

ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ ПОЛЕ В ПОПЕРЕЧНОМ СЕЧЕНИИ КАНАЛА  
ХОЛЛОВСКОГО МГД ГЕНЕРАТОРА

*С. А. Медин, И. М. Руткевич*

(Москва)

При движении частично ионизованного газа в магнитогидродинамических каналах распределение электропроводности обычно неоднородно вследствие охлаждения плазмы вблизи электродных стенок. В МГД генераторах Холла с короткозамкнутыми в поперечном сечении канала электродами возникновение неоднородностей приводит к снижению эффективности МГД преобразования [1]. При этом в поперечном сечении образуется двумерное электрическое поле. Численные расчеты этого эффекта для каналов прямоугольного сечения проведены в работах [2,3].

Вместе с тем целесообразно построение аналитических решений модельных задач о распределении потенциала в холловских каналах, позволяющих провести качественный анализ влияния неоднородной проводимости на локальные и интегральные электрические характеристики генераторов. В предлагаемой работе дано точное решение поперечной двумерной задачи для случая канала с эллиптическим сечением, вытянутым вдоль магнитного поля.

При построении решения использовано параметрическое модельное распределение электропроводности типа пограничного слоя. Проанализированы зависимости электрического поля и тока, а также интегральных электрических характеристик генератора от параметров неоднородности.

1. Рассмотрим некоторые общие соотношения для цилиндрических холловских МГД каналов с произвольной формой сечения  $S$ . Предположим, что в канале  $|x| < L$ ,  $(y, z) \in S$  происходит стационарное движение анизотропно проводящего газа. Приложенное магнитное поле будем считать однородным

$$\mathbf{V} = -B\mathbf{e}_z, B = \text{const} > 0$$

а параметр магнитогидродинамического взаимодействия и магнитное число Рейнольдса — малыми по сравнению с единицей.

Примем, что боковая поверхность канала набрана из большого числа тонких замкнутых электродов, разделенных между собой тонкими диэлектрическими проставками [2], так что границу  $\Gamma$  произвольного сечения  $x = \text{const}$  можно считать эквипотенциальной. К крайним секциям канала  $x = \pm L$  подключена внешняя нагрузка.

Предполагается, что длина канала много больше его характерного поперечного размера. В этом случае проводимость считается известной функцией поперечных координат  $\sigma = \sigma(y, z)$ . Параметр Холла электронов  $\beta$  принимается постоянным и заданным, а параметр Холла ионов — пренебрежимо малым.

Для скорости потока задается однородный профиль

$$\mathbf{V} = U\mathbf{e}_x, U = \text{const} > 0$$

При наличии турбулентного пограничного слоя действительный профиль скорости в канале будет наполненным. В этом случае интегральные электрические характеристики генератора, работающего на слабоионизованной плазме, более чувствительны к резким изменениям проводимости в температурном пограничном слое, чем к неоднородностям поля скорости.

Пренебрегая влиянием концевых зон, приходим к задаче о двумерных распределениях электрического поля  $\mathbf{E}(y, z)$  и плотности тока  $\mathbf{j}(y, z)$  с последующим расчетом интегральных характеристик генератора. Используемая система уравнений имеет вид

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{E} &= 0, & \operatorname{div} \mathbf{j} &= 0 \\ \mathbf{j} &= \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{V} \times \mathbf{B}) - \mathbf{j} \times \boldsymbol{\beta}, & \boldsymbol{\beta} &= \beta \mathbf{V} / B \end{aligned} \quad (1.1)$$

Введем электрический потенциал  $\chi$ , так что  $\mathbf{E} = -\nabla \chi$ . Из условия независимости электрического поля от координаты  $x$  следует, что  $\chi$  имеет вид

$$\chi(x, y, z) = E_{\parallel} x + \varphi(y, z), \quad E_{\parallel} = -E_x = \operatorname{const} \geq 0$$

