Прикладная механика и техническая физика, 1996, т. 37, № 4

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О БАЛКЕ С РАЗРЕЗОМ

УДК 539.3+519.6

В. А. Ковтуненко

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск

Рассматривается модель Кирхгофа тонкой упругой балки, закрепленной по краям и находящейся в равновесии под действием внешней нагрузки. В балке имеется поперечный разрез, на берегах которого поставлено условие их взаимного непроникания. Данная модель описывается задачей минимизации функционала энергии или эквивалентным ей вариационным неравенством. Построено аналитическое решение задачи равновесия балки с разрезом на основе решения задачи о балке без разреза. При помощи полученного решения определяются основные характеристики состояния балки. Для конкретных функций внешних сил приведены примеры решений.

Далее рассматривается задача оптимального управления разрезом с двумя критериями: минимальное раскрытие разреза и минимальное отклонение напряжений от заданных. В обоих случаях исследовано поведение оптимальных разрезов и приведены примеры решений.

Постановки задач об упругих телах с трещинами (разрезами) можно найти, например, в [1, 2]. Краевые условия на берегах трещины в виде условия непроникания поставлены в [3, 4]. Вопросы решения задач минимизации с ограничением или вариационных неравенств изучались, например, в [5, 6]. Некоторые примеры точных решений вариационных неравенств приведены в [7, 8]. Задачи оптимального управления для пластин с трещинами рассматривались в [3, 4]. Метод численного решения контактных задач для пластин предложен в [9, 10].

Задача равновесия балки. Пусть срединная линия балки совпадает с отрезком $\Omega = (a, b)$. Ищем функцию перемещений точек балки $w(x)$ под действием заданной внешней силы $f(x)$ (рис. 1). Если $f \in L^2(\Omega)$, тогда $w \in H^2(\Omega) \cap \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$ — единственное решение следующей краевой задачи:

$$-D^2 w = f, \qquad w(a) = w(b) = 0. \tag{1}$$

Пусть балка имеет поперечный разрез в точке $y, a < y < b$. Ищем функцию $u(x)$ перемещений балки (рис. 1). Условие непроникания берегов разреза запишем в виде [3, 4]

$$[u]_y = u(y+0) - u(y-0) \geqslant 0.$$

Обозначим $\Omega_y = \Omega \backslash \{y\}$. Определим основное гильбертово пространство

$$X_y = \{u \in H^1(\Omega_y), \quad u(a) = u(b) = 0\}$$

и замкнутое выпуклое множество

$$K_y = \{u \in X_y, \quad [u]_y \geqslant 0\}.$$

Введем в X_y скалярное произведение $(u, v)_y = \langle Du, Dv \rangle_y$ и эквивалентную норму $\|u\|_y^2 = (u, u)_y$, где D — оператор дифференцирования; $\langle \cdot, \cdot \rangle_y$ означает интегрирование по Ω_y. Определим потенциальную энергию балки $\Pi_y(v) = 0{,}5\|v\|_y^2 - \langle f, v \rangle_y$. Тогда задача равновесия

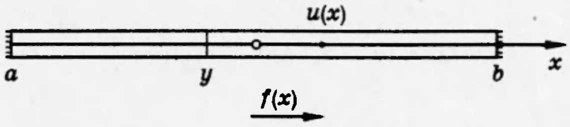

Рис. 1

балки заключается в минимизации функционала Π_y [3, 4]:

$$\inf_{v \in K_y} \Pi_y(v) = \Pi_y(u). \tag{2}$$

Другая эквивалентная формулировка задачи (2) имеет вид вариационного неравенства

$$u \in K_y, \qquad (u, v - u)_y \geqslant \langle f, v - u \rangle_y \qquad \forall v \in K_y. \tag{3}$$

Введем обозначения:

$$a^+ = \begin{cases} a, & a > 0, \\ 0, & a \leqslant 0, \end{cases} \qquad a^- = \begin{cases} 0, & a \geqslant 0, \\ -a, & a < 0, \end{cases}$$

тогда $a = a^+ - a^-$, $\quad a^+, a^- \geqslant 0, \quad a^+ a^- = 0$.

