

СТРУКТУРА ВЯЗКОГО ИЗОЭЛЕКТРОННОТЕРМИЧЕСКОГО СКАЧКА В ПЛАЗМЕ

В. С. Ижиеник

(Москва)

Структура плоской стационарной ударной волны в плотной высокотемпературной плазме имеет ряд своеобразных особенностей. В основном эти особенности описаны и исследованы в работах [1-4] (см. также обзор [5]). Как там показано, структура ударной волны в плазме при достаточно больших значениях числа Маха имеет разрывное строение: внутри нее образуется скачок ионной температуры, плотности и скорости плазмы с постоянной электронной температурой. Роль излучения в этом случае сводится к некоторому влиянию на условия возникновения скачка, если, конечно, длина пробега фотонов существенно больше длины пробега частиц. Этот скачок естественно называть вязким изоэлектроннотермическим скачком.

Основным механизмом сжатия и нагрева ионной компоненты плазмы в этом скачке является вязкость плазмы, которая практически обусловлена соударениями ионов между собой. В данной работе рассматривается структура скачка с учетом указанного основного фактора — ионной вязкости плазмы. Таким путем можно получить много аналитических результатов и дать анализ задачи в общем виде. Физически обоснованно пренебрегать другим диссипативным процессом в ионной компоненте плазмы — ионной теплопроводностью. Теплопроводность (число Прандтля $Pr \approx 2.75^{-1}$) лишь несколько дополнительно уширяет размазанную вязкостью область скачка, но качественно не изменяет характерной картины. Этот вопрос в общем случае идеального газа рассмотрен в книге [6], где отмечено, что благодаря теплопроводности энтропия газа внутри области скачка имеет немонотонный ход, достигая максимума в промежуточной точке. В настоящей задаче суммарная энтропия, представляющая сумму энтропий ионов и электронов, имеет максимум внутри скачка даже без учета ионной теплопроводности, так как энтропия электронов, очевидно, уменьшается в скачке.

Принимая во внимание малую толщину области вязкого скачка (порядка длины пробега частиц l_i) по сравнению с характерным масштабом структуры ударной волны в плазме (порядка $(M/m_e)^{1/2} l_i$, где M и m_e — массы иона и электрона соответственно [3]), в рассматриваемой задаче можно также пренебречь изменением электронной температуры и обменом энергией между ионами и электронами путем соударений. Таким образом, задача о структуре вязкого изоэлектроннотермического скачка сводится к нахождению стационарного решения системы трех нелинейных дифференциальных уравнений, определяющих скорость, плотность и ионную температуру плазмы. Заметим сразу, что эта задача существенно отличается от более простой задачи о вязком скачке в идеальном газе [7], потому что в градиент давления электронная компонента плазмы дает значительный вклад из-за изменения плотности.

В наших работах [8-10], посвященных теории пинч-эффекта в плазме и использующих численные методы решения нестационарной системы уравнений, в сущности уже определялась тонкая структура ударной волны даже без указанных выше приближений. Однако для выяснения ряда физических вопросов, например, электростатической поляризации плазмы в ударной волне, полезно иметь хорошо обозримые результаты упрощенного стационарного решения. В [10] без вывода и анализа приведены некоторые из формул, полученных ниже, которые использовались при расчетах пинч-эффекта. По поводу применимости используемого приближения Навье — Стокса к проблеме структуры ударной волны, с точки зрения более последовательного кинетического описания, здесь каких-либо новых аргументов не приводится (см., например, [9,10], где эти вопросы в некоторой степени затрагиваются).

1. Интегрирование уравнений структуры вязкого изоэлектроннотермического скачка. Запишем уравнение движения плазмы и уравнение нагрева ионной компоненты плазмы в стационарном плоском случае, учитывая из диссипативных процессов одну лишь ионную вязкость [3,8]

и принимая $\gamma = 5/3$:

$$\rho v \frac{dv}{dx} = - \frac{dp}{dx} + \frac{4}{3} \frac{d}{dx} \left(\mu \frac{dv}{dx} \right) \quad (1.1)$$

$$\frac{3}{2} \frac{k}{M} \rho v \frac{dT}{dx} - \frac{k}{M} T v \frac{d\rho}{dx} = \frac{4}{3} \mu \left(\frac{dv}{dx} \right)^2 \quad (1.2)$$

Здесь ρ — плотность плазмы, v — скорость плазмы, T — ионная температура, k — постоянная Больцмана, μ — нелинейный коэффициент вязкости ионной компоненты плазмы. В дальнейшем будем рассматривать только случай полностью ионизованной плазмы. Тогда, согласно кинетической теории [11],

$$\mu = B (kT)^{5/2} = 0,81 M^{1/2} e^{-4} Z^{-4} L^{-1} (kT)^{5/2} \quad (1.3)$$

где e — заряд электрона, Ze — заряд ионов плазмы и L — кулоновский логарифм. Давление плазмы p , включающее давление электронной компоненты при заданной постоянной электронной температуре θ_0

$$p = kM^{-1} \rho (T + Z\theta_0) \quad (1.4)$$

Согласно уравнению непрерывности

$$\rho v = \rho_0 v_0 = m_i \quad (1.5)$$

причем ρ_0 — начальная плотность перед скачком, v_0 — скорость ударной волны. Для системы уравнений (1.1) — (1.5) требуется найти решение, ограниченное на бесконечности.