Константа  $E_{\parallel}$  войдет в решение краевой задачи для функции  $\varphi$  в качестве параметра и определяется затем через величину внешней нагрузки из закона Ома для полной цепи. Из (1.1) заключаем, что функция  $\varphi(y, z)$  удовлетворяет следующему уравнению эллиптического типа:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + (1 + \beta^2) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + \frac{\partial \ln \sigma}{\partial y} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + (1 + \beta^2) \frac{\partial \ln \sigma}{\partial z} \frac{\partial \varphi}{\partial z} &= E_* \frac{\partial \ln \sigma}{\partial y} \\ E_* &= UB + \beta E_{\parallel} = \operatorname{const} \end{aligned} \quad (1.2)$$

Для уравнения (1.2) в области  $S$  необходимо решить задачу Дирихле с нулевым граничным условием на контуре

$$\varphi|_{\Gamma} = 0 \quad (1.3)$$

Легко видеть, что решение сформулированной задачи имеет вид

$$\varphi(y, z) = E_* \varphi_1(y, z)$$

причем функция  $\varphi_1(y, z)$  не содержит величину  $E_*$ . Если решение краевой задачи известно, то с его помощью можно рассчитать все интегральные характеристики генератора.

Рассмотрим связь интегральных характеристик с величинами, характеризующими распределения проводимости, поля и тока в поперечном сечении канала. Введем следующую величину:

$$\sigma_e = \langle j_y \rangle / E_*$$

Здесь и в дальнейшем угловые скобки означают осреднение функции по сечению  $S$ . В случае  $\sigma \equiv \operatorname{const}$  величина  $\sigma_e$  совпадает с эффективной проводимостью [4]. Используя выражение для  $\langle j_y \rangle$ , полученное при осреднении закона Ома (1.1), найдем

$$\sigma_e = (1 + \beta^2)^{-1} \langle \sigma(1 + f) \rangle \quad (f = E_y / E_* = -\partial \varphi_1 / \partial y) \quad (1.4)$$

Функция  $f(y, z)$  не содержит величину  $E_*$  в качестве параметра. В случае однородной проводимости будет  $f \equiv 0$ , так как краевая задача (1.2), (1.3) при  $\sigma = \operatorname{const}$  имеет только тривиальное решение. Из граничного условия (1.3) следует, что средняя по сечению электрическая мощность, развиваемая поперечным полем  $\mathbf{E}_{\perp} = E_y \mathbf{e}_y + E_z \mathbf{e}_z$  над токами, равна нулю

$$\langle \mathbf{j}_{\perp} \mathbf{E}_{\perp} \rangle = -S^{-1} \iint_S \mathbf{j}_{\perp} \nabla \varphi dS = -S^{-1} \iint_S \operatorname{div}(\varphi \mathbf{j}_{\perp}) dS = -S^{-1} \int_{\Gamma} \varphi \mathbf{n} \mathbf{j}_{\perp} d\Gamma = 0 \quad (1.5)$$

С другой стороны, вычисление величины  $\langle \mathbf{j}_\perp \mathbf{E}_\perp \rangle$  с использованием закона Ома приводит к выражению

$$\langle \mathbf{j}_\perp \mathbf{E}_\perp \rangle = (1 + \beta^2)^{-1} \{ \langle \sigma [E_y^2 + (1 + \beta^2) E_z^2] \rangle + \langle \sigma f \rangle E_*^2 \}$$

Из последней формулы и из (1.5) следует:  $\langle \sigma f \rangle \leq 0$ . Тогда на основании (1.4) придем к неравенству

$$\sigma_e \leq \langle \sigma \rangle / (1 + \beta^2) \quad (1.6)$$

Равенство в соотношении (1.6) выполняется только при  $\sigma \equiv \text{const}$ .

Используя снова закон Ома, вычислим среднюю плотность продольного тока  $j_x$

$$\langle j_x \rangle = \sigma_e \beta U B + (\beta^2 \sigma_e - \langle \sigma \rangle) E_\parallel$$

В режиме холостого хода будет  $\langle j_x \rangle = 0$  и величина  $E_\parallel$  достигает максимального (по сравнению с рабочими режимами генератора) значения  $E_m$ , где

$$E_m = \beta U B \sigma_e (\langle \sigma \rangle - \beta^2 \sigma_e)^{-1} \quad (1.7)$$

