где $F_{i\varepsilon} \to F_i$ при $\varepsilon \to 0$;

$$u_\varepsilon = \theta_\varepsilon = 0 \text{ при } y = \pm 1,$$

и наряду с ней исходную задачу (8)—(10). Обозначив $\omega = u_\varepsilon - u$ и $\tau = \theta_\varepsilon - \theta$, получим для разности задачу

$$(12) \quad d^2\omega/dy^2 = -[F_{1\varepsilon}(\theta_\varepsilon) - F_1(\theta)],\ d^2\tau/dy^2 = -[F_{2\varepsilon}(u_\varepsilon, \theta_\varepsilon) - F_2(u,\theta)],$$

$$\omega = \tau = 0 \text{ при } y = \pm 1.$$

Применяя к задаче (12) оценку (11), получим

$$\|\omega\|_1^2 + \|\tau\|_1^2 \leqslant c\left[\int_{-1}^{1}(F_{1\varepsilon} - F_1)^2\,dy + \int_{-1}^{1}(F_{2\varepsilon} - F_2)^2\,dy\right],$$

откуда следует, что при ограниченных значениях параметра k исходная задача устойчива.

Таким образом, показано, что для течения при температуре, близкой к точке Кюри, характерной особенностью является возможность образования области жидкости (ядра потока), движущегося с постоянной по сечению канала скоростью. Естественно, что в реальном случае скорость жидкости не будет строго постоянной по всему сечению ядра.

В качестве примера при некоторых других, близких к реальным, видах аппроксимирующих функций кривой $M = M(T)$ проведены расчеты профилей скорости и температуры численным методом на ЭВМ. Как показали расчеты, при ограниченных значениях параметра k отличия в профилях скорости и температуры несущественны, что подтверждает справедливость проведенного рассмотрения.

Авторы выражают благодарность К. Б. Павлову за полезные обсуждения работы.

Поступила 26 V 1982

ЛИТЕРАТУРА

1. **Блум Э. Я., Михайлов Ю. А., Озолс Р. Я.** Тепло-и массообмен в магнитном поле. Рига: Зинатне, 1980.
2. **Бозорт Р. М.** Ферромагнетизм. М.: ИЛ, 1956.
3. **Neuringer J. L., Rosensweig R. E.** Ferrohydrodynamics.— Phys. Fluids., 1964, vol. 7, N 12.
4. **Баштовой В. Г., Берковский Б. М.** Термомеханика ферромагнитных жидкостей.— Магнитная гидродинамика, 1973, № 3.
5. **Зайцев В. М., Шлиомис М. И.** К гидродинамике ферромагнитной жидкости.— ПМТФ, 1968, № 1.
6. **Михлин С. Г.** Курс математической физики. М.: Наука, 1968.

УДК 532.58

ИЗЛУЧЕНИЕ ВНУТРЕННИХ ВОЛН ПРИ ПЕРИОДИЧЕСКОМ ДВИЖЕНИИ ИСТОЧНИКОВ

В. А. Городцов, Э. В. Теодорович

(*Москва*)

Среди задач о волнах от движущихся источников все большее внимание привлекают задачи об излучении внутренних волн ускоренно движущимися источниками (см., например, [1, 2]). В данной работе рассмотрен вопрос о полной величине и спектральном распределении энергии излучения источниками массы, совершающими периодические движения. Метод рассмотрения и основные обозначения те же, что и в [3,4]*.

1. Излучение волн при движении источника по винтовой линии. В однородно стратифицированной идеальной несжимаемой жидкости общее

* Прим. редколлегии. Другой способ расчета потерь энергии движущимися источниками, основанный на знании асимптотических амплитуд внутренних волн, указан в монографии Дж. Лайтхилла «Волны в жидкостях». М.: Мир, 1981.