Теорема 1. *Единственным решением задачи* (2) *является функция*

$$u(x) = w(x) - Dw^+(y)\alpha_y(x), \tag{4}$$

где

$$\alpha_y(x) = \begin{cases} x - a, & x \in (a, y - 0), \\ x - b, & x \in (y + 0, b); \end{cases}$$

w — *решение задачи* (1).

Доказательство. В силу эквивалентности (2) и (3) будем доказывать (3). Отметим следующие свойства функции $\alpha_y \in C^\infty(\Omega_y) \cap X_y$ (рис. 2):

$$[\alpha_y]_y = -(b - a), \quad D\alpha_y(x) \equiv 1 \quad (x \neq y), \qquad D^2\alpha_y(x) \equiv 0 \quad (x \neq y).$$

Тогда после интегрирования по частям получим $(\alpha_y, h)_y = \langle -D^2\alpha_y, h\rangle_y - [D\alpha_y h]_y = -[h]_y$. Далее, в силу (1) выполнено $\langle f, h\rangle_y = \langle -D^2 w, h\rangle_y = (w, h)_y + Dw(y)[h]_y$, $(u, h)_y = (w, h)_y - Dw^+(y)(\alpha_y, h)_y = (w, h)_y + Dw^+(y)[h]_y$. Вычислим $[u]_y = [w]_y - Dw^+(y)[\alpha_y]_y = (b-a)Dw^+(y)$. Таким образом, имеем $(u, v-u)_y - \langle f, v-u\rangle_y = \Big(Dw^+(y) - Dw(y)\Big)[v-u]_y = Dw^-(y)[v-u]_y = Dw^-(y)[v]_y - (b-a)Dw^-(y)Dw^+(y) = Dw^-(y)[v]_y \geqslant 0 \quad \forall v \in K_y$. Поскольку $[u]_y \geqslant 0$, то u, заданное формулой (4), принадлежит K_y и является решением (3). Покажем его единственность. Пусть u_1 и u_2– два решения вариационного неравенства (3), т. е. $(u_1, v_1 - u_1)_y \geqslant \langle f, v_1 - u_1\rangle_y \quad \forall v_1 \in K_y$, $(u_2, v_2 - u_2)_y \geqslant \langle f, v_2 - u_2\rangle_y \quad \forall v_2 \in K_y$. Возьмем $v_1 = u_2$, $v_2 = u_1$ и сложим два неравенства. Тогда получим $\|u_1 - u_2\|_1^2 \leqslant 0$, откуда и следует единственность решения. Теорема доказана.

Замечание 1. Из (1) вытекает, что функция w, а поэтому и решение u принадлежат классу $H^2(\Omega_y)$. Тогда решение (4) задачи (3) в силу свойств w и α_y является решением краевой задачи

$$-D^2 u = f \quad \text{в} \quad \Omega_y, \qquad [u]_y = (b-a)Dw^+(y), \qquad [Du]_y = 0, \quad Du(y) = -Dw^-(y).$$

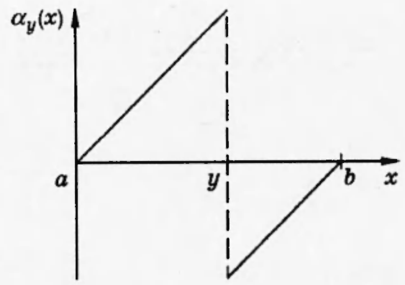

Рис. 2

Замечание 2 (гладкость решения). Из (1) и (4) следует, что если $f \in H^n(\Omega_y)$ $(n \geqslant 0)$, то $u \in H^{n+2}(\Omega_y)$. Если $f \in C^n(\Omega_y)$ $\quad (n \geqslant 0)$, то $u \in C^{n+2}(\Omega_y)$.

