{1-n} z^n, \quad m = a\,dz^{n-1} \tag{3.6}$$
$$\left(P = a^2 \frac{(n+d)(1+d)}{2n(1-n)^2} z^{2n} + \mathrm{const}\right)$$

$$U = ae^{nx}, \quad V = -a(n+d)e^{nx}z, \quad m = a\,de^{nx} \tag{3.7}$$
$$\left(P = a^2 \frac{n+d}{2n} e^{2nx} + \mathrm{const}\right)$$

$$U = ae^{nx}, \quad V = be^{-nx}, \quad m = a\,de^{nx} \tag{3.8}$$
$$\left(P = a^2 \frac{n+d}{2n} e^{2nx} + a(a\,de^{2nx} - bn)z + \mathrm{const}\right)$$

$$U = ae^{nx}, \quad V = be^{-dx}, \quad m = a\,de^{nx} \tag{3.9}$$
$$\left(P = a^2 \frac{n+d}{2n} e^{2nx} + abde^{nx}(e^{nx} - e^{-dx})z + \mathrm{const}\right)$$

В этот список не включены распределения скоростей, когда U или V тождественно равны нулю. Как и выше, можно написать аналогичные соотношения для скоростей при симметричной замене независимых переменных. Следует оговориться, что в этом списке встречаются такие пространственные пограничные слои (3.7) — (3.9), которые имеют в начальном сечении какие-то определенные (не нулевые) величины U и V.

По существу они требуют постановки и решения задачи о продолжении пограничного слоя из одной области в другую. Ниже эти случаи не рассматриваются.

4. Свойства пространственных «автомодельных» пограничных слоев. Дадим краткую характеристику пространственным автомодельным движениям, описанным функциями (3.1) — (3.6)

$$1°.\ U = a\left(\frac{x}{z}\right)^n \frac{1}{z^d}, \quad V = a\left(\frac{x}{z}\right)^{n-1}\frac{1}{z^d}, \quad m = ad\left(\frac{x}{z}\right)^n \frac{1}{xz^d} \qquad (4.1.1)$$

В этом случае оба градиента давления нулевые ($dp/dx = dp/dz = 0$) и давление постоянно над всей обтекаемой поверхностью.

Во внешнем течении линиями тока будут прямые линии, проходящие через начало координат, что совпадает со случаем обычной гидродинамики [3].

Дифференциальные уравнения (1.19) и (1.20) примут вид (4.1.2)

$$\Phi''' + {}^1/_2\,(n+1)\ \ \Phi\Phi'' + {}^1/_2\,(2-n-d)\ \ D\Phi'' - n\Phi'^2 + (n+d)D'\Phi' - d\Phi' = 0$$

$$D''' + {}^1/_2\,(n+1)\Phi D'' + {}^1/_2\,(2-n-d)DD'' + (n+d-1)D'^2 - (n-1)D'\Phi' - dD' = 0 \qquad (4.1.3)$$

Так же и в обычной гидродинамике [3], система уравнений (4.1.2) и (4.1.3) удовлетворится, если положить $\Phi(\eta) \equiv D(\eta)$. При этом из системы (4.1.2) и (4.1.3) получим

$$\Phi''' + {}^3/_2\,\Phi\Phi'' + d\Phi'(\Phi' - 1) = 0 \qquad (4.1.4)$$

Сделав замену переменных

$$\Phi(\eta) = \sqrt{{}^2/_3}\,\varphi(\xi), \qquad \eta = \sqrt{{}^2/_3}\,\xi, \qquad d_1 = {}^2/_3\,d \qquad (4.1.5)$$

придем к уравнению

$$\varphi''' + \varphi\varphi'' + d_1\varphi'(\varphi' - 1) = 0 \qquad (4.1.6)$$

с граничными условиями

$$\varphi = \varphi' = 0 \ \text{ при } \xi = 0, \quad \varphi' \to 1 \ \text{ при } \xi \to \infty \qquad (4.1.7)$$

При $d_1 = 0$ уравнение (4.1.6) с граничными условиями (4.1.7) описывает задачу о продольном обтекании пластины, решенную Блазиусом.