При подключении внешнего сопротивления  $R$  будет  $E_\parallel = k E_m$ . В режиме генерирования электроэнергии для коэффициента нагрузки  $k$  получим

$$0 < k = R / (R + r) < 1$$

Здесь  $r$  — эквивалентное внутреннее сопротивление генератора. Для снимаемой электрической мощности  $N$ , электрического к. п. д.  $\eta$ , джоулевой диссипации  $Q$  и величины  $r$  получим следующие формулы:

$$\begin{aligned} N &= 2LS \langle j_x \rangle E_\parallel = 2LSU^2 B^2 \alpha \beta^2 \sigma_e k (1 - k), \quad \alpha = E_m / \beta U B \\ \eta &= \alpha \beta^2 k (1 - k) / (\alpha \beta^2 k + 1), \quad Q = 2LSU^2 B^2 \sigma_e (\alpha \beta^2 k^2 + 1) \\ r &= 2LS^{-1} (\langle \sigma \rangle - \beta^2 \sigma_e)^{-1} \end{aligned} \quad (1.8)$$

Здесь  $\alpha \leq 1$  — коэффициент шунтирования холловской э. д. с. Максимум величины  $\eta$  по  $k$  достигается при следующем значении коэффициента нагрузки:

$$k = k_m = \alpha^{-1} \beta^{-2} [(1 + \alpha \beta^2)^{1/2} - 1]$$

и равен  $\eta_m = 1 - 2k_m$ .

Из формул (1.7), (1.8) и неравенства (1.5) следует, что при фиксированных значениях  $L$ ,  $S$ ,  $U$ ,  $B$ ,  $\beta$  и  $k$  величины  $N$ ,  $\eta$ ,  $Q$ ,  $E_m$  и  $r$  при неоднородном распределении проводимости уменьшаются по сравнению с их значениями при  $\sigma = \langle \sigma \rangle \equiv \text{const}$ .

Таким образом, для определения интегральных характеристик генератора необходимо знать величину  $\sigma_e$ , которая может быть рассчитана только по известному решению краевой задачи.

2. Перейдем в уравнении (1.2) к безразмерным переменным

$$y_* = \sqrt{1 + \beta^2} y / a, \quad z_* = z / a, \quad \varphi_* = \sqrt{1 + \beta^2} \varphi / E_* a \quad (2.1)$$

Здесь  $a$  — характерный поперечный размер канала. На деформированной плоскости  $y_* z_*$  функция  $\varphi_*$  описывается уравнением с изотропным дифференциальным оператором

$$\frac{\partial^2 \varphi_*}{\partial y_*^2} + \frac{\partial^2 \varphi_*}{\partial z_*^2} + \frac{\partial \ln \sigma}{\partial y_*} \frac{\partial \varphi_*}{\partial y_*} + \frac{\partial \ln \sigma}{\partial z_*} \frac{\partial \varphi_*}{\partial z_*} = \frac{\partial \ln \sigma}{\partial y_*} \quad (2.2)$$

Введем на плоскости  $y_* z_*$  полярные координаты

$$\rho = \sqrt{y_*^2 + z_*^2}, \quad \text{tg } \theta = y_* / z_* \quad (2.3)$$

Можно построить достаточно простое решение задачи Дирихле для уравнения (2.2), если при преобразовании (2.1) область  $S$  переходит в круг единичного радиуса, а электропроводность зависит только от  $\rho$ . В этом случае поперечное сечение МГД канала представляет собой эллипс, большая полуось которого  $a$  параллельна вектору  $\mathbf{B}$ , а малая полуось равна  $a / \sqrt{1 + \beta^2}$ . При этом линии  $\sigma = \text{const}$  образуют семейство эллипсов, подобных граничному контуру  $\Gamma$ .

