

ОСЕСИММЕТРИЧНАЯ ЗАДАЧА УСТАНОВИВШЕЙСЯ ПОЛЗУЧЕСТИ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ

И. В. Стасенко

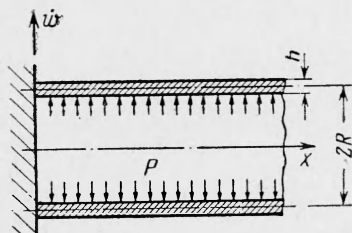
(Москва)

Рассматривается распределение напряжений и развитие деформаций в зоне жесткого заземления тонкостенной трубы, нагруженной внутренним давлением.

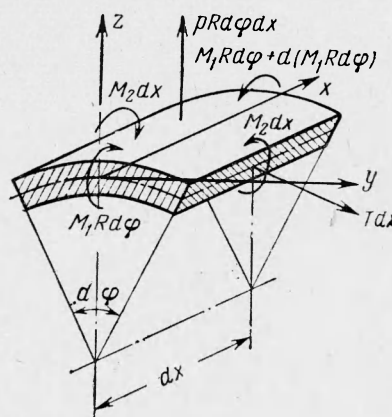
Расчет ведется на основе гипотезы течения с применением вариационного принципа минимума полной мощности системы [1]. Полученные результаты сопоставляются с известными решениями [2, 3, 4].

1. Наличие различного рода переходов и фланцевых соединений, являющихся естественными концентраторами напряжений, делает практически невозможным расчет паропроводов на длительную прочность без учета, возникающего уже при работе в пределах упругости, краевого эффекта. Несмотря на то, что в процессе ползучести величина коэффициента концентрации значительно уменьшается, учет его в расчетах представляется целесообразным.

Первая попытка исследования краевого эффекта, возникающего в процессе ползучести тонкостенной трубы в зоне ее жесткого заземления, была сделана, по-видимому, в 1951 г. В. И. Розенблюмом [2].



Фиг. 1



Фиг. 2

Используя вариационный принцип минимума полной мощности системы [1] и представляя приближенное решение задачи о скорости радиального перемещения в виде произведения функции упругого решения [5] на неизвестный коэффициент, автор получил очевидный результат: искомый коэффициент равен скорости окружной деформации в сечении, достаточно удаленном от заземления. Полученный тривиальный результат объясняется слишком жестким заданием искомой функции.

Беньик и Фреденталь [3] пошли несколько иным путем. А именно, взяв в качестве приближенного решения также решение задачи в пределах упругости, они приняли за искомый параметр осевой масштаб функции скорости радиальной деформации. Решение ведется также с применением вариационных методов, но в основу расчета положен принцип независимости действия сил. Последнее вряд ли может быть оправдано получающимися упрощениями в расчете, так как задача все же не решается функционально. Определение искомого параметра для каждого значения показателя ползучести должно проводиться численным решением достаточно сложного интегрального уравнения.

Гемма [4] на основании довольно нестрогих допущений и преобразований приходит также к принципу независимости действия сил.

В этом случае решение задачи об установившейся ползучести цилиндрической оболочки в зоне краевого эффекта сводится к одному нелинейному дифференциальному уравнению, которое и решается для частного случая $m \gg 1$ (m — показатель ползучести). Автор получает, что в этом случае кривизна изогнутой поверхности оболочки знакопостоянна, а это противоречит физическому смыслу задачи.

Кроме того, следует иметь в виду, что с увеличением показателя ползучести коэффициент ползучести (гипотеза течения в степенной формулировке) резко уменьшается и в пределе (при $m \rightarrow \infty$) ползучесть отсутствует.

Таким образом, рассмотренный случай не представляет практического интереса.

2. Рассмотрим установившуюся ползучесть тонкостенной цилиндрической оболочки, находящейся под действием внутреннего давления (фиг. 1). Схема действия внутренних сил показана на фиг. 2. При отсутствии осевой силы

$$\xi_1 = -0.5 \xi_2 \quad (2.1)$$

Здесь ξ_1 — скорость осевой деформации срединной поверхности, ξ_2 — скорость окружной деформации срединной поверхности.