выражение для потерь энергии источником массы за единицу времени (см. [3, 4])

$$W = \int d^3r p(\mathbf{r}, t) m(\mathbf{r}, t),$$

пользуясь пропорциональностью (в рамках линейного описания) возмущения давления p вызывающему его источнику массы m, можно переписать в виде следующей квадратичной формы для фурье-образа источника массы $m(\mathbf{k}, \omega)$:

$$W = \frac{i}{(2\pi)^5} \int d^3k d\omega d\sigma \omega (N^2 - \omega^2) G^{\mathrm{ret}}(\mathbf{k}, \omega) e^{-i(\omega+\sigma)t} m(\mathbf{k}, \omega) m(-\mathbf{k}, \sigma). \tag{1.1}$$

Здесь $G^{\mathrm{ret}}(\mathbf{k}, \omega)$ — фурье-образ скалярной запаздывающей функции Грина уравнения внутренних волн, который в рассматриваемом случае жидкости с постоянной частотой Вяйсяля — Брента N в приближении Буссинеска имеет вид

$$G^{\mathrm{ret}}(\mathbf{k}, \omega) = [(\omega + i\varepsilon)^2 \mathbf{k}^2 - N^2\mathbf{k}_h^2]^{-1}, \tag{1.2}$$

где ω — частота; ε — бесконечно малая положительная добавка, определяющая правило обхода особенностей на вещественной оси в соответствии с требованием принципа причинности; $\mathbf{k}$ — волновой вектор, а $\mathbf{k}_h$ — его горизонтальная часть.

Для точечного источника постоянной интенсивности m_0, равномерно «падающего» по винтовой линии,

$$m(\mathbf{r}, t) = m_0\delta(\mathbf{r} - \mathbf{R}(t)), \tag{1.3}$$

$$\mathbf{R}(t) = (R_0 \sin \omega_0 t,\ R_0 \cos \omega_0 t,\ v_0 t),$$

с помощью известного разложения

$$e^{-i\xi \sin\alpha} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(\xi) e^{-in\alpha}, \tag{1.4}$$

где $J_n(\xi)$ — функция Бесселя, можно фурье-образ представить в виде ряда

$$m(\mathbf{k}, \omega) = 2\pi m_0 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(k_h R_0) e^{-in\varphi}\delta(\omega - n\omega_0 - k_z v_0). \tag{1.5}$$

Здесь φ — угловая координата вектора $\mathbf{k}_h$ в горизонтальной плоскости.

После подстановки этого ряда в (1.1) и некоторых преобразований, связанных с интегрированием по углу φ и частоте σ, получим

$$W = \frac{im_0^2}{(2\pi)^2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_0^\infty dk_h k_h J_n^2(k_h R_0) \int d\omega dk_z \omega (N^2 - \omega^2) G^{\mathrm{ret}} \times \\ \times (\mathbf{k}, \omega) \delta(\omega - k_z v_0 - n\omega_0). \tag{1.6}$$

В результате выполненных преобразований выражение для потерь энергии оказалось в рассматриваемом случае не зависящим от времени.

Из вещественности величины W ясно, что ненулевой вклад может дать лишь мнимая часть фурье-образа запаздывающей функции Грина, для которой из (1.2) следует

$$\operatorname{Im} G^{\mathrm{ret}}(\mathbf{k}, \omega) = -\pi \operatorname{sgn} \omega \delta(\omega^2\mathbf{k}^2 - N^2\mathbf{k}_h^2). \tag{1.7}$$

В итоге формулу для потерь энергии точечным источником, движущимся по винтовой линии, можно переписать в виде

$$W = \frac{m_0^2}{4\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int d\omega dk_z \int_0^\infty dk_h k_h J_n^2(k_h R_0) \times \\ \times |\omega| (N^2 - \omega^2) \delta(\omega^2\mathbf{k}^2 - N^2\mathbf{k}_h^2) \delta(\omega - k_z v_0 - n\omega_0). \tag{1.8}$$

Благодаря присутствию двух δ-функций количество интегрирований здесь может быть уменьшено до одного, при этом дальнейшие упрощения зависят от того, равна ли величина вертикальной составляющей скорости движения v_0 нулю или нет.