Уравнение (1.1) с учетом (1.5) имеет, как известно, первый интеграл

$$p + mv = p_0 + mv_0 + \frac{4}{3} \mu \frac{dv}{dx} \quad (1.6)$$

Обозначим $kM^{-1} Z\theta_0 = C$, выразим $kM^{-1} T$ через p/ρ и подставим в уравнение (1.2), исключив ρ при помощи (1.5)

$$\frac{3}{2} v \frac{dp}{dx} + \left(\frac{5}{2} p - \frac{Cm}{v} \right) \frac{dv}{dx} = \frac{4}{3} \mu \left(\frac{dv}{dx} \right)^2 \quad (1.7)$$

Подставляя в (1.7) выражение p из (1.6) и dp/dx из (1.1), получим уравнение для одной неизвестной функции $v = v(x)$

$$\frac{5}{2} (p_0 + mv_0) \frac{dv}{dx} - 4mv \frac{dv}{dx} - \frac{Cm}{v} \frac{dv}{dx} + 2 \frac{d}{dx} \left(\mu v \frac{dv}{dx} \right) = 0 \quad (1.8)$$

Уравнение (1.8) интегрируется и дает второй интеграл задачи

$$\frac{5}{2} (p_0 + mv_0) (v - v_0) - 2m (v^2 - v_0^2) - Cm \ln v/v_0 + 2 \mu v \frac{dv}{dx} = 0 \quad (1.9)$$

Если из (1.9) выразить $\mu \frac{dv}{dx}$ и подставить в (1.6), то давление p в любой точке будет определено через скорость v в этой точке

$$p = -mv + \frac{1}{3} (p_0 + mv_0) \left(5 \frac{v_0}{v} - 2 \right) + \frac{4}{3} \frac{m}{v} (v^2 - v_0^2) + \frac{2}{3} \frac{Cm}{v} \ln \frac{v}{v_0} \quad (1.10)$$

Формуле (1.10) можно придать иной вид, если давление перед скачком p_0 выразить через скорость позади скачка v_1 . Из (1.9) имеем при условии $dv/dx = 0$

$$p_0 + mv_0 = \frac{4}{5} m (v_1 + v_0) + \frac{2}{5} \frac{Cm}{v_1 - v_0} \ln \frac{v_1}{v_0} \quad (1.11)$$

Тогда формула (1.10) при помощи (1.11) можно преобразовать к виду

$$p = -mv + \frac{4}{3} \frac{m}{v} (v_1 + v_0) \left(v_0 - \frac{2}{5} v \right) + \frac{4}{3} \frac{m}{v} (v^2 - v_0^2) + \frac{2}{3} \frac{m}{v} \left(v_0 - \frac{2}{5} v \right) \frac{C}{v_1 - v_0} \ln \frac{v_1}{v_0} + \frac{2}{3} \frac{Cm}{v} \ln \frac{v}{v_0} \quad (1.12)$$

Давление p_1 позади скачка определяется из (1.12), если положить $v = v_1$

$$p_1 = -mv_1 + \frac{4}{5} m (v_1 + v_0) + \frac{2}{5} \frac{Cm}{v_1 - v_0} \ln \frac{v_1}{v_0} \quad (1.13)$$

Сравнивая (1.11) и (1.13), убеждаемся, как и должно быть, в выполнении условия Гюгонио — сохранении потока импульса через скачок.

Для дальнейшего введем безразмерные величины

$$\pi = \frac{p}{mv_0}, \quad t = \frac{k}{M} T \frac{1}{v_0^2}, \quad \varphi = \frac{C}{v_0^2} = \frac{k}{M} \frac{Z\theta_0}{v_0^2}, \quad u = \frac{v}{v_0}$$

Безразмерное давление, согласно (1.12), будет равно (1.14)

$$\pi = -u + \frac{4}{3} \frac{(1+u_1)(1-2/5 u)}{u} + \frac{4}{3} \frac{u^2-1}{u} + \frac{2\varphi}{3} \frac{1-2/5 u}{u_1-1} \ln u_1 + \frac{2}{3} \frac{\varphi}{u} \ln u$$

Аналогично из (1.11) и (1.13) имеем

$$\begin{aligned} \pi_0 &= -1 + \frac{4}{5} (1+u_1) + \frac{2}{5} \frac{\varphi}{u_1-1} \ln u_1, \\ \pi_1 &= -u_1 + \frac{4}{5} (1+u_1) + \frac{2}{5} \frac{\varphi}{u_1-1} \ln u_1 \end{aligned} \quad (1.15)$$

Используя (1.14), (1.15), получим для безразмерной ионной температуры $t = \pi u - \varphi$, согласно (1.4), (1.16)

$$t = \frac{1}{3} \left[u^2 + 4u_1 - \frac{8}{5} u (1+u_1) \right] + \varphi \left[-1 + \frac{2}{3} \ln u + \frac{2}{3} \frac{\ln u_1}{u_1-1} \left(1 - \frac{2}{5} u \right) \right]$$

$$t_0 = \frac{1}{5} (4u_1 - 1) + \varphi \left(-1 + \frac{2}{5} \frac{\ln u_1}{u_1-1} \right) \quad (1.17)$$

$$t_1 = \frac{1}{5} u_1 (4 - u_1) + \varphi \left(-1 + \frac{2}{5} \frac{u_1 \ln u_1}{u_1-1} \right) \quad (1.18)$$

Для завершения решения задачи нужно еще определить вид функции $u(x)$. Это можно сделать из соотношения (1.9), рассматривая его как дифференциальное уравнение для обратной функции $x(u)$. При этом, конечно, предполагается, что $u(x)$ — монотонная функция координаты x (это будет строго доказано ниже). Вводя единицу длины

$$x_0 = \frac{1}{m} BM^{5/2} v_0^5 = \frac{0.81}{m} \frac{M^3 v_0^5}{e^4 Z^2 L} \quad (1.19)$$

и безразмерную координату $\xi = xx_0^{-1}$, получим из (1.9) с учетом (1.3) уравнение

$$\frac{d\xi}{du} = \frac{ut^{5/2}}{(1-u)(u_1-u)^{-1/2} \varphi (u-1)(u_1-1)^{-1} \ln u_1 + 1/2 \varphi \ln u} \quad (1.20)$$

В (1.20) нужно подставить $t(u)$ из (1.16) и интегрировать его в пределах от 1 до u_1 . При этом ξ будет изменяться от $-\infty$ до $+\infty$. Соотношения (1.16) и (1.20) в основном содержат решение поставленной задачи. При $\varphi = 0$ они сводятся к известным выражениям, и, если коэффициент вязкости к тому же не зависит от температуры, уравнение (1.20) интегрируется в элементарных функциях [7].