С учетом принятых допущений уравнение (2.2) в переменных  $(\rho, \theta)$  примет вид

$$\frac{\partial^2 \Phi_*}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \left( 1 + \frac{d \ln \sigma}{d \ln \rho} \right) \frac{\partial \Phi_*}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \Phi_*}{\partial \theta^2} = \frac{1}{\rho} \frac{d \ln \sigma}{d \ln \rho} \sin \theta \quad (2.4)$$

Решение однородной задачи Дирихле для уравнения (2.4) будем искать в виде

$$\Phi_* = \Phi(\rho) \sin \theta \quad (0 \leq \rho \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi)$$

Для функции  $\Phi(\rho)$  придем к следующей граничной задаче:

$$\begin{aligned} \Phi'' + \rho^{-1} (1 + d \ln \sigma / d \ln \rho) \Phi' - \rho^2 \Phi &= \rho^{-1} d \ln \sigma / d \ln \rho \\ \Phi(0) = \Phi(1) &= 0 \end{aligned} \quad (2.5)$$

Нулевое граничное условие для  $\Phi$  при  $\rho = 0$  следует из требования непрерывности потенциала в начале координат. В случае произвольной зависимости  $\sigma(\rho)$  решение задачи (2.5) не может быть выражено через табулированные функции. Решение можно получить в конечном виде, если, например, аппроксимировать зависимость  $d \ln \sigma / d \ln \rho$  кусочно-постоянной функцией. Рассмотрим следующий модельный закон изменения проводимости:

$$\sigma = \sigma_0 = \text{const} \quad (0 \leq \rho < \rho_*), \quad \sigma = \sigma_0 (\rho_* / \rho)^\kappa \quad (\rho_* \leq \rho \leq 1) \quad (2.6)$$

Величина  $\rho_*$  определяет безразмерный радиус зоны однородной проводимости. При  $\kappa > 0$  зависимость (2.6) моделирует закон спада электропроводности в пограничном слое. В дальнейшем будем считать  $\kappa > 0$ , хотя определяемое ниже решение задачи может быть изучено и для отрицательных значений  $\kappa$ .

При использовании зависимости (2.6) получаем краевую задачу для уравнения с разрывными коэффициентами

$$\begin{aligned} \Phi'' + \rho^{-1} [1 - \kappa H(\rho - \rho_*)] \Phi' - \rho^2 \Phi &= -\kappa \rho^{-1} H(\rho - \rho_*) \\ \Phi(0) = \Phi(1) &= 0 \end{aligned} \quad (2.7)$$

Здесь  $H(\rho - \rho_*)$  — единичная функция Хэвисайда. Общее решение уравнения (2.7) содержит две произвольные постоянные в области  $0 < \rho < \rho_*$  и две — в области  $\rho_* < \rho < 1$ . При  $\rho = \rho_*$  выставляются условия непрерывности функций  $\Phi(\rho)$  и  $\Phi'(\rho)$ , вытекающие из физических условий непрерывности потенциала и нормальной компоненты тока на границе однородной зоны. Эти требования вместе с краевыми условиями определяют единственное непрерывно дифференцируемое решение задачи (2.7), имеющее вид

$$\begin{aligned} \Phi(\rho) &= [1 - G(\lambda_1 - \lambda_2) \rho_*^{-1}] \rho \quad (0 \leq \rho \leq \rho_*) \\ \Phi(\rho) &= \rho - G [(1 - \lambda_2) (\rho / \rho_*)^{\lambda_1} + (\lambda_1 - 1) (\rho / \rho_*)^{\lambda_2}] \quad (\rho_* \leq \rho \leq 1) \quad (2.8) \\ \lambda_{1,2} &= \frac{\kappa}{2} \pm \sqrt{1 + \frac{\kappa^2}{4}}, \quad G = [(\lambda_1 - 1) \rho_*^{-\lambda_2} + (1 - \lambda_2) \rho_*^{-\lambda_1}]^{-1} \end{aligned}$$

Вторая производная  $\Phi''$  разрывна при  $\rho = \rho_*$ , что соответствует разрыву плотности объемного заряда и связано с выбором негладкого при  $\rho = \rho_*$  распределения проводимости (2.6).