Рассмотрим далее наиболее интересный случай равномерного движения источника по горизонтальной окружности радиуса $R_0(v_0 = 0)$*. Выполнив в (1.8) интегрирования по k_z и по ω, получим

$$W = \frac{m_0^2}{2\pi} \sum_{n=1}^{[N/\omega_0]} \sqrt{N^2 - n^2\omega_0^2} \int_0^\infty dk_h J_n^2 (k_h R_0). \tag{1.9}$$

Замечательно, что от всего ряда по гармоникам в итоге осталось конечное число членов и верхняя граница их числа определяется величиной отношения угловой скорости оборотов источника по кругу ω_0 к частоте Вяйсяля — Брента N ($n \leqslant N/\omega_0$). Если угловая скорость превосходит N, то излучение вообще будет отсутствовать (это типичный эффект гармонического возбуждения внутренних волн, ср. п. 2 и 3 и [6]). Поскольку отношение ω_0/N имеет смысл «вращательного» числа Фруда V/NR_0, то условие излучения $\omega_0 < N$ можно интерпретировать как утверждение, что «вращательное» число Фруда должно быть меньше единицы.

Обратим теперь внимание на интеграл по волновому числу $\mathbf{k}_h$. Этот интеграл логарифмически расходится при больших значениях k_h, т. е. из-за большого вклада очень коротких волн в излучение точечного источника. Однако для более реальных источников ограниченной протяженности вклад волновых чисел, превышающих $1/r_0$ (r_0 — характерный пространственный размер источника), подавляется. Можно убедиться, что для достаточно произвольного нелокального источника неизменной формы $m(\mathbf{r}, t) = m_0 f(\mathbf{r} - \mathbf{R}(t))$ в общее выражение типа (1.6) для осредненных за период $2\pi/\omega_0$ потерь энергии войдет дополнительный множитель $|f(\mathbf{k})|^2$. Спадание этого множителя при больших волновых числах и обеспечит требуемое для сходимости спадание подынтегральной функции.

Слабый логарифмический характер расходимости интеграла в (1.9) позволяет рассчитывать на слабую зависимость конечных результатов от конкретного вида нелокальности источника. Поэтому при оценке величин можно использовать простой прием, состоящий в обрезании интеграла по волновым числам на верхнем пределе $k_h \sim 1/r_0$. Тогда асимптотика этого интеграла в предположении $R_0/r_0 \gg 1$ приводит к формуле

$$W \approx \frac{m_0^2}{2\pi^2 R_0} \ln \frac{R_0}{r_0} \sum_{n=1}^{[N/\omega_0]} \sqrt{N^2 - n^2\omega_0^2}. \tag{1.10}$$

Сравним полученный результат с результатом для другого крайнего случая, а именно для вертикального равномерного движения точечного источника массы. Для последнего при $R_0 = 0$, $\omega_0 = 0$ из (1.6) после интегрирований по компонентам волнового вектора следует (см. также [7])

$$W = \frac{m_0^2}{8\pi v_0} \int_{-N}^{+N} d\omega \,|\omega| = \frac{m_0^2 N^2}{8\pi v_0}. \tag{1.11}$$

Отсюда и из (1.10) видно, что при $\omega_0 \leqslant N$, $v_0 \sim V = \omega_0 R_0$ потери энергии при движении источника по кругу имеют одинаковый порядок величины с потерями энергии на излучение внутренних волн при равномерном прямолинейном движении.

Если источником волн является точечный диполь (дублет), вектор дипольного момента которого направлен по вектору скорости ($\mathbf{d} = \mu_0 \mathbf{V}$), то

$$m(\mathbf{r}, t) = -\mathbf{d}\nabla\delta(\mathbf{r} - \mathbf{R}(t)) = -\mu_0 \mathbf{V}\nabla\delta(\mathbf{r} - \mathbf{R}(t)) = \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{R}(t))$$

* В электродинамике излучение электромагнитных волн (т. е. волн без дисперсии) зарядом в подобной ситуации известно под названием «синхротронного излучения» [5].

и очевидно, что в выражении для $m(\mathbf{k}, \omega)$ в (1.5) появится дополнительный множитель — $i\omega$, а в подынтегральное выражение в (1.6) добавится соответственно множитель ω^2.