2. Качественное исследование. Доказательство существования и монотонного характера решения. В безразмерных переменных задача полностью определена заданием двух величин: φ — безразмерной электронной температуры и u_1 — обратной величины сжатия в скачке. Можно показать, что они не будут вполне независимыми. Ограничения на из-

менение φ следуют из очевидных неравенств

$$t_0 \geq 0, \quad t_1 \geq t_0, \quad \varphi \geq 0 \quad (2.1)$$

Второе неравенство означает, что в скачке ионная компонента нагревается. Кстати отметим, что это и будет необходимым условием возрастания энтропии плазмы в скачке. Из соотношения (1.17) и первого и третьего неравенств (2.1) имеем

$$0 \leq \varphi \leq \frac{1/5(4u_1-1)}{U(u_1)}, \quad U(u_1) = 1 - \frac{2}{5} \frac{\ln u_1}{u_1-1} \quad (2.2)$$

При выводе (2.2) приняты во внимание свойства функции $U(u_1)$. В промежутке $1/4 \leq u_1 \leq 1$ она монотонно возрастает от 0,26 до 0,60. Поэтому знаменатель в (2.2) положителен в указанном промежутке изменения u_1 . Можно убедиться, что второе неравенство из (2.1) накладывает более слабое ограничение на величину φ , т. е. оно выполняется, если удовлетворено неравенство (2.2). Действительно, второе неравенство приводит к условию

$$\varphi \leq \frac{1-u_1^2}{-2 \ln u_1} \quad (2.3)$$

Можно доказать неравенство

$$\frac{1/5(4u_1-1)}{U(u_1)} \leq \frac{1-u_1^2}{-2 \ln u_1} \quad (2.4)$$

Неравенство (2.4) с учетом (2.2) можно привести к виду

$$1 - u_1^2 + 2u_1 \ln u_1 \geq 0 \quad (2.5)$$

Это неравенство, как легко непосредственно убедиться, справедливо при

$$0 \leq u_1 \leq 1$$

т. е. даже в более широком интервале изменения u_1 .

Заметим, что условия $t_0 \geq 0$ и $\varphi \geq 0$ в принципе допускают решения с очень большими скачками, когда $U(u_1) < 0$, т. е. при $u_1 \geq 0$. При этом φ должно быть, очевидно, больше правой части неравенства (2.2). Условие $t_1 \geq t_0$ воспрещает это решение, так как невозможность решения тогда сводится к доказательству неравенства, обратного неравенству (2.4), т. е. снова к (2.5).

Таким образом, область существования решения такова:

$$1/4 \leq u_1 \leq 1, \quad 0 \leq \varphi \leq f_1(u_1)$$

Область существования решения заштрихована на фиг. 1. При этом, очевидно, имеем

$$f_1(u_1) = 1/5(4u_1-1)/U(u_1) \quad (2.6)$$

Можно показать, что во всей области существования t есть монотонно убывающая функция переменной u . Продифференцируем (1.16) по u

$$\frac{dt}{du} = \frac{2}{3} \left[u - \frac{4}{5}(1+u) \right] + \frac{2}{3} \varphi \left(\frac{1}{u} - \frac{2}{5} \frac{\ln u_1}{u_1-1} \right) \quad (2.7)$$

Учитывая очевидные неравенства

$$\frac{1}{u} - \frac{2}{5} \frac{\ln u_1}{u_1-1} \geq U(u_1) > 0$$

можно ввести мажорирующую функцию, полагая $\varphi = \varphi_{\max} = f_1(u_1)$

$$\psi(u) = \frac{2}{3} f_1(u_1) \left(\frac{1}{u} - \frac{2}{5} \frac{\ln u_1}{u_1-1} \right) + \frac{2}{3} \left[u - \frac{4}{5}(1+u) \right] \geq \frac{dt}{du} \quad (2.8)$$

Рассмотрим значения $\psi(u)$ при крайних значениях аргумента u . Пусть сперва $u = 1$. Тогда из (2.6) и (2.8) получим

$$\psi(1) = 0 \quad (2.9)$$

Пусть, далее, $u = u_1$, и тем же путем найдем

$$\psi(u_1) = \frac{2}{15u_1} \frac{u_1^2 - 1 - 2u_1 \ln u_1}{U(u_1)} \leq 0 \quad (2.10)$$

Вывод о знаке последнего выражения следует из (2.5). Следовательно, производная dt/du в крайних точках интервала u ($u=u_1$ и $u=1$) неположительна, причем в точке $u = u_1$ она существенно отрицательна¹. Во всем интервале $u_1 < u < 1$ производная dt/du также неположительна. Это следует из выражения производной функции $\psi(u)$. Из (2.8) получим

$$\psi'(u) = -\frac{2}{3}u^{-2}f_1(u_1) + \frac{2}{3}f'(2.11)$$

В соответствии с (2.11), функция $\psi(u)$ может уменьшаться при $u > u_1$, начиная от своего неположительного значения $\psi(u_1)$. Затем при $u = u_c = [f_1^{-1}(u_1)]^{1/2}$ производная $\psi'(u)$ обращается в нуль, а потом $\psi'(u) \geq 0$ вплоть до $u = 1$, т. е. $\psi(u)$ монотонно растет от минимального значения $\psi(u_c)$ до нулевого значения $\psi(1) = 0$. Если же $u_c < u_1$, то $\psi(u)$ только монотонно растет от $\psi(u_1)$ до $\psi(1) = 0$.

Итак, выше было показано, что во всей области существования решения ионная температура — монотонно убывающая функция скорости

$$dt/du \leq 0, \quad u_1 \leq u \leq 1, \quad 1/4 \leq u_1 \leq 1, \quad 0 \leq \varphi \leq f_1(u_1) \quad (2.12)$$

Далее докажем, что функция $u(\xi)$ в (1.20) также оказывается монотонно убывающей во всей области существования решения. Для этого необходимо и достаточно показать, что знаменатель правой части (1.20) всюду ($u_1 < u < 1$) имеет отрицательный знак, за исключением крайних точек $u = 1$, $u = u_1$, где он обращается в нуль. Итак, покажем, что функция

$$\chi(u) = (1-u)(u_1-u) - \frac{\varphi}{2} \frac{u-1}{u_1-1} \ln u_1 + \frac{\varphi}{2} \ln u < 0 \quad (2.13)$$

во всем интервале $1 > u > u_1$. Первая производная $\chi'(u)$ представляется простой квадратичной функцией

$$\chi'(u) = 2u - (1+u_1) - \frac{\varphi}{2} \left(-\frac{1}{u} + \frac{\ln u_1}{u_1-1} \right) \quad (2.14)$$

Из (2.14) следует, что во всей области $u > 0$ уравнение $\chi'(u) = 0$ имеет два и только два экстремума при любом значении φ