Для компонент векторов  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{j}$  получим формулы

$$\begin{aligned} E_x &= -E_{\parallel} = \text{const} \\ E_y &= -E_* (\rho^{-1} \Phi \cos^2 \theta + \Phi' \sin^2 \theta) \\ E_z &= (1 + \beta^2)^{-1/2} E_* (\rho^{-1} \Phi - \Phi') \sin \theta \cos \theta \\ j_x &= -E_{\parallel} \sigma(\rho) + (1 + \beta^2)^{-1} \beta E_* \sigma(\rho) (1 - \rho^{-1} \Phi \cos^2 \theta - \Phi' \sin^2 \theta) \\ j_y &= (1 + \beta^2)^{-1} E_* \sigma(\rho) (1 - \rho^{-1} \Phi \cos^2 \theta - \Phi' \sin^2 \theta) \\ j_z &= (1 + \beta^2)^{-1/2} E_* \sigma(\rho) (\rho^{-1} \Phi - \Phi') \sin \theta \cos \theta \end{aligned} \quad (2.9)$$

Отметим, что выражения (2.9) останутся справедливыми в случае произвольной зависимости  $\sigma(\rho)$ . При этом функция  $\Phi(\rho)$  должна быть решением задачи (2.5), соответствующим выбранной зависимости  $\sigma(\rho)$ .

3. Перейдем к анализу полученного решения. Функция  $\Phi(\rho)$  имеет единственный экстремум в точке  $\rho = \rho_0$ , которая определяется из решения трансцендентного уравнения

$$(\lambda_1 - 1) \rho_*^{1-\lambda_2} + (1 - \lambda_2) \rho_*^{1-\lambda_1} = (\lambda_1 + 1) \xi^{\lambda_1-1} - (\lambda_2 + 1) \xi^{\lambda_2-1} \\ (\xi = \rho_0 / \rho_*)$$

На интервале  $0 < \rho < \rho_*$  функция  $\Phi(\rho)$  линейна, поэтому всегда  $\rho_0 > \rho_*$ , т. е. точки экстремума потенциала  $\Phi_*(\rho, \theta)$  лежат в области пограничного слоя. Аналогичный результат был получен в численных расчетах [2, 3]. Непосредственное вычисление показывает, что  $\partial \xi / \partial \rho_* < 0$ , поэтому при уменьшении толщины пограничного слоя экстремумы сдвигаются к границе однородной зоны  $\rho = \rho_*$ . При фиксированном значении  $\rho_*$  величина  $\rho_0$  возрастает с увеличением параметра  $\kappa > 0$ .

Нетрудно убедиться, что в ядре производная  $\Phi'(\rho)$  положительна. Следовательно, значение  $\rho = \rho_0$  является точкой максимума функции  $\Phi(\rho)$ . Поэтому при  $\rho = \rho_0$ ,  $\theta = 1/2\pi$  достигается максимум, а при  $\rho = \rho_0$ ,  $\theta = 3/2\pi$  — минимум безразмерного потенциала  $\Phi_* = \Phi(\rho) \sin \theta$ .

Увеличение толщины пограничного слоя приводит к возрастанию функции  $\Phi(\rho)$ . При неизменном радиусе однородной зоны  $\rho_*$  для больших значений  $\kappa$  приходим к асимптотическим формулам

$$\begin{aligned} \Phi &\approx \left(1 - \frac{\kappa \rho_*^{-1}}{\kappa - 1 + \rho_*^{-\kappa}}\right) \rho \quad (0 \leq \rho \leq \rho_*) \\ \Phi &\approx \rho - \frac{\kappa - 1 + (\rho / \rho_*)^{\kappa}}{\kappa - 1 + \rho_*^{-\kappa}} \quad (\rho_* \leq \rho \leq 1) \end{aligned} \quad (3.1)$$

Из выражений (3.1) следует, что предельное при  $\kappa \rightarrow \infty$  распределение  $\Phi(\rho)$  разрывно

$$\lim_{\kappa \rightarrow \infty} \Phi(\rho) = \rho \quad (0 \leq \rho < 1), \quad \lim_{\kappa \rightarrow \infty} \Phi(1) = 0$$