При $d_1 \ll 1$ можно предложить решение вида

$$\varphi = \varphi_0 + d_1\varphi_1 + d^2{}_1\varphi_2 + \dots \qquad (4.1.8)$$

что дает

$$\varphi_0''' + \varphi_0\varphi_0'' = 0$$

$$\varphi_1''' + \varphi_0\varphi_1'' + \varphi_0''\varphi_1 + \varphi_0'(\varphi_0' - 1) = 0 \qquad (4.1.9)$$

с граничными условиями

$$\varphi_0 = \varphi_1 = \varphi_2 = \dots = \varphi'_0 = \varphi'_1 = \varphi'_2 = \dots = 0 \qquad \text{при } \xi = 0$$

$$\varphi'_0 \to 1, \quad \varphi_i' \to 0 \quad (i \geqslant 1) \qquad \text{при } \xi \to \infty \qquad (4.1.10)$$

Первое уравнение системы (4.1.9) будет нелинейным. При граничных условиях (4.1.10) его решение найдено Блазиусом. Последующие уравнения — линейные.

$$2°. \qquad U = ax^n, \qquad V = bx^{n-1}, \qquad m = adx^{n-1} \qquad (4.2.1)$$

Линиями тока внешнего течения будут

либо семейство парабол (когда $n \neq 1$)

$$z = \frac{b}{2a(1-n)}\,x^{2(1-n)} + \text{const} \qquad (4.2.2)$$

либо семейство логарифмических линий (при $n = 1$)

$$z = b/a\ \ln\ x + \text{const} \qquad (4.2.3)$$

Это в точности соответствует случаю обычной гидродинамики [2].

В рассматриваемой задаче уравнения (1.19) и (1.20), описывающие пограничный слой, примут вид

$$\Phi''' + {}^1/_2\,(n+1)\ \Phi\Phi'' - n(\Phi'^2 - 1) \ - d(\Phi' - 1) = 0 \qquad (4.2.4)$$

$$D''' + {}^1/_2\,(n+1)\Phi D'' + (n-1)(\Phi' D - 1) - d(D' - 1) = 0 \qquad (4.2.5)$$

Если ввести функции

$$\Phi(\eta) = \sqrt{2/(n+1)}\,\varphi(\xi), \qquad D(\eta) = \sqrt{2/(n+1)}\,g(\xi), \qquad \eta = \sqrt{2/(n+1)}\,\xi \qquad (4.2.6)$$

то система уравнений (4.2.4) и (4.2.5) приведется к виду

$$\varphi''' + \varphi\varphi'' = \beta_1(\varphi'^2 - 1) + \beta_2(\varphi' - 1) \qquad (4.2.7)$$

$$g''' + \varphi g'' = 2(1 - \beta_1)\ (\varphi' g' - 1) + \beta_2(g' - 1) \qquad (4.2.8)$$

В уравнениях (4.2.7) и (4.2.8) положено

$$\beta_1 = \frac{2n}{n+1}, \qquad \beta_2 = \frac{2d}{n+1} \tag{4.2.9}$$

Граничные условия имеют вид

$$\varphi = \varphi' = g = g' = 0 \quad \text{при } \xi = 0, \qquad \varphi' \to 1, \quad g' \to 1 \quad \text{при } \xi \to \infty \tag{4.2.10}$$

Уравнение (4.2.7) решается независимо от (4.2.8). При $\beta_2 = 0$ уравнение (4.2.7) с граничными условиями (4.2.10) — уравнение Фокнера — Скэн, а (4.2.8), где положено $g'(\xi) = f(\xi)$, рассмотрено В. В. Богдановой [5]. Заметим, что уравнение (4.2.8) линейное относительно функции $g(\xi)$. При малых β_1 и β_2 функцию φ разложим в ряд

$$\varphi = \varphi_0 + \beta_1\varphi_{11} + \beta_2\varphi_{12} + \beta_1^2\varphi_{21} + \beta_2^2\varphi_{22} + \beta_1\beta_2\varphi_{23} + \ldots \tag{4.2.11}$$

Тогда из уравнения (4.2.7) получим следующую бесконечную систему уравнений

$$\begin{gathered} \varphi_0''' + \varphi_0\varphi_0'' = 0 \\ \varphi_{11}''' + \varphi_0\varphi_{11}'' + \varphi_{11}\varphi_0'' = \varphi_0'^2 - 1 \\ \varphi_{12}''' + \varphi_0\varphi_{12}'' + \varphi_{12}\varphi_0'' = \varphi_0' - 1 \end{gathered} \tag{4.2.12}$$

с граничными условиями

$$\begin{gathered} \varphi_0 = \varphi_{11} = \varphi_{12} = \ldots = \varphi_0' = \varphi_{11}' = \varphi_{12}' = \ldots = 0 \quad \text{при} \quad \xi = 0 \\ \varphi_0' \to 1, \quad \varphi_{ij}' \to 0 \ (i, j \geqslant 1) \quad \text{при } \xi \to \infty \end{gathered} \tag{4.2.13}$$

Первое уравнение системы (4.2.12) — уравнение задачи Блазиуса об обтекании плоской пластины, а все остальные уравнения — линейные. Их решение может быть найдено любым стандартным методом на ЭВМ.