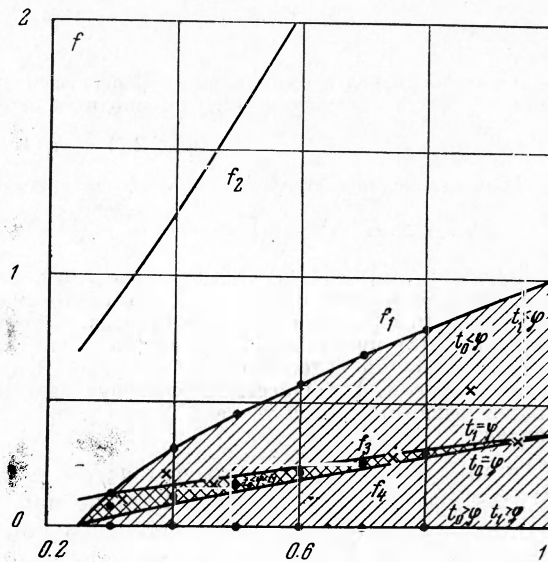
$$u_{\pm} = \frac{1}{4} \left[(1+u_1) + \frac{\varphi}{2} \frac{\ln u_1}{u_1-1} \right] \pm \left\{ \frac{1}{16} \left[(1+u_1) + \frac{\varphi}{2} \frac{\ln u_1}{u_1-1} \right]^2 - \frac{\varphi}{4} \right\}^{1/2} \quad (2.15)$$

Можно показать, что дискриминант выражения (2.15) положителен, если $1/4 \leq u_1 \leq 1$, а φ — любое положительное число; так что оба корня u_{\pm} вещественны и положительны.

Из определения функции $\chi(u)$ следует, что $\chi(u) \sim 1/2 \varphi \ln u \rightarrow -\infty$ при $u \rightarrow 0$, $\chi(u) \sim u^2 \rightarrow +\infty$ при $u \rightarrow \infty$

Далее, функция $\chi(u)$ имеет, по крайней мере, два указанных выше нуля: $u = u_1$, $u = 1$. В таком случае, очевидно, можно утверждать: экстремумы не могут быть точ-

¹ Знак равенства из (2.10) должен быть опущен, так как в (2.5) он относится к случаю $u_1 = 1$, а при этом $\psi(1) > dt/du$, за исключением единственной несуществующей точки (см. фиг. 1), где $\varphi = f_1(1) = 1$ одновременно с $u_1 = 1$.



Фиг. 1

ками перегиба, левый экстремум ($u = u_-$) обязательно будет максимумом, причем $\chi(u_-) \geq 0$, а правый экстремум ($u = u_+$) — минимумом, причем $\chi(u_+) \leq 0$. Кроме того, по крайней мере, один из экстремумов должен располагаться между двумя известными нулями функции $\chi(u)$. Теперь ясно, что необходимым и достаточным условием выполнения неравенства (2.13) будет $u_- < u_+$. Но этому условию, согласно сказанному, совершенно эквивалентно неравенство $\chi'(u_1) < 0$. Эквивалентность условий $u_- < u_+$, $\chi'(u_1) < 0$ можно доказать строго формально. Запишем при помощи (2.14) условие $\chi'(u_1) < 0$ в явном виде

$$u_1 - 1 + \frac{1}{2}\varphi V(u_1) < 0, \quad V(u_1) = \frac{1}{u_1} - \frac{\ln u_1}{u_1 - 1} \quad (2.16)$$

Легко убедиться в выполнении неравенства $V(u_1) \geq 0$ во всем промежутке изменения u_1 ¹. Тогда неравенство (2.16) приводит к ограничению параметра φ сверху

$$\varphi < 2(1 - u_1)/V(u_1) \quad (2.17)$$

Проводимое доказательство будет тогда завершаться неравенством

$$\varphi_{\max} = f_1(u_1) < f_2(u_1), \quad f_2(u_1) = 2(1 - u_1)/V(u_1), \quad \frac{1}{4} \leq u_1 \leq 1 \quad (2.18)$$

Функции $f_1(u_1)$ и $f_2(u_1)$ определены в (2.6) и (2.18).

Неравенство (2.18) выражает тот факт, что имеющие физический смысл значения параметра φ меньше того верхнего предела, который ставит неравенство (2.17). Неравенство (2.18) проще всего обосновать, сопоставляя графики функций $f_1(u_1)$ и $f_2(u_1)$, вычисленные с достаточной точностью. Это сопоставление можно сделать, обращаясь к фиг. 1. В сущности оба графика мало отличаются от простых линейных функций между крайними точками $u_1 = 1/4$, $u_1 = 1$, для которых неравенство (2.18) очевидно.

Таким образом, доказано, что $d\xi/du < 0$ при $1 > u > u_1$, $1/4 \leq u_1 \leq 1$, $0 \leq \varphi \leq f_1(u_1)$. На фиг. 1 также нанесены функции $f_3(u_1)$ и $f_4(u_1)$. Функция $\varphi = f_3(u_1)$ означает равенство конечной ионной температуры и электронной температуры $t_1 = \varphi$, где t_1 определено в (1.18). Аналогично функция $\varphi = f_4(u_1)$ следует из равенства начальной ионной температуры электронной температуре $t_0 = \varphi$, причем t_0 дано в (1.17). Физически наиболее интересная область $t_0 < \varphi < t_1$ располагается между двумя этими линиями и отмечена на фиг. 1 двойной штриховкой. Выше этой области $t_1 < \varphi$ и $t_0 < \varphi$, а ниже, наоборот, $t_1 > \varphi$ и $t_0 > \varphi$.

Подведем итог проведенному качественному исследованию решения. При всех значениях параметров u_1 и φ , заключенных в установленных пределах $1/4 \leq u_1 \leq 1$, $0 \leq \varphi \leq f_1(u_1)$, вязкий изоэлектроннотермический скачок имеет весьма простую непрерывную структуру. Величины сжатия и ионной температуры возрастают в нем монотонно по всей толщине. Заметим, что специфическая зависимость коэффициента вязкости от ионной температуры отражается только на эффективной толщине скачка (она входит в числитель уравнения (1.20)), но никак не сказывается на всех указанных в этом разделе утверждениях.