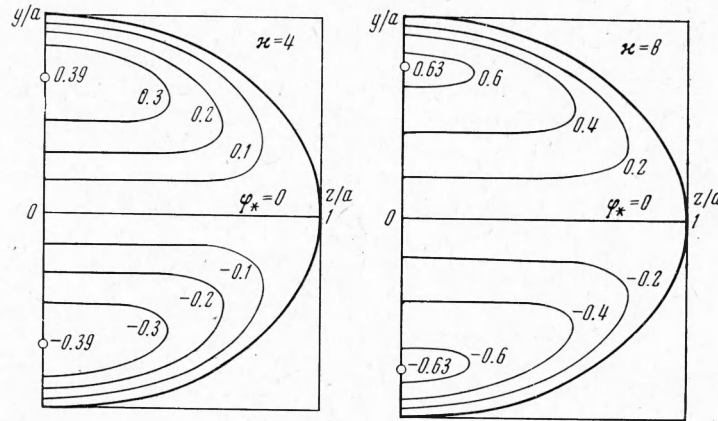
Такое поведение  $\Phi(\rho)$  обусловлено стремлением к нулю величины  $\sigma$  в пограничном слое при  $\kappa \rightarrow \infty$ . В результате в любой отдаленной от стенки области  $\rho < 1 - \varepsilon$  плотность тока стремится к нулю, а вектор  $\mathbf{E}$  стремится к индуцированному полю  $\mathbf{E}_i = -\mathbf{V} \times \mathbf{B}$ , потенциал которого на стенке отличен от нуля.

Линии уровня безразмерного потенциала  $\Phi_*$  в первом и четвертом квадрантах безразмерной физической плоскости  $y/a$ ,  $z/a$  при значениях параметров  $\beta = 1$ ,  $\rho_* = 0.5$ ;  $\kappa = 4$  и 8 изображены на фиг. 1.

Компонента электрического поля  $E_y$  знакопеременна, причем в однородной зоне  $E_y < 0$ . Уравнение линии  $l$ , на которой  $E_y$  обращается в нуль, в координатах  $(\rho, \theta)$  имеет вид

$$\operatorname{ctg}^2 \theta_l = -\rho \Phi' / \Phi \quad (3.2)$$

Последнее уравнение имеет вещественное решение  $\theta_l(\rho)$  в области  $\rho_0 \leq \rho \leq 1$ , где  $\rho_0$  — точка максимума  $\Phi(\rho)$ . На деформированной плоскости  $y_* z_*$  линия  $l$  представляет собой симметричную относительно координатных осей замкнутую кривую, касающуюся при  $\theta = 0$  и  $\pi$  окружности  $\rho = 1$ , а при  $\theta = 1/2\pi$  и  $3/2\pi$  — окружности  $\rho = \rho_0$ . Максимум величины  $E_y$  по координатам достигается на граничном контуре в точках  $(\rho = 1, \theta = 1/2\pi)$  и  $(\rho = 1, \theta = 3/2\pi)$ .



Фиг. 1

Компонента поля  $E_z$  в однородной зоне равна нулю. В пограничном слое величина  $E_z$  положительна в первом и третьем квадрантах, отрицательна во втором и четвертом. Максимальное и минимальное значения  $E_z$  достигаются на границе  $\rho = 1$  на лучах  $\theta = 1/4\pi, 5/4\pi$  и  $3/4\pi, 7/4\pi$  соответственно.

Составляющая плотности тока  $j_y$  всюду положительна и лежит в следующих пределах:

$$j_1(\rho) \leq j_y(\rho, \theta) \leq j_2(\rho) \quad (3.3)$$

$$j_1(\rho) = (1 + \beta^2)^{-1} E_* \sigma (1 - \rho^{-1} \Phi), \quad j_2(\rho) = (1 + \beta^2)^{-1} E_* \sigma (1 - \Phi')$$

Величина  $j_y$  постоянна в ядре и убывает с увеличением  $\rho$  в пограничном слое. В точках контура  $\Gamma$  максимум  $j_y$  достигается при  $\theta = 1/2\pi, 3/2\pi$  и равен  $j_2(1)$ . В этих точках максимальна тормозящая лоренцева сила, и они наиболее опасны при возможном отрыве вязкого пограничного слоя [5]. С ростом параметра  $\kappa$  или уменьшением  $\rho_*$  компонента  $j_y$  уменьшается.