Замечание 3 (обратная задача). Пусть произвольная функция u принадлежит классу $H^2(\Omega_y) \cap X_y$ и для нее выполнено $[Du]_y = 0$, $\quad Du(y)[u]_y = 0$, $[u]_y \geqslant 0$, $\quad Du(y) \leqslant 0$. Тогда u является решением задачи (3) при $f = -D^2u$.

Докажем последний результат. Имеем $u \in K_y$. После интегрирования по частям получим

$$(u, v-u)_y - \langle f, v-u\rangle_y = \langle -D^2u - f, v-u\rangle_y - [Du(v-u)]_y =$$
$$= -Du(y)[v]_y + Du(y)[u]_y = -Du(y)[v]_y \geqslant 0$$

для любого $v \in K_y$. Что и требовалось доказать.

После нахождения функции перемещений $u(x) = w(x) - Dw^+(y)\alpha_y(x)$ можно вычислить все физические характеристики решения:
деформацию $\varepsilon(x)$ или напряжение $\sigma(x)$:

$$\varepsilon(x) = \sigma(x) = Du(x) = Dw(x) - Dw^+(y)$$

(отметим, что напряжение $\sigma(x)$ является непрерывной на (a, b) функцией, т. е. принадлежит классу $H^1(\Omega_y) \cap C(a, b)$),
контактное усилие

$$p = -\sigma(y) = Dw^-(y) \geqslant 0,$$

потенциальную энергию балки

$$\Pi(u) = 0{,}5\|u\|_y^2 - \langle f, u\rangle_y = -0{,}5\|u\|_y^2 - [Duu]_y = -0{,}5\|Dw - Dw^+(y)\|_0^2.$$

Здесь $\|\cdot\|_0$ обозначает норму в $L_2(a, b)$.

Примеры точных решений. Пример 1. Пусть $f(x) \equiv c \quad (c \geqslant 0)$, тогда $w(x) = -0{,}5c(x-a)(x-b)$, $\quad Dw(y) = c(0{,}5(a+b) - y)$. Если $a < y \leqslant 0{,}5(a+b)$, то

$$u(x) = -\frac{c}{2}\begin{cases} (x-a)(x+a-2y), & x \in (a, y-0), \\ (x-b)(x+b-2y), & x \in (y+0, b), \end{cases}$$

$$[u]_y = 0{,}5c(b-a)(a+b-2y) \geqslant 0, \quad \sigma(u) = c(y-x), \quad p = 0 \qquad \text{(рис. 3)}.$$

Если $0{,}5(a+b) \leqslant y < b$, то $u(x) = -0{,}5c(x-a)(x-b)$, $\quad [u]_y = 0$, $\sigma(u) = 0{,}5c(a+b-2x)$, $\quad p = 0{,}5c(2y - (a+b))$ (рис. 4). Зависимость $[u]_y$ и p от y показана на рис. 5.