3. Электростатическая поляризация плазмы в вязком изоэлектроннотермическом скачке. Из кинетических уравнений Больцмана в том же самом приближении, что и вязкий тензор, можно получить выражение для плотности электрического тока. В основе этого вывода, как известно, лежит метод Чепмена — Энскога. В одномерном плоском случае, когда магнитное поле отсутствует, а градиенты плотности и температуры отличны от нуля, для плотности тока можно получить [12]

$$j = \frac{a(Z)(k\theta)^{3/2}}{m_e^{1/2}e^3L} \left(\frac{e}{k\theta} E + \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dx} + \frac{b(Z)}{\theta} \frac{d\theta}{dx} \right) \quad (3.1)$$

¹ Неравенство $V(u_1) \geq 0$ выполняется в более широком интервале изменения $0 \leq u_1 \leq 1$, аналогично неравенству (2.5). Оно будет следствием (2.5), потому что сводится элементарным преобразованием $u_1 = x^2$ к виду $1 - x^2 + 2x^2 \ln x \geq 0$, которое, очевидно, имеет место при выполнении (2.5).

Здесь L — кулоновский логарифм¹, e — элементарный электрический заряд, $a(Z)$ и $b(Z)$ — функции Z ($a = 1,2$, $b = 1,7$ при $Z = 1$ и $a = 2.1/Z$, $b = 2.5$ при $Z \gg 1$). При выводе соотношения (3.1) пренебрегалось инерцией электронов, отклонениями от условия квазинейтральности и движением ионов. При более общих предположениях относительно состояния плазмы соотношение (3.1) также получено в [13], где непосредственно выводится система уравнений переноса обоих компонент плазмы. В [13] дополнительно учтено различие температур ионов и электронов и движение ионов. Согласно [13], в (3.1) входит электронная температура, если $\theta \neq T$. В (3.1) входит также напряженность электрического поля $E = E(x)$. Совершенно ясно, что стационарная электрическая поляризация плазмы находится из условия $j = 0$.

Отсюда находится электрическое поле в стационарном состоянии, если использовать соотношение (3.1)

$$E_0(x) = -\frac{k\theta}{e\rho} \frac{d\rho}{dx} - \frac{kb(Z)}{e} \frac{d\theta}{dx} \quad (3.2)$$

Величина плотности электрического заряда определяется из уравнения Пуассона²

$$\rho_{e0} = \frac{1}{4\pi} \frac{dE_0}{dx} \quad (3.3)$$

Далее применим соотношения (3.2) и (3.3) к условиям вязкого изоэлектроннотермического скачка. Во-первых, $d\theta/dx = 0$ и $\theta = \theta_0$; во-вторых, удобно выразить все величины в безразмерных переменных. Тогда из (3.2), (1.5), (1.20) получим, вводя величины ξ , t и φ согласно предыдущему,

$$E_0(\xi) = E^0 \varepsilon(\xi), \quad E^0 = k\theta_0 / ex_0 \quad (3.4)$$

$$\varepsilon(\xi) = \frac{(1-u)(u_1-u)^{-1/2} \varphi(u-1)(u_1-1)^{-1} \ln u_1 + 1/2 \varphi \ln u}{u^2 t^{5/2}} \quad (3.5)$$

Путем дифференцирования (3.4) можно получить из (3.3) выражение плотности электрического заряда

$$\rho_{e0}(\xi) = \rho_e^0 \sigma(\xi), \quad \rho_e^0 = E^0 / 4\pi x_0, \quad \sigma(\xi) = d\varepsilon/d\xi \quad (3.6)$$

Выражение $\sigma(\xi)$ при помощи (1.16) и (1.20) можно записать в явном виде через u и t .

Прежде всего на основе соотношений (3.4) — (3.6) убедимся в обоснованности использованного при выводе основных уравнений условия квазинейтральности плазмы с одновременным пренебрежением электростатической энергией, по сравнению с тепловой энергией плазмы³. Легко видеть, что единица длины x_0 , определенная соотношением (1.19), равна эффективной длине пробега ионов с безразмерной температурой t порядка единицы ($x_0 = 0.81 M^2 v_0^4 / n_0 e^4 Z^4 L$) и начальной плотностью

¹ В обычных условиях газового разряда $L \approx 20$, так как здесь L определено как удвоенное значение кулоновского логарифма из [12, 13] ($L = 2\lambda$).

² При выводе уравнения (3.1) для j , как известно, можно пренебрегать объемным зарядом ρ_e , пока он достаточно мал. Его величину при этом следует определять из (3.3) [13].

³ Некоторые из этих оценок проделаны в книге [6], но там они основаны на качественных соображениях. Приведенные здесь оценки вытекают из общих выражений (3.1) — (3.3) и включают рассмотрение энергетических соотношений.

плазмы. Относительное нарушение условия квазинейтральности вытекает из (3.6)

$$\frac{\Delta\rho}{\rho} = \frac{M\rho_e^0}{eZ\rho_0} \sigma(\xi) u(\xi) = (Z+1) \frac{D^2}{x_0^2} \sigma(\xi) u(\xi) \quad (3.7)$$

где введен дебаевский радиус

$$D = \left[\frac{k\theta_0 M}{4\pi e^2 \rho_0 Z(Z+1)} \right]^{1/2} \quad (3.8)$$

Если еще ввести среднее расстояние между частицами плазмы

$$d = [(Z+1)\rho_0 M^{-1}]^{-1/3} \quad (3.9)$$

то условие (3.7) можно представить несколько иначе, исключив x_0

$$\frac{\Delta\rho}{\rho} = \frac{1}{(0.81)^2} \frac{L^2}{(4\pi)^4} \frac{\varphi^4}{Z+1} \left(\frac{d}{D}\right)^6 \sigma(\xi) u(\xi) \quad (3.10)$$

Во всей области существование решения $\varphi \ll 1$. Поэтому в (3.10) перед безразмерными функциями фигурирует малый множитель, по порядку величины не превышающий $(d/D)^6$. Характерное отношение d/D является еще в теории однородной плазмы, и чем оно меньше по величине, тем плазма ближе к идеальному газу, т. е. тем меньше электростатическая энергия микрополей по сравнению с тепловой [14]. Естественно ожидать, что по порядку величины отношение электростатической энергии к тепловой энергии электронной компоненты плазмы совпадает с оценками (3.7) или (3.10). Легко убедиться в этом непосредственно, используя соотношения (3.4) и (3.8)

$$\frac{W_e}{W_T} = \frac{E_0^2(\xi)}{8\pi} \left(\frac{3}{2} \frac{k\theta_0 Z\rho}{M}\right)^{-1} = \frac{Z+1}{3} \frac{D^2}{x_0^2} \varepsilon^2(\xi) u(\xi) \quad (3.11)$$

и, имея в виду, что $\varepsilon_{ef}^2 \sim \sigma_{ef}$, согласно (1.20), (3.5) и (3.6).