Аналогично можно поступить с уравнением (4.2.8) и функцией $g(\xi)$ с той разницей, что все полученные уравнения будут линейными.

Конечно, функции $\varphi(\xi)$ и $g(\xi)$ можно разлагать в ряды только по β_2, так как первые уравнения будут, соответственно, уравнениями Фокнера — Скэн и В. В. Богдановой, а остальные — линейные.

3°. $$U = ax^n, \qquad V = bx^{-d}, \qquad m = adx^{n-1} \tag{4.3.1}$$

Линиями тока внешнего течения в этом случае будет либо семейство парабол $(n + d \neq 1)$

$$z = \frac{b}{a(1-n-d)} x^{1-(n+d)} + \text{const} \tag{4.3.2}$$

либо семейство логарифмических линий (при $n + d = 1$)

$$z = (b/a) \ln x + \text{const} \tag{4.3.3}$$

В указанной задаче течение жидкости в пограничном слое описывается системой

$$\Phi''' + {}^1/_2 (n+1) \Phi \Phi'' - n (\Phi'^2 - 1) - d (\Phi' - 1) = 0 \tag{4.3.4}$$

$$D''' + {}^1/_2 (n+1) \Phi D'' + d (D'\Phi' - D') = 0 \tag{4.3.5}$$

Уравнение (4.3.4) аналогично уравнению (4.2.7) предыдущего пункта, а уравнение (4.3.5) — линейное относительно D. Решить систему уравнений (4.3.4) и (4.3.5) например, можно, разлагая $\Phi(\eta)$ и $D(\eta)$ в ряды по малым параметрам.

4°. $$U = ax, \qquad V = bz, \qquad m = ad \tag{4.4.1}$$

Линии тока внешнего течения описываются семейством парабол

$$z = \text{const}\, x^{b/a} \tag{4.4.2}$$

Этот вид течения по аналогии с обычной гидродинамикой [6] можно интерпретировать как обтекание лба трехосного эллипсоида в присутствии магнитного поля постоянной напряженности, нормального к обтекаемой поверхности.

Уравнения (1.19) и (1.20) в этом случае примут вид

$$\Phi''' + \Phi \Phi'' + \varepsilon D \Phi'' - \Phi'^2 - d (\Phi' - 1) + 1 = 0 \tag{4.4.3}$$

$$D''' + \varepsilon (DD'' - D'^2 + 1) + \Phi D'' - d (D' - 1) = 0 \qquad (\varepsilon = b/a) \tag{4.4.4}$$

Для трехосного эллипсоида с $b \ll a$ и $d \ll 1$ решение системы (4.4.3) и (4.4.4) можно искать в виде

$$\Phi = \Phi_0 + \varepsilon\Phi_{11} + d\Phi_{12} + \varepsilon^2\Phi_{21} + \varepsilon d\Phi_{22} + d^2\Phi_{23} + \ldots \tag{4.4.5}$$

$$D = D_0 + \varepsilon D_{11} + dD_{12} + \varepsilon^2 D_{21} + \varepsilon d D_{22} + d^2 D_{23} + \ldots \tag{4.4.6}$$

Тогда из (4.4.3) и (4.4.4) следует:

$$\begin{aligned}
&\Phi_0''' + \Phi_0\Phi_0'' - \Phi_0'^2 + 1 = 0\\
&\Phi_{11}''' + (\Phi_0 + D_0)\ \Phi_{11}'' - 2\Phi_0'\Phi_{11}' + \Phi_0''\Phi_{11} = 0\\
&\Phi_{12}''' + \Phi_0\Phi_{12}'' - (2\Phi_0' + 1)\ \Phi_{12}' + \Phi_0''\Phi_{12} + 1 = 0
\end{aligned} \qquad (4.4.7)$$

$$\begin{aligned}
&D_0''' + \Phi_0 D_0'' = 0\\
&D_{11}''' + \Phi_0 D_{11}'' + D_0''\ \Phi_{11} + D_0 D_0'' - D_0'^2 + 1 = 0\\
&D_{12}''' + \Phi_0 D_{12}'' - D_0' + 1 = 0\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned} \qquad (4.4.8)$$

$$\Phi_0 = \Phi_{11} = \Phi_{12} = \ldots = \Phi_0' = \Phi_{11}' = \Phi_{12}' = \ldots =$$
$$= D_0 = D_{11} = D_{12} = \ldots = D_0' = D_{11}' = D_{12}' = \ldots = 0 \quad \text{при } \eta = 0$$
$$\Phi'_0 \to 1,\quad D_0' \to 1,\quad \Phi_{ij}' \to 0,\qquad D'_{ij} \to 0\quad (i,j \geqslant 1)\quad \text{при}\quad \eta \to \infty \qquad (4.4.9)$$