Условие несжимаемости принимаем в виде

$$\xi_x + \xi_y + \xi_z = 0 \quad (2.2)$$

Учитывая

$$\xi_x = \xi_1 - zR \frac{d^2 \xi_2}{dx^2}, \quad \xi_y = \xi_2 = \frac{\dot{w}}{R} \quad (2.3)$$

вычисляем интенсивность скоростей деформаций сдвига

$$H = \sqrt{\frac{2}{3}} \sqrt{(\xi_x - \xi_y)^2 + (\xi_y - \xi_z)^2 + (\xi_z - \xi_x)^2} = \sqrt{3\xi_2^2 + \left(2zR \frac{d^2 \xi_2}{dx^2}\right)^2} \quad (2.4)$$

Функцию скорости окружной деформации представим в виде

$$\xi_2 = \varphi(x) \xi_2^* \quad (\xi_2^* = B_1 (\sigma_2^*)^m) \quad (2.5)$$

где ξ_2^* — скорость окружной деформации в сечении, достаточно удаленном от зоны краевого эффекта. Вводя безразмерную координату волокна $\zeta = 2z/h$ из (2.4), получим

$$H = \xi_2^* \sqrt{3} \left[\varphi^2 + \frac{3}{4k^4} (\varphi'' \zeta)^2 \right]^{1/2} \quad \left(k^4 = \frac{9}{4R^2 h^2} \right) \quad (2.6)$$

Вычислим мощность внешних сил

$$L = \int_S p v ds = 2\pi R h \sigma_2^* \int_0^l \xi_2^* \varphi dx \quad (2.7)$$

В соответствии с принципом минимума полной мощности системы [1]

$$\delta(L^* - L) = 0 \quad (L^* - \text{рассеяние мощности}) \quad (2.8)$$

В случае степенной зависимости между напряжением и скоростью пластической деформации (2.5)

$$L^* = \frac{(3^{(m+1)/2} B_1)^{-\mu}}{1 + \mu} \int_V H^{1+\mu} dV \quad \left(\mu = \frac{1}{m} \right) \quad (2.9)$$

Подставляя (2.7) и (2.9) в (2.8) и учитывая (2.6), получим вариационное уравнение задачи

$$\delta \left\{ \int_0^1 d\zeta \int_0^l \left[\varphi^2 + \frac{3}{4k^4} (\varphi'' \zeta)^2 \right]^{(1+\mu)/2} dx - (1 + \mu) \int_0^l \varphi dx \right\} = 0 \quad (2.10)$$

Искомую функцию скорости окружной деформации примем в виде

$$\varphi = 1 - e^{-\alpha x} (\cos \alpha x + \sin \alpha x) \quad (2.11)$$

где α — искомый параметр. Подставляя (2.11) в (2.10) и обозначая

$$\psi = 1 - e^{-s} (\cos s + \sin s) \quad (2.12)$$

получим

$$\delta \left\{ \frac{1}{\alpha} \int_0^1 d\zeta \int_0^{\alpha l} \left[\psi^2 + \frac{3\alpha^4}{4k^4} (\psi'' \zeta)^2 \right]^{(1+\mu)/2} ds - \frac{1+\mu}{\alpha} \int_0^{\alpha l} \psi ds \right\} = 0 \quad (2.13)$$

Участок интегрирования $(0, \alpha l)$ разобьем на зону краевого эффекта $(0, \lambda)$ и на зону $(\lambda, \alpha l)$, в которой влиянием краевого эффекта можно пренебречь. В таком случае

$$\int_0^1 d\zeta \int_{\lambda}^{\alpha l} \left[\psi^2 + \frac{3\alpha^4}{4k^4} (\psi'' \zeta)^2 \right]^{(1+\mu)/2} ds \approx \alpha l - \lambda, \quad \int_{\lambda}^{\alpha l} \psi ds \approx \alpha l - \lambda$$

С учетом последнего уравнение (2.13) принимает вид

$$\delta \left\{ \frac{1}{\alpha} \int_0^1 d\zeta \int_0^{\lambda} \left[\psi^2 + \frac{3\alpha^4}{4k^4} (\psi'' \zeta)^2 \right]^{(1+\mu)/2} ds - \frac{1+\mu}{\alpha} \int_0^{\lambda} \psi ds - \mu \left(l - \frac{\lambda}{\alpha} \right) \right\} = 0 \quad (2.14)$$

Варьируя уравнение (2.14) по α и группируя члены, получим

$$\int_0^1 d\xi \int_0^\lambda \frac{(1+2\mu)0.75(\alpha/k)^4(\psi''\xi)^2 - \psi^2}{[\psi^2 + 0.75(\alpha/k)^4(\psi''\xi)^2]^{(1-\mu)/2}} ds = 1 + \mu - \lambda \quad (2.15)$$

3. Решение уравнения (2.15) представлено в виде графика на фиг. 3. Там же приведены решение [2] (пунктирная прямая) и решение [3] (пунктирная кривая).