В обычных условиях при $Z=1$ и $L=20$ отношение $d/D \approx 10^{-1}$, во всяком случае, оно заведомо меньше единицы для реальной плазмы¹. Если принять отношение равным 10^{-1} , то из (3.10) получим критическое значение безразмерного произведения $(\Delta\rho/\rho \approx 1)$

$$|\sigma(\xi) u(\xi)|_* \approx |\sigma(\xi)|_* \approx 10^8 \varphi^{-4} \quad (3.12)$$

Такого рода соотношение удобно использовать для обоснования исходных уравнений описания плазмы, в том числе самого метода расчета электростатического поля.

Для принятых условий должно выполняться неравенство

$$|\sigma(\xi)| \ll |\sigma(\xi)|_* \approx 10^8 \varphi^{-4} \quad (3.13)$$

Чтобы завершить эти оценки, покажем, что условие стационарности $j=0$ также выполняется при осуществлении выведенных выше критериев. В силу уравнения непрерывности электрического заряда, плотность электрического тока $j_k = v_0 \rho_{e0}(\xi)$. Составим отношение этого тока к первому члену выражения (3.1), используя (1.19), (3.4), (3.6),

$$j_k \cdot \left[\frac{a(Z)(k\theta_0)^{3/2}}{m_e^{1/2} e^2 L} E_0(\xi) \right]^{-1} = \left(\frac{m_e}{M}\right)^{1/2} \frac{L^3 \varphi^{3/2}}{0.81 (4\pi)^4 Z^{1/2} (Z+1) a(Z)} \left(\frac{d}{D}\right)^6 \frac{\sigma(\xi)}{\varepsilon(\xi)} \quad (3.14)$$

Из (3.14) видно, что это отношение, вообще говоря, также мало, если мало d/D .

¹ Например, при $\theta_0 \approx 10^6$ °К, $n_0 \approx 6 \cdot 10^{16}$ см⁻³ ($p_0 \approx 2$ мм Hg), имеем $D \approx 2.0 \cdot 10^{-5}$ см, $d = 2.0 \cdot 10^{-6}$ см, или при $\theta_0 \approx 10^7$ °К $n_0 \approx 6 \cdot 10^{18}$ см⁻³, $D = 6.3 \cdot 10^{-6}$ см, $d \approx 4.4 \cdot 10^{-7}$ см. Такие условия типичны для пинч-эффекта в плотной плазме, описанного в [15].

Таким образом, в вязком скачке может быть оправдано пренебрежение поляризацией плазмы в гидродинамических уравнениях (1.1) — (1.4.). Хотя поляризация не оказывает почти никакого влияния на гидродинамические и термодинамические величины, сама по себе она может представлять существенный физический интерес. Например, можно рассмотреть ускорение частиц внутри скачка. Для этого оценим разность потенциала ΔW на вязком скачке. Согласно (3.2) и условию изотермичности

$$\Delta W = - \int_{-\infty}^{+\infty} E_0 dx = \frac{k\theta_0}{e} \ln \frac{\rho_1}{\rho_0} = - \frac{k\theta_0}{e} \ln u_1 \quad (3.15)$$

разность потенциалов в основном определяется электронной температурой. Из (3.15) видно, что если заряженная частица пройдет эту разность потенциалов, то ее энергия изменится на величину средней тепловой энергии электронов, если $Z \sim 1$. Это приращение энергии будет происходить на длине порядка средней длины свободного пробега ионов плазмы. Можно прийти к выводу, что эффективное ускорение частиц плазмы в таких условиях не может осуществляться, хотя для многозарядной плазмы этот процесс более существен. Конечно, интересно исследовать, помимо электростатического поля, возможное электромагнитное излучение ударной волны в плазме. Но этот эффект зависит не только от структуры вязкого скачка. Он обусловлен также всей конфигурацией ударной волны в пространстве и свойствами окружающей среды. Можно только указать здесь по порядку величины самую высокую частоту в спектре сигнала $\nu \sim \nu_0 / \xi_{ef} x_0$, где ξ_{ef} — эффективная безразмерная ширина скачка.

4. Физические результаты расчетов структуры скачка. Численное интегрирование уравнения (1.20) совместно с (1.16) и соответствующими граничными условиями в принципе дает возможность определить все величины, описывающие структуру скачка для любой пары значений параметров u_1 и φ . Вычисленные таким образом функции $t(\xi)$ и $u(\xi)$ можно дополнить функциями $\pi(\xi)$, $\varepsilon(\xi)$ и $\sigma(\xi)$, если использовать соответственно (1.14), (3.5) и (3.6). В таблице приводятся некоторые характерные величины: эффективная ширина скачка ξ_{ef} ¹, начальная и конечная ионные температуры t_0 и t_1 . Для каждого взятого значения безразмерной скорости позади скачка u_1 выбраны три характерных значения безразмерной электронной температуры φ . При этом крайние значения φ будут предельно возможными, как это видно на фиг. 1. Все варианты, фигурирующие в таблице, отмечены кружками. Сразу следует заметить, что все варианты с $\varphi = 0$ непосредственного физического смысла не имеют, так как в этом случае не оправдано предположение об изоэлектроннотермическом характере скачка. Из соотношения коэффициентов ионной и электронной теплопроводностей [10]

$$\frac{\kappa_i}{\kappa_e} \approx Z^{-3} \left(\frac{m_e}{M} \right)^{1/2} \left(\frac{T}{\theta_0} \right)^{5/2} = Z^{-1/2} \left(\frac{m_e}{M} \right)^{1/2} \left(\frac{t}{\varphi} \right)^{5/2} \approx \left(\frac{m_e}{M} \right)^{1/2} \left(\frac{t_1}{\varphi} \right)^{5/2} \quad (4.1)$$

следует, что для обоснования предположения об изоэлектроннотермическом характере скачка должно быть выполнено условие

$$\varphi > (m_e/M)^{1/5} t_1 \quad (4.2)$$

Впрочем, легко понять, что условие (4.2) будет необходимым, но не достаточным, так как выравнивание электронной температуры не проис-

¹ Эффективная ширина скачка ξ_{ef} условно определяется здесь как расстояние между двумя точками структуры скачка с $u^*_0 = 0.99$ и $u^*_1 = u_1 + 0.01$.