Качественные особенности поведения компоненты тока  $j_z$  зависят от значений  $\kappa$ . В ядре  $j_z \equiv 0$ , а в пограничном слое  $|j_z|$  монотонно возрастает с увеличением  $\rho$  при  $0 < \kappa \leq \kappa_0$ . При  $\kappa > \kappa_0$  возникает максимум  $|j_z|$  по  $\rho$  при  $\rho = \rho_+$ . Значение  $\kappa_0$  является корнем трансцендентного уравнения

$$\left[ \frac{1 + \lambda_1(\kappa_0)}{1 + \lambda_2(\kappa_0)} \right]^{1/[\lambda_1(\kappa_0) - \lambda_2(\kappa_0)]} = \rho_*^{-1}$$

Для величины  $\rho_+$  имеет место формула

$$\rho_+ = \rho_* [(1 + \lambda_1) / (1 + \lambda_2)]^{1/(\lambda_1 - \lambda_2)}$$

Максимум  $j_z$  в первом квадранте области  $S$  достигается на границе в точке  $(\rho = 1, \theta = 1/4\pi)$ , если  $0 < \kappa < \kappa_0$ , и внутри области в точке  $(\rho = \rho_+, \theta = 1/4\pi)$ , если  $\kappa > \kappa_0$ . При  $\kappa \rightarrow \infty$  абсолютный максимум  $j_z$  сдвигается к границе однородной зоны.

Вычисление величины  $\sigma_e$ , соответствующей полученному решению, приводит к следующей формуле:

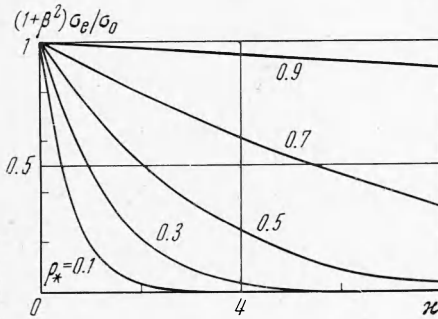
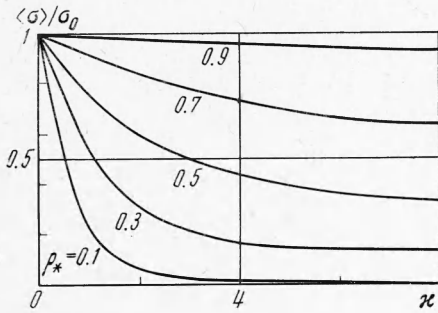
$$\sigma_e = \frac{\sigma_0}{1 + \beta^2} \frac{(\lambda_1 + 1) \rho_*^{\lambda_2} - (\lambda_2 + 1) \rho_*^{\lambda_1}}{(\lambda_1 - 1) \rho_*^{-\lambda_2} + (1 - \lambda_2) \rho_*^{-\lambda_1}} \quad (3.4)$$

Для среднеинтегральной проводимости, отвечающей распределению (2.6), получим

$$\langle \sigma \rangle = \sigma_0 \left[ \rho_*^2 + \frac{2}{2-\kappa} (\rho_*^\kappa - \rho_*^2) \right] \quad (\kappa \neq 2) \quad (3.5)$$

$$\langle \sigma \rangle = \sigma_0 \rho_*^2 (1 - 2 \ln \rho_*) \quad (\kappa = 2)$$

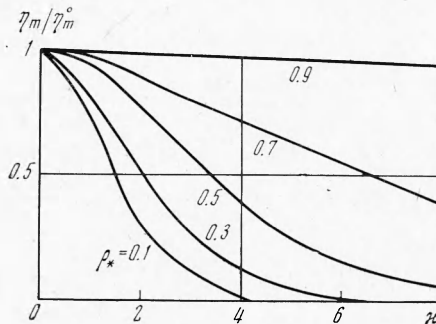
При  $\kappa \rightarrow \infty$  величина  $\sigma_e$  стремится к нулю, а величина  $\langle \sigma \rangle$  — к конечному пределу  $\sigma_0 \rho_*^2$ . На фиг. 2 представлены зависимости  $\langle \sigma \rangle / \sigma_0$  и  $(1 + \beta^2) \sigma_e / \sigma_0$  от показателя степени  $\kappa$  в законе спада проводимости (2.6).



Фиг. 2

Параметром указанных семейств кривых служит безразмерный радиус однородной зоны  $\rho_*$ .