Пример 2. Пусть $f(x) = \sin k(x-a) \quad (k = \pi/(b-a))$, тогда

$$w(x) = k^{-2}\sin k(x-a), \quad Dw(x) = k^{-1}\cos k(x-a).$$

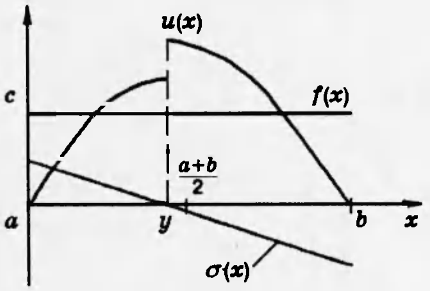

Рис. 3

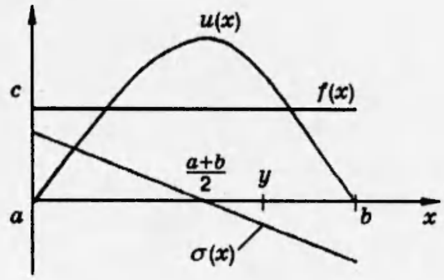

Рис. 4

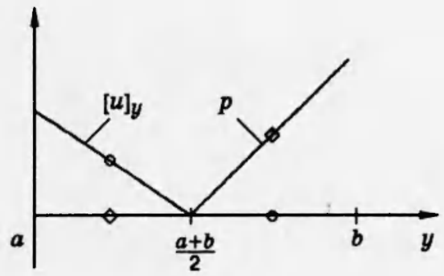

Рис. 5

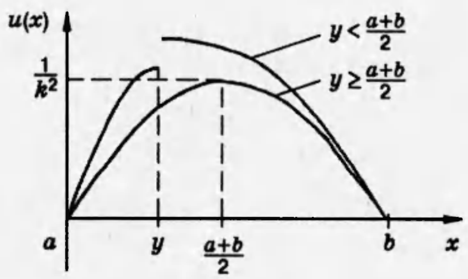

Рис. 6

Поэтому

$$u(x) = k^{-2}\begin{cases} \sin k(x-a), & y \geqslant 0{,}5(a+b), \\ \sin k(x-a) - k\cos k(y-a)\alpha_y(x), & y \leqslant 0{,}5(a+b) \end{cases} \quad \text{(рис. 6)},$$

$$\sigma(x) = k^{-1}\begin{cases} \cos k(x-a), & y \geqslant 0{,}5(a+b), \\ \cos k(x-a) - \cos k(y-a), & y \leqslant 0{,}5(a+b) \end{cases} \quad \text{(рис. 7)},$$

$$p = k^{-1}\begin{cases} -\cos k(y-a), & y \geqslant 0{,}5(a+b), \\ 0, & y \leqslant 0{,}5(a+b). \end{cases}$$

Скачок

$$[u]_y = k^{-1}(b-a)\begin{cases} 0, & y \geqslant 0{,}5(a+b), \\ \cos k(y-a), & y \leqslant 0{,}5(a+b) \end{cases}$$

показан на рис. 8.

Оптимальное управление разрезом. 1. Рассмотрим задачу минимизации раскрытия трещины [2]:

$$\inf_{a<y<b} [u]_y, \tag{5}$$

где u — решение задачи (2). В силу (4) задача (5) эквивалентна

$$\inf_{a<y<b} Dw^+(y). \tag{6}$$

Определим следующие множества:

$$I^+(w) = \{y \in \Omega, \quad Dw(y) > 0\}, \qquad I^-(w) = \{y \in \Omega, \quad Dw(y) \leqslant 0\}.$$

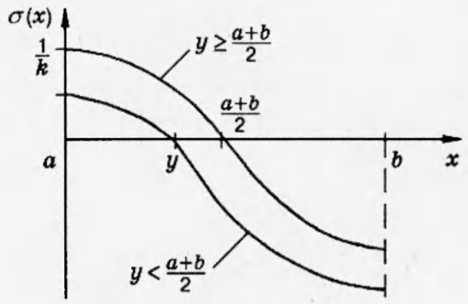

Рис. 7

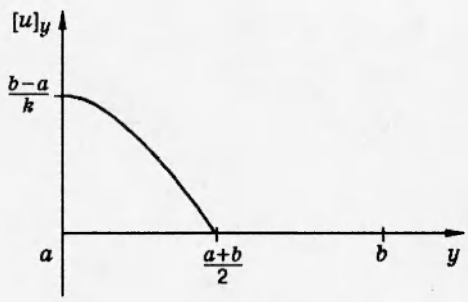

Рис. 8

Тогда имеем $I^+(w) \cup I^-(w) = \Omega$. Поскольку функция $w \in C^1(\Omega)$ (в силу теорем вложения), то Dw — непрерывная функция. А так как $w(a) = w(b) = 0$, то $I^-(w) \neq \varnothing$. Таким образом, в силу $Dw^+(y) \geqslant 0$ получим $\inf\limits_{a<y<b} [u]_y = 0$ для любого $y \in I^-(w)$.