Анализ решения показывает, что принятие $\alpha/k = 1$ ведет к завышению коэффициента концентрации, а принцип независимости действия сил, напротив, к его занижению.

С этой точки зрения решение [3] можно считать более рациональным, нежели [2].

Уравнения напряжений могут быть получены из зависимостей [1]

$$\sigma_x = \frac{2H^{\mu-1}}{(3^{(m+1)/2}B_1)^\mu} (2\xi_x + \xi_y) \quad (x, y) \quad (3.1)$$

С учетом (2.5) и (2.6) найдем

$$\begin{aligned} \sigma_x &= -\sigma_y \frac{\alpha^2}{k^2} \left[\psi^2 + \frac{3\alpha^4}{4k^4} (\psi''\xi)^2 \right]^{(\mu-1)/2} \psi''\xi \\ \sigma_y &= \sigma_y \left[\psi^2 + \frac{3\alpha^4}{4k^4} (\psi''\xi)^2 \right]^{(\mu-1)/2} \left(\psi - \frac{\alpha^2}{2k^2} \psi''\xi \right) \end{aligned} \quad (3.2)$$

Найдем относительное изменение напряжений

$$\eta_x = \frac{\sigma_x(\tau \rightarrow \infty)}{\sigma_x(0)_{\max}} \quad (x, y) \quad (3.3)$$

Случай $\tau = 0$ эквивалентен случаю $\mu = 1$ (линейная ползучесть). При этом $\alpha \equiv k$. С учетом последнего получим

$$\begin{aligned} \eta_x &= \frac{1}{2} \frac{\alpha^2}{k^2} \left[\psi^2 + \frac{3\alpha^4}{4k^4} (\psi''\xi)^2 \right]^{(\mu-1)/2} \psi''\xi \\ \eta_y &= - \left[\psi^2 + \frac{3\alpha^4}{4k^4} (\psi''\xi)^2 \right]^{(\mu-1)/2} \left[\psi - \frac{1}{2} \frac{\alpha^2}{k^2} \psi''\xi \right] \end{aligned} \quad (3.4)$$

Для наиболее напряженного сечения ($x = 0$) найдем

$$\eta_x = \eta_y = 3^{(\mu-1)/2} \left(\frac{\alpha}{k} \right)^{2\mu} \xi^\mu \quad (3.5)$$

Из последней формулы, как частный случай, вытекают решения [2] (когда $\alpha = k$) и [3]. Но в последнем случае отношение α/k имеет другую величину (фиг. 3). Для произвольного же сечения из работы [3] можно получить

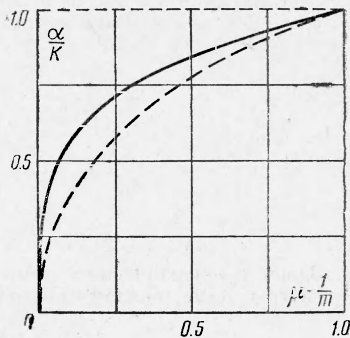
$$\eta_x = \frac{1}{2} \left(\frac{3}{4} \right)^{(\mu-1)/2} \left(\frac{\alpha}{k} \right)^{2\mu} (\psi''\xi)^\mu \quad (3.6)$$

что существенно отличается от (3.4).

Поступила 28 VI 1962

ЛИТЕРАТУРА

1. Качанов Л. М. Теория ползучести. Физматгиз, 1960.
2. Розенблюм В. И., Расчеты некоторых деталей турбин в условиях ползучести. Котлотурбостроение, 1951, № 4.
3. Bieniek M. P., Freudenthal A. M. Creep deformation and stresses cylindrical shells. J. of the Aerospace sciences, 1960, No. 10.
4. Gemma Anthony. The creep deformation of symmetrically loaded cylindrical shells. J. of the Aerospace sciences, 1960, No. 12.
5. Пономарев С. Д., Бидерман В. Л., Лихарев К. К., Макушин В. М., Малинин Н. Н., Феодосьев В. И. Расчеты на прочность в машиностроении. Машгиз, т. II, 1958.



Фиг. 3