Замена величины  $\sigma_e$  величиной  $\langle \sigma \rangle / (1 + \beta^2)$  при расчете интегральных характеристик генератора приводит к значительным ошибкам при достаточно больших значениях  $\kappa$  или достаточно малых  $\rho_*$ . На фиг. 3 приведены зависимости отношения  $\eta_m / \eta_m^0$  от показателя  $\kappa$  при



Фиг. 3

$\beta = 2$ . Здесь  $\eta_m$  — максимально возможный электрический к. п. д. генератора, рассчитанный по двумерной теории,  $\eta_m^0$  — максимальный к. п. д., рассчитанный в предположении  $\sigma \equiv \langle \sigma \rangle = \text{const}$ . Параметр семейства кривых — величина  $\rho_*$ .

Рассмотрим теперь кратко распределение той части локальной электрической мощности, которая обусловлена составляющей вектора  $\mathbf{E}$  в плоскости поперечного сечения канала. Для величины  $n = \mathbf{j}_\perp \mathbf{E}_\perp$  получим выражение

$$n(\rho, \theta) = (1 + \beta^2)^{-1} E_*^2 \sigma(\rho) [\rho^{-1} \Phi (\rho^{-1} \Phi - 1) \cos^2 \theta + \Phi' (\Phi' - 1) \sin^2 \theta] \quad (3.6)$$

Функция  $n(\rho, \theta)$  знакопеременна, так как она не дает вклада в интегральную мощность (см. формулу (1.5)). Условие  $n = 0$  определяет линию  $\gamma$ , вдоль которой координаты  $\rho$  и  $\theta$  связаны соотношением

$$\text{ctg}^2 \theta_\gamma = - \Phi' (\Phi' - 1) / [\rho^{-1} \Phi (\rho^{-1} \Phi - 1)] \quad (3.7)$$

Вещественное решение  $\theta_\gamma(\rho)$  уравнения (3.7) существует в области  $\rho_0 \leq \rho \leq 1$ . Линия  $\gamma$  — симметричная относительно координатных осей замкнутая кривая, касающаяся окружности  $\rho = 1$  при  $\theta = 0, \pi$  и окруж-

ности  $\rho = \rho_0$  при  $\theta = 1/2 \pi, 3/2 \pi$ . По сравнению с линией  $l$ , на которой  $E_y = 0$ , кривая  $\gamma$  расположена ближе к однородной зоне: на  $l$  величина  $n = \sigma E_z^2 \geq 0$ .

Ввиду того что поперечный ток  $j_{\perp}$  замыкается через электродную стенку, область положительных значений  $n$  выполняет функцию нагрузки в цепи поперечного тока. При этом центральная область, ограниченная контуром  $\gamma$ , играет роль источника тока в указанной цепи.

Не представляет принципиальных трудностей обобщение данного выше решения на случай генератора с рамочным каналом, когда поперечное сечение имеет прежнюю эллиптическую форму, а замкнутые электродные рамки наклонены к оси канала под постоянным углом  $\delta$ . Для этого случая решение также строится методом разделения переменных, причем для функции  $\Phi(\rho)$  уравнение (2.5) должно решаться с граничными условиями:

$$\Phi(0) = 0, \Phi(1) = - (E_{\parallel} / E_*) \operatorname{ctg} \delta$$

Приведенное решение можно использовать для уточнения гидравлической модели, описывающей квазиодномерные течения в профилированных холловских каналах с соответствующей геометрией поперечного сечения. Модели такого типа обычно используются в инженерных расчетах МГД устройств [5].

Поступила 6 VI 1972

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Rosa R. J. Hall and ion-slip effects in a nonuniform gas. Phys. Fluids, 1962, vol. 5, No. 9, pp. 1081—1090.
2. Wu Y. C. L., Martin J. F. Current distribution of a segmented Hall generator. Proc. 11-th Sympos. on Engng Aspects Magnetohydrodynamics, California, Pasadena, 1970, p. 128.
3. Eustis R. H., Cima R. M., Berry K. E. Current distribution in conducting wall MHD generators. Proc. 11-th Sympos. on Engng Aspects Magnetohydrodynamics, California, Pasadena, 1970, pp. 119—127.
4. Роза Р. Магнитогиродинамическое преобразование энергии. М., «Мир», 1970.
5. Ватажин А. Б., Любимов Г. А., Регирер С. А. Магнитогиродинамические течения в каналах. М., «Наука», 1970.