Для равномерно движущегося по горизонтальной окружности дублета после совершенно аналогичных обсуждавшимся выше преобразований выражения (1.6) получим

$$W \approx \frac{\mu_0^2}{2\pi^2 R_0} \ln \frac{R_0}{r_0} \sum_{n=1}^{[N/\omega_0]} n^2\omega_0^2 \sqrt{N^2 - n^2\omega_0^2}.$$

Для сравнения укажем, что при равномерном вертикальном движении дублета из (1.6) следует (см. также [7])

$$W = \mu_0^2 N^4/(16\pi v_0). \tag{1.12}$$

На основании известного моделирования шара радиуса r_0 дублетом с $\mu_0 = 2\pi r_0^3$ в однородной жидкости на последние результаты можно смотреть как на оценку излучения внутренних волн шаром в слабо стратифицированной жидкости (при $Nr_0 \ll V$, $Nr_0 \ll v_0$).

2. Излучение при колебаниях массовых источников постоянной интенсивности. Рассмотрим задачу о потерях энергии массовым источником, совершающим периодические движения несколько иного вида. Пусть на равномерное движение источника в одном направлении накладывается колебание с частотой ω_0 в другом направлении $\mathbf{a}$. Тогда с учетом формулы (1.4) для точечного источника имеем (ср. (1.3), (1.5))

$$m(\mathbf{r}, t) = m_0\delta(\mathbf{r} - \mathbf{R}(t)), \quad \mathbf{R}(t) = \mathbf{v}_0 t + \mathbf{a} \sin \omega_0 t,$$

$$m(\mathbf{k}, \omega) = 2\pi m_0 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(\mathbf{ka})\, \delta(\omega - n\omega_0 - \mathbf{kv}_0).$$

После подстановки последнего разложения в общую формулу для потерь энергии (1.1), осреднения по периоду колебаний $2\pi/\omega_0$, интегрирования по частоте σ и подстановки выражения (1.7) получим формулу

$$\langle W \rangle = \frac{m_0^2}{8\pi^2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int d^3k d\omega\, |\omega|\, (N^2 - \omega^2) \times \\ \times J_n^2(\mathbf{ka})\, \delta(\omega^2\mathbf{k}^2 - N^2\mathbf{k}_h^2)\, \delta(\omega - \mathbf{kv}_0 - n\omega_0), \tag{2.1}$$

вполне аналогичную (1.8).

В частном случае вертикально колеблющегося источника ($\mathbf{a} = (0, 0, a)$, $\mathbf{v}_0 = 0$) после интегрирования по горизонтальным компонентам волнового вектора эта формула значительно упрощается:

$$\langle W \rangle = \frac{m_0^2}{8\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int dk_z \int_{-N}^{N} d\omega\, |\omega|\, \delta(\omega - n\omega_0)\, J_n^2(k_z a).$$

Вводя «верхний» предел интегрирования $|k_z| \sim 1/r_0$ для регуляризации расходящегося интеграла по тем же соображениям, что и в п. 1, после интегрирования по частоте ω найдем

$$\langle W \rangle \approx \frac{m_0^2 \ln a/r_0}{4\pi a} \sum_{n=1}^{[N/\omega_0]} n\omega_0. \tag{2.2}$$

Из сравнения этой формулы с (1.10) ясно видна аналогия результатов для рассмотренных периодических движений точечных источников. Эта аналогия может быть прослежена и для других видов источников.

3. Излучение при движении источника по эллиптической траектории. Совершенно аналогично можно рассмотреть и случай неравномерного движения (с постоянной угловой скоростью ω_0) источника по эллиптической траектории. Так, для точечного источника, движущегося в горизонтальной плоскости по траектории $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$, имеем

$$m(\mathbf{r},\ t) = m_0\delta(\mathbf{r} - \mathbf{R}(t)),\quad \mathbf{R}(t) = (a \sin \omega_0 t,\ b \cos \omega_0 t,\ 0),$$

с помощью формулы (1.4) находим

$$m(\mathbf{k},\ \omega) = 2\pi m_0 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(\varkappa)\, e^{-in\varphi}\delta(\omega - n\omega_0), \tag{3.1}$$

$$\varkappa = |\boldsymbol{\varkappa}|,\quad \boldsymbol{\varkappa} = (k_x a,\ k_y b,\ 0),\quad \cos\varphi = ak_x/\varkappa.$$