ходит мгновенным образом. По указанной причине строки таблицы с $\varphi = 0$ служат только для оценки влияния электронной компоненты плазмы на структуру вязкого скачка. С этой целью можно сравнить строки с $\varphi = 0$ со средними строками, для которых выполнено условие $t_0 < \varphi < t_1$. При фиксированном сжатии учет давления электронной компоненты плазмы, сравнимого с давлением ионной компоненты, приводит к уменьшению ширины скачка в два-три раза. Основной причиной уменьшения ξ_{ef} , очевидно, будет уменьшение конечной ионной температуры t_1 . Согласно (1.20), $\xi_{ef} \sim t_1^{3/2}$, хотя, точнее говоря, при переходе от случая $\varphi = 0$ к случаю $\varphi \sim t_1$ имеет место небольшой противоположный эффект из-за уменьшения знаменателя в правой части (1.20). Кстати, при помощи (1.17) и (1.18) легко показать, что во всей области существования решения (фиг. 1) выполняются неравенства

$$\partial t_1 / \partial \varphi < 0, \quad \partial t_0 / \partial \varphi < 0, \quad \partial t_1 / \partial u_1 > 0 \quad (4.3)$$

Что касается строк таблицы с наибольшими значениями φ , то они также не имеют физического смысла, но по совершенно другой причине, чем строки с $\varphi = 0$. В этих вариантах из-за чрезвычайно малых величин ξ_{ef} получаются электростатические поля и объемные заряды, намного превосходящие свои критические значения, оцениваемые, например, при помощи (3.12) и (3.13). Все эти варианты соответствуют нулевой начальной ионной температуре $t_0 = 0$. В структуре стационарной ударной волны в плазме такой случай не встречается, так как из-за обмена энергией путем соударений и некоторого сжатия плазмы перед вязким скачком ионная температура становится отличной от нуля. В стационарном случае также невозможен рассмотренный выше скачок при $\varphi = 0$. Как показано в [4], при $Z = 1, A = 1$ (водородная плазма) возникает ситуация $t_0 < \varphi < t_1$. Если же $Z = 3, A = 7$ (литиевая плазма), то значения φ получаются несколько большими, так что заключены в пределах $t_0 < 1/3 \varphi < t_1$. На фиг. 1 крестиками обозначены параметры вязких скачков, найденные для стационарных ударных волн в [4]. Два крестика, лежащие выше полосы $t_0 < \varphi < t_1$, относятся к случаю $Z = 3, A = 7$. Для еще больших значений Z значения φ будут расположены еще несколько выше. В случае предельно сильной стационарной ударной волны при $Z = 1, A = 1$ принятый здесь параметр $u_1 = 0,320$, а при $Z = 3, A = 7$ имеем $u_1 = 0,385$ (см. фиг. 1). Поэтому в таблице не имеет смысла также самая последняя строка с $u_1 = 0.25$.

Таким образом, имея в виду, в первую очередь, стационарную ударную волну в плазме, сосредоточим внимание на данных таблицы при средних значениях параметра φ .

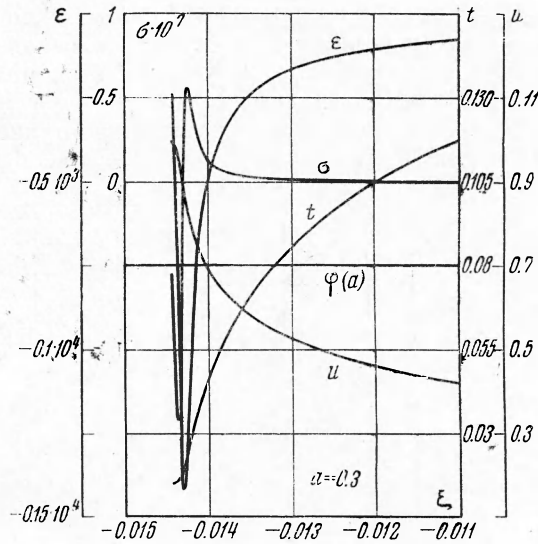
Интересно провести сравнение различных областей стационарной ударной волны. Можно ограничиться случаем водородной плазмы $Z = 1, A = 1$, так как при этом ширина вязкого скачка относительно наиболее велика из-за различных зависимостей длин пробега электронов и ионов от заряда иона Z . Приводим для двух типичных случаев эффективные ширины структуры стационарной ударной волны до скачка $\Delta \xi_1$ и после скачка $\Delta \xi_2$, а также эффективные ширины самого скачка ξ_{ef} , величины полного обратного сжатия u_1^* , обозначенные в [4] как u_2 , и величины обратного сжатия в скачке u_1

u_1	$\Delta \xi_1$	$\Delta \xi_2$	ξ_{ef}	u_1^*
0.75	2.9	1.1	1.0	0.58
0.32	0.11	0.048	0.022	0.25

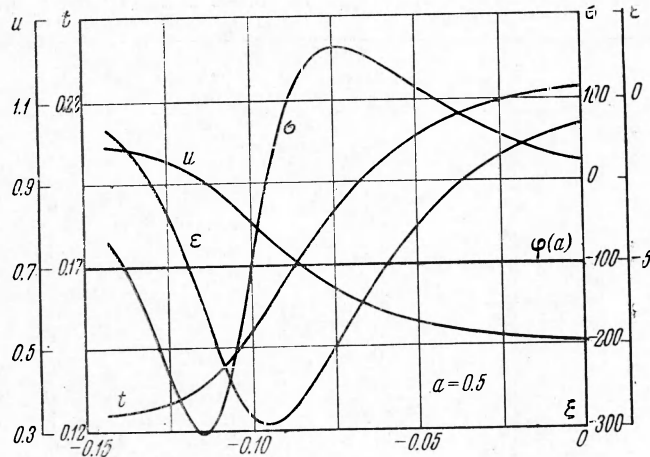
Величины $\Delta \xi_1$ и $\Delta \xi_2$ взяты из [4], но приведены к единице длины данной работы (1.19). Значения ξ_{ef} получены интерполяцией между ближай-