Пример 1. Для $f(x) \equiv c$ $(c \geqslant 0)$ и для любого $0{,}5(a+b) \leqslant y < b$ функция $u(x) = -0{,}5c(x-a)(x-b)$ будет решением задачи (5) (см. рис. 5).

Пример 2. Для $f(x) = \sin k(x-a)$ $(k = \pi/(b-a))$ и для любого $0{,}5(a+b) \leqslant y < b$

$$u(x) = k^{-2} \sin k(x-a)$$

является решением задачи (5) (рис. 8).

2. Рассмотрим задачу оптимизации напряжений

$$\inf_{a<y<b} \{J(y) = \|\sigma - \sigma_0\|_0^2\}, \tag{7}$$

где $\sigma_0 \in L_2(\Omega)$ — заданная функция напряжений, а $\sigma = Du$ (u — решение задачи (2)). В силу свойств функции w можно получить

$$J(y) = \|Dw - Dw^+(y) - \sigma_0\|_0^2 = \|Dw - \sigma_0\|_0^2 + 2\int_a^b \sigma_0 dx Dw^+(y) + (b-a)(Dw^+(y))^2.$$

Если $\int_a^b \sigma_0 dx \geqslant 0$, то $\inf\limits_{a<y<b} J(y) = \|Dw - \sigma_0\|_0^2$ достигается при любом $y \in I^-(w)$ (тогда $Dw^+(y) = 0$). Если $\int_a^b \sigma_0 dx < 0$ и $I^+(w) \neq \varnothing$, то инфинум может быть достигнут при таком y_*, что $Dw^+(y_*) + (b-a)^{-1} \int_a^b \sigma_0 dx \to \inf$. В частности, если существует $y_* \in I^+(w)$ такое, что $Dw^+(y_*) = -(b-a)^{-1} \int_a^b \sigma_0 dx$, то

$$J(y_*) = \|Dw - \sigma_0\|_0^2 - (b-a)^{-1}\Big(\int_a^b \sigma_0 dx\Big)^2 \qquad \text{(рис. 9)}\ .$$

Возьмем для примера случай, когда $\sigma_0(x) \equiv \mathrm{const}$, $\sigma_0 < 0$, тогда

$$(b-a)^{-1} \int_a^b \sigma_0 dx = \sigma_0 < 0.$$

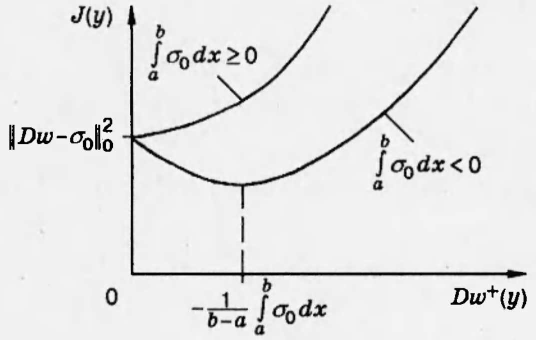

Рис. 9

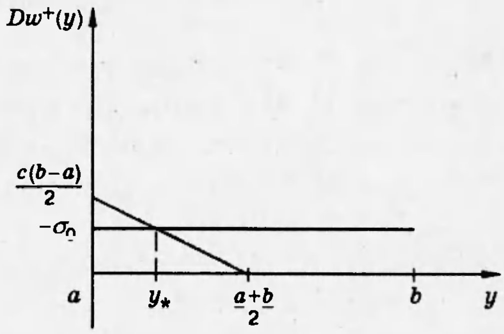

Рис. 10

Пример 1. Пусть $f(x) \equiv c \quad (c \geqslant 0)$, тогда

$$Dw^+(y) = \begin{cases} 0{,}5c(a+b-2y), & a < y \leqslant 0{,}5(a+b), \\ 0, & 0{,}5(a+b) \leqslant y < b. \end{cases}$$