После подстановки этого разложения в квадратичную форму (1.1), выполняя аналогичные проведенным ранее преобразования (осреднение по периоду движения $2\pi/\omega_0$, замену функции Грина на ее мнимую часть (1.7) и интегрирования по частотам и вертикальной компоненте волнового вектора), получим в конечном итоге

$$\langle W\rangle = \frac{m_0^2}{4\pi^2} \sum_{n=1}^{[N/\omega_0]} \sqrt{N^2 - n^2\omega_0^2} \int d^2k_h \frac{J_n^2(\varkappa)}{k_h}. \tag{3.2}$$

Эта формула в частном случае круговой траектории ($a = b$), как и следовало ожидать, совпадает с формулой (1.9), за исключением того, что в (3.2) дополнительно выполнено осреднение величины потерь за период движения.

В другом предельном случае $b = 0$ (или $a = 0$) формула (3.2) описывает излучение при колебательном движении источника по горизонтальной оси. Можно видеть, что спектральный состав излучения практически не зависит от частного типа движения. Все различие связано с различием величины регуляризованного интеграла по волновым числам, который асимптотически при «размерах» источника r_0, малых по сравнению с масштабом движения, при небольших номерах не зависит от номера n ($J_n^2(\xi) \approx \approx \frac{2}{\pi\xi}\cos^2\xi$ при $\xi \gg 1$).

4. Дополнение. Альтернативный способ расчета излучения. Выше подсчитывались потери энергии движущимися источниками за единицу времени. По закону сохранения энергии при равномерном движении источника в идеальной жидкости потери энергии равны энергии излучения внутренних волн (см. подробнее [3, 4]), определяемой как поток энергии через окружающую источник поверхность. То же самое верно при периодическом движении для осредненных по времени характеристик. Ниже фактическим расчетом продемонстрируем эквивалентность двух способов и сделаем это на примере равномерного вертикального движения точечного источника, когда величина потерь энергии конечна (см. (1.11), (1.12)).

Для вектора плотности потока энергии $\mathbf{S} = p(\mathbf{r},\ t)\mathbf{v}(\mathbf{r},\ t)$, проинтегрированного по всему времени пролета источника, имеем

$$\int dt\, \mathbf{S} = \frac{1}{2\pi} \int d\omega\, p(\mathbf{r},\ \omega)\, \mathbf{v}(\mathbf{r},\ -\omega). \tag{4.1}$$

Входящие в эту формулу малые возмущения давления и скорости выражаются через вызывающий их источник массы $m(\mathbf{r},\ \omega)$ и «потенциал» $\psi_\omega \equiv \psi(\mathbf{r},\ \omega)$ по формулам [3]

$$\left(N^2\nabla_h^2 - \omega^2\Delta\right)\psi_\omega = -m(\mathbf{r},\ \omega), \tag{4.2}$$

$$p(\mathbf{r},\ \omega) = -i\omega(N^2 - \omega^2)\psi_\omega,\quad \mathbf{v}(\mathbf{r},\ \omega) = (\omega^2\nabla - N^2\nabla_h)\psi_\omega.$$

Используя последние соотношения, для горизонтальной составляющей вектора потока энергии (4.1) находим

$$\int dt\mathbf{S}_h = \frac{i}{2\pi} \int d\omega\omega\, (N^2 - \omega^2)^2\, \psi_\omega \nabla_h \psi_{-\omega}. \tag{4.3}$$

В случае точечного вертикально движущегося источника

$$m(\mathbf{r}, t) = m_0\delta(x)\,\delta(y)\,\delta(z - v_0 t), \quad m(\mathbf{r}, \omega) = \frac{m_0}{v_0}\,\delta(x)\,\delta(y)\,e^{iz\omega/v_0}$$

решение уравнения (4.2) можно записать с помощью фурье-образа функции Грина $G^{\mathrm{ret}}(r_h, k_z, \omega)$ следующим образом:

$$\psi_\omega = -\frac{m_0}{v_0}\,e^{iz\omega/v_0}G^{\mathrm{ret}}\left(\mathbf{r}_h, \frac{\omega}{v_0}, \omega\right) \equiv -\frac{m_0}{v_0}\,e^{iz\omega/v_0}G,$$