шими к u_1 строками таблицы (разницу в значениях параметра φ можно не учитывать). Как видно из приведенных данных, в случае слабой ударной волны (верхняя строчка) $\xi_{ef} \sim \Delta\xi_2$, но даже в этом случае электронная температура мало изменяется на длине $\sim \Delta\xi_2$ (см. фиг. 6 из [4]). Таким образом, условие изоэлектронотермичности можно считать выполненным, хотя большой разницы между ξ_{ef} и $\Delta\xi_2$ (а также $\Delta\xi_1$) не получается. Приведенные данные качественно подтверждаются в численном счете (см. рис. 10 из [10] и фиг. 1 из [9]).

Рассмотрим далее критерий (3.13), который означает достаточно малую электростатическую поляризацию плазмы. В таблице с этой целью даны значения $|\sigma|_* = 10^8 \varphi^{-4}$ (в соответствии с (3.12)) и расчетные максимальные значения $|\sigma|_{\max}$ для параметров u_1 и φ . Из таблицы видно, что критерий (3.13) выполнен с большим запасом даже в случае $u_1 = 0.3$. Как следует из расчетов, электростатическая поляризация скачка имеет очень простую дипольную структуру с опережающим максимумом отрицательного заряда, примерно



Фиг. 2



Фиг. 3

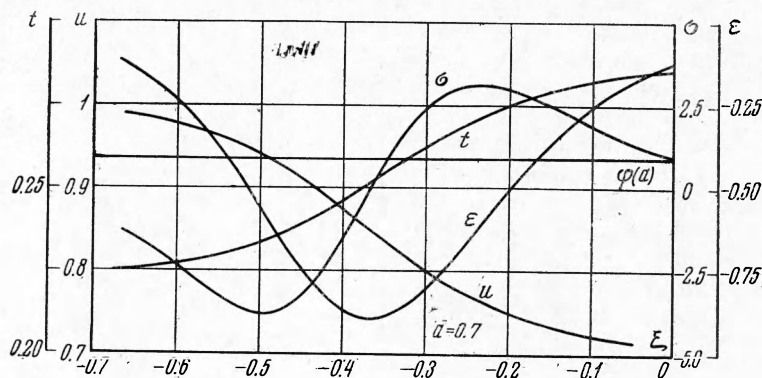
вдвое превышающим последующий максимум положительного заряда ($|\sigma_{\min}| \approx 2\sigma_{\max}$). Для случая многозарядной плазмы, как было показано при $Z = 3$, параметр φ лежит выше полосы $t_0 < \varphi < t_1$. При этом ξ_{ef} уменьшается, а $|\sigma|_{\max}$ соответственно возрастает примерно пропорционально ξ_{ef}^{-2} . Однако, вообще говоря, возрастает и критическое значение $|\sigma|_*$,

так как

$$\left(\frac{D}{d}\right)^6 \sim \frac{\theta_0^3}{\rho_0} \frac{1}{Z^3(Z+1)}$$

а температура θ_0 при заданной плотности ρ_0 должна быть существенно больше для многозарядной плазмы. Более подробный анализ, произведенный для конкретного случая литиевой плазмы, показывает, что соотношение между $|\sigma|_{\max}$ и $|\sigma|_*$ остается примерно таким же, как для водородной плазмы.

Тем не менее, если по каким-либо причинам критерий (3.13) все же будет нарушен, то предыдущий способ рассмотрения структуры вязкого изо-



Фиг. 4

электроннотермического скачка становится неприменимым. Тогда необходимо было бы решать значительно более сложную задачу с учетом различия плотностей и скоростей ионов и электронов в исходных уравнениях. Другими словами, нужно было бы принимать во внимание обратное влияние электрического поля на движение плазмы. В некоторых частных слу-

u_i	φ	ε_{ef}	t_0	t_1	$ \sigma _*$	$ \sigma _{\max}$
0.8	0.795	$4.2 \cdot 10^{-7}$	0	$1.06 \cdot 10^{-3}$	$1.32 \cdot 10^{10}$	0.4
	0.295	1.43	0.278	0.320		
	0	4.03	0.443	0.508		
0.7	0.686	$8.2 \cdot 10^{-6}$	0	$4.02 \cdot 10^{-3}$	$2.19 \cdot 10^{10}$	4
	0.260	0.672	0.225	0.286		
	0	1.99	0.362	0.458		
0.6	0.572	$7.0 \cdot 10^{-5}$	0	$1.09 \cdot 10^{-2}$	$4.26 \cdot 10^{10}$	30
	0.220	0.316	0.173	0.253		
	0	0.944	0.282	0.403		
0.5	0.449	$3.96 \cdot 10^{-4}$	0	$2.52 \cdot 10^{-2}$	$1.19 \cdot 10^{11}$	$3 \cdot 10^2$
	0.170	0.143	0.125	0.224		
	0	0.402	0.201	0.345		
0.4	0.308	$1.78 \cdot 10^{-3}$	0	$5.4 \cdot 10^{-2}$	$4.85 \cdot 10^{11}$	$6 \cdot 10^5$
	0.120	$5.46 \cdot 10^{-2}$	$7.4 \cdot 10^{-2}$	0.194		
	0	0.140	0.121	0.283		
0.3	0.128	$7.17 \cdot 10^{-3}$	0	0.102	$2.44 \cdot 10^{12}$	$1.4 \cdot 10^7$
	0.080	$1.44 \cdot 10^{-2}$	$1.5 \cdot 10^{-2}$	0.155		
	0	$3.38 \cdot 10^{-2}$	$4 \cdot 10^{-2}$	0.217		
0.25	0	$1.45 \cdot 10^{-2}$	0	0.182		

чаях это сделано в работе [16]. Нарушения критерия (3.13) можно ожидать, например, в сложной структуре нестационарной ударной волны или в случае очень плотной плазмы, в