Пусть $-\sigma_0 < 0{,}5c(b-a)$, тогда в точке $y_* = 0{,}5(a+b)+\sigma_0/c$ имеем $Dw^+(y_*) = -\sigma_0$ (рис. 10) и достигается минимум (7) в виде

$$J(y_*) = \|0{,}5\,c(a+b-2x)\|_0^2 = \frac{c^2(b-a)^3}{12}.$$

Если $-\sigma_0 \geqslant 0{,}5c(b-a)$, то $y_* = a$ и инфинум

$$J(a) = \|0{,}5\,c(a+b-2x) - 0{,}5c\,(b-a) - \sigma_0\|_0^2 = \frac{c^2(b-a)^3}{12}\left(1+3\left(1+\frac{2\sigma_0}{c(b-a)}\right)^2\right)$$

не достигается. Если $\sigma_0 \geqslant 0$, тогда для любого $y_* \in I^-(w)$ минимум (7) есть

$$J(y_*) = \|0{,}5\,c(a+b-2x) - \sigma_0\|_0^2 = \frac{c^2(b-a)^3}{12}\left(1+3\left(\frac{2\sigma_0}{c(b-a)}\right)^2\right).$$

Пример 2. Пусть $f(x) = \sin k(x-a) \quad (k = \pi/(b-a))$. Тогда

$$Dw^+(y) = k^{-1}\begin{cases} \cos k(y-a), & a < y \leqslant 0{,}5(a+b), \\ 0, & 0{,}5(a+b) \leqslant y < b. \end{cases}$$

Пусть $\sigma_0 < 0$. Если $-\sigma_0 < k^{-1}$, то в точке $y_* = a + k^{-1}\arccos(-k\sigma_0)$ имеем $Dw^+(y_*) = -\sigma_0$ и достигается минимум

$$J(y_*) = \|Dw(x)\|_0^2 = \frac{b-a}{2k^2}.$$

Если $-\sigma_0 \geqslant k^{-1}$, то инфинум $J(y)$ не достигается и имеет вид

$$J(a) = \|k^{-1}\cos k(x-a) - k^{-1} - \sigma_0\|_0^2 = (b-a)\left(\frac{1}{2k^2} + (k^{-1}+\sigma_0)^2\right).$$

Если $\sigma_0 \geqslant 0$, то для любого $y_* \geqslant 0{,}5(a+b)$ минимум $J(y)$ есть

$$J(y_*) = \|k^{-1}\cos k(x-a) - \sigma_0\|_0^2 = (b-a)\left(\frac{1}{2k^2} + \sigma_0^2\right).$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 95-01-00886а).

ЛИТЕРАТУРА

1. **Морозов Н. Ф.** Математические вопросы теории трещин. М.: Наука, 1984.
2. **Панасюк В. В., Андрейкив А. В., Ковчик С. Е.** Методы оценки трещиностойкости конструкционных материалов. Киев, 1977.
3. **Хлуднев А. М.** Об экстремальных формах разрезов в пластине // Изв. РАН. МТТ. 1992. № 1. С. 170–176.
4. **Khludnev A. M.** Existence of extreme unilateral cracks in a plate // Control and Cybernetics. 1994. V. 23, N 3. P. 453–460.
5. **Гловински Р., Лионс Ж. Л., Тремольер Р.** Численное исследование вариационных неравенств. М.: Мир, 1979.
6. **Мину М.** Математическое программирование. М.: Наука, 1990.
7. **Cimatti G.** The constrained elastic beam // Meccanica. 1973. V. 86, N 2. P. 119–124.
8. **Barbu V., Korman P.** Approximating optimal controls for elastic obstacle problem by monotone iteration schemes // Numer. Funct. Anal. and Optimiz. 1991. N 12. P. 429–442.
9. **Ковтуненко В. А.** Итерационный метод решения вариационных неравенств в контактной упругопластической задаче с использованием метода штрафа // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1993. № 9. С. 1409–1415.
10. **Ковтуненко В. А.** Метод численного решения упругой задачи о контакте // ПМТФ. 1994. Т. 35, № 5. С. 142–146.

Поступила в редакцию 5/VI 1995 г.