затем с учетом вещественности преобразовать выражение (4.3) к виду

$$(4.4)\quad \int dt\mathbf{S}_h = -\frac{m_0^2}{2\pi v_0^2}\int d\omega\omega\,(N^2 - \omega^2)^2\,(\operatorname{Im} G\nabla_h \operatorname{Re} G - \operatorname{Re} G\nabla_h \operatorname{Im} G).$$

В жидкости с постоянной частотой Вайсяля — Брента функция $G^{\mathrm{ret}}(\mathbf{r}_h, k_z, \omega)$ удовлетворяет уравнению

$$(4.5)\quad \{N^2\nabla_h^2 - (\omega + i\varepsilon)^2(\nabla_h^2 - k_z^2)\}\,G^{\mathrm{ret}}(\mathbf{r}_h, k_z, \omega) = \delta(\mathbf{r}_h)$$

и, как можно убедиться, выражается через цилиндрические функции

$$(4.6)\quad G^{\mathrm{ret}}(\mathbf{r}_h, k_z, \omega) = \frac{\theta(N^2 - \omega^2)}{4(N^2 - \omega^2)}\{N_0(\rho) - i\operatorname{sgn}\omega J_0(\rho)\} + \frac{\theta(\omega^2 - N^2)}{2\pi(\omega^2 - N^2)}K_0(\rho),$$

$$\rho \equiv r_h\frac{|\omega k_z|}{\sqrt{|\omega^2 - N^2|}}.$$

Подставив это выражение в формулу (4.4), можно убедиться, что благодаря известному соотношению для цилиндрических функций

$$(4.7)\quad J_0(\rho)\frac{\partial}{\partial\rho}N_0(\rho) - N_0(\rho)\frac{\partial}{\partial\rho}J_0(\rho) = \frac{2}{\pi\rho}$$

эта формула упрощается следующим образом:

$$(4.8)\quad \int dt\mathbf{S}_h = \frac{m_0^2}{16\pi^2 v_0^2}\frac{\mathbf{r}_h}{r_h^2}\int_{-N}^{N} d\omega\,|\omega| = \left(\frac{m_0 N}{4\pi v_0 r_h}\right)^2\mathbf{r}_h.$$

Отметим также, что для такого упрощения на самом деле достаточно знать лишь функцию $\operatorname{Im} G^{\mathrm{ret}}(\mathbf{r}_h, k_z, \omega)|_{\mathbf{r}_h=0} = -\frac{1}{4}(N^2 - \omega^2)^{-1}\operatorname{sgn}\omega\theta(N^2 - \omega^2)$, а не все выражение (4.6). Действительно, из (4.5) следует

$$[(N^2 - \omega^2)\nabla_h^2 + \omega^2 k_z^2]\operatorname{Re} G = \delta(\mathbf{r}_h), \quad [(N^2 - \omega^2)\nabla_h^2 + \omega^2 k_z^2]\operatorname{Im} G = 0.$$

Умножив первое уравнение на $\operatorname{Im} G$, второе — на $\operatorname{Re} G$ и беря разность полученных выражений, найдем

$$\nabla_h(\operatorname{Im} G\nabla_h \operatorname{Re} G - \operatorname{Re} G\nabla_h \operatorname{Im} G) = \frac{\operatorname{Im} G}{N^2 - \omega^2}\,\delta(\mathbf{r}_h)$$

и в результате будем иметь

$$(4.9)\quad \operatorname{Im} G\nabla_h \operatorname{Re} G - \operatorname{Re} G\nabla_h \operatorname{Im} G = \frac{\operatorname{Im} G(\mathbf{r}_h = 0, k_z, \omega)}{N^2 - \omega^2}\nabla_h\frac{\ln r_h}{2\pi}.$$

Следовательно, в формуле (4.4) в подынтегральное выражение фактически входит $\operatorname{Im} G|_{r_h=0}$. Конечно, вся эта выкладка эквивалентна предыдущей, поскольку с учетом (4.6) соотношение (4.9) сводится к (4.7).