Первое уравнение системы (4.4.7) с граничными условиями (4.4.9) представляет собой уравнение Фокнера — Скэн при $\beta_1 = 1$ и $\beta_2 = 0$ в уравнении (4.2.7). Его решение можно найти, например, в [7]. Остальные же уравнения системы (4.4.7) и все уравнения системы (4.4.8) — линейные:

5°. $$U = ax^n,\quad V = a(1 - n - d)\, x^{n-1} z,\quad m = adx^{n-1} \qquad (4.5.1)$$

Линии тока внешнего течения при $n + d > 1$ — семейство гипербол

$$z = \frac{\text{const}}{x^{1-n-d}} \qquad (4.5.2)$$

Если $n + d < 1$, линии тока внешнего течения — семейство парабол

$$x = \text{const}\ z^{1-n-d} \qquad (4.5.3)$$

Пограничный слой в рассматриваемой задаче описывается системой

$$\Phi''' + {}^1/_2 (n + 1)\Phi\Phi'' + (1 - n - d)D\Phi'' - n(\Phi'^2 - 1) - d(\Phi' - 1) = 0 \qquad (4.5.4)$$

$$D''' + {}^1/_2 (n + 1)\Phi D'' + (n + d - 1)\quad (D'^2 - DD'') + (n - 1)\Phi' D' = 0 \qquad (4.5.5)$$

Путем замены (4.2.6) приведем систему уравнений (4.5.4) и (4.5.5) к виду

$$\varphi''' + \varphi\varphi'' + (2 - 2\beta_1 - \beta_2) g\varphi'' - \beta_1(\varphi'^2 - 1) - \beta_2(\varphi' - 1) = 0 \qquad (4.5.6)$$

$$g''' + \varphi g'' + (2\beta_1 + \beta_2 - 2)\ (g'^2 - gg'') - 2(1 - \beta_1)\varphi' g' = 0 \qquad (4.5.7)$$

$$\varphi = g = \varphi' = g' = 0 \quad \text{при } \xi = 0,\qquad \varphi' \to 1,\ g' \to 1 \quad \text{при } \xi \to \infty \qquad (4.5.8)$$

Обозначения для β_1 и β_2 прежние [см. (4.2.8)].

При $\beta_2 = 0$ система уравнений (4.5.6) и (4.5.7) численно решалась Ю. Е. Карякиным [3]. Здесь также можно применить метод разложения искомых функций $\varphi(\xi)$ и $g(\xi)$ в ряды по β_2 с последующим использованием результатов [3], или β_1 и β_2.

6°. $$U = axz^{n-1},\quad V = a\,\frac{1 + d}{1 - n}\, z^n,\quad m = adz^{n-1} \qquad (4.6.1)$$

Случай аналогичен при симметричной замене x и z из (4.5.1) следует (4.6.1).

Поступила 12 I 1968

ЛИТЕРАТУРА

1. Hansen A. G., Herzig H. Z. On possible similarity solutions for three — dimensional incompressible laminar boundary layers. I — Similarity with respect to stationary rectangular co — ordinates, NACA TN, 1956, No 3768.
2. Winer W. O., Hansen A. G. Generalization of a class of solutions of the laminar, incompressible boundary — layer equations. Trans. ASME, 1961, Ser. D, vol. 83, No 3.
3. Карякин Ю. Е. Автомодельные задачи пространственного пограничного слоя. Тр. Ленингр. политехн. ин-та, 1965, № 248.
4. Rosson V. J. On flow of electrically coducting fluids over a flat plate in the presence of a tvansverse magnetic field, NACA Rep., 1958, No 1358.
5. Богданова В. В. Ламинарный пространственный пограничный слой с продольным и поперечным перепадом давления. Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение, 1960, № 1.
6. Zaat J. A. A simplified method for the calculation of the threedimensional laminar boundary layers. Nat. Lucht. Lab. Rep., 1956, F. 184.
7. Лойцянский Л. Г. Ламинарный пограничный слой. М., Физматгиз, 1962.