Если теперь проинтегрировать выражение (4.8), спроектированное на направление $\mathbf{r}_h$, по поверхности цилиндрического участка с единичной высотой и радиусом r_h, то получим полную энергию излучения на единицу пути

$$2\pi\mathbf{r}_h\int dt\mathbf{S}_h = \frac{m_0^2 N^2}{8\pi v_0^2}.$$

Отсюда умножением на v_0 получается формула (1.11) для потерь энергии за единицу времени.

Поступила 14 V 1982

ЛИТЕРАТУРА

1. **Стурова И. В.** Внутренние волны, возникающие в экспоненциально стратифицированной жидкости при произвольном движении источника.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1980, № 3.
2. **Graham E. W., Graham B. B.** The tank wall effect on internal waves due to a transient vertical force moving at fixed depth in a density-stratified fluid.— J. Fluid Mech., 1980, vol. 97, N 1.
3. **Городцов В. А., Теодорович Э. В.** Об излучении внутренних волн при равномерном прямолинейном движении локальных и нелокальных источников.— Изв. АН СССР. ФАО, 1980, т. 16, № 9.
4. **Городцов В. А., Теодорович Э. В.** Плоская задача для внутренних волн, порождаемых движущимися сингулярными источниками.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1981, № 2.
5. **Тернов И. М., Михайлин В. В., Халилов В. Р.** Синхротронное излучение и его применения. М.: Изд-во МГУ, 1980.
6. **Mowbray D. E., Rarity B. S. H.** A theoretical and experimental investigation of the phase configuration of internal waves of small amplitude in a density stratified liquid.— J. Fluid Mech., 1967, vol. 28, N 1.
7. **Городцов В. А.** Излучение внутренних волн при вертикальном движении тел через неоднородную жидкость.— Инж.-физ. журн., 1980, т. 39, № 4.

УДК 532.517.4

РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ ФЛУКТУАЦИЙ СКОРОСТИ В ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ ТУРБУЛЕНТНЫХ СПУТНЫХ СТРУЯХ

В. И. Букреев, В. А. Костомаха

(Новосибирск)

Получены экспериментальные данные об одномерных законах распределения вероятностей, а также о статистических моментах вплоть до шестого порядка, турбулентных флуктуаций скорости в спутных струях (гидродинамических следах) за телами плохо и удобообтекаемой формы. Они дополняют имеющуюся аналогичную информацию для различных турбулентных течений: за решеткой [1, 2], в двумерном следе [3], в круглой [4] и плоской [5] струях, в пограничном слое [6], в круглой трубе [7] и др. На основе этих данных обсуждаются вопросы об автомодельности рассматриваемого течения, о влиянии условий его формирования на характеристики флуктуаций в зоне автомодельности, а также о роли перемежаемости на границе следа.

1. Опыты проводились в низкотурбулентной аэродинамической трубе с помощью термоанемометрической аппаратуры фирмы «DISA Electronic» с линеаризатором. В рабочей части трубы, имеющей длину 4 м и поперечное сечение 40×40 см с треугольными вставками в углах для ослабления вторичных течений, на проволочках диаметром 0,05 мм закреплялась либо сфера диаметром $D = 1$ см, либо тело вращения (под нулевым углом атаки) диаметром миделева сечения $D = 1$ см и удлинением 8 : 1. И в том и в другом случае число Рейнольдса $\mathrm{Re} = U_\infty D/\nu = 10^4$ (U_∞ — скорость набегающего потока, ν — кинематический коэффициент вязкости). Как показали измерения, такое значение Re было достаточно большим, чтобы в следе за сферой имела место автомодельность течения по продольной координате, а следовательно, и подобие по числу Рейнольдса. Для получения подобия по Re и автомодельности в следе за удлиненным телом в его лобовой части устанавливалось турбулизующее колечко диаметром 8 мм и толщиной 0,5 мм. Вследствие этого силы сопротивления F_x тела и сферы не сильно отличались друг от друга, так что коэффициенты сопротивления c_x, определяемые соотношением

$$F_x = c_x\rho SU_\infty^2/2, \quad S = \pi D^2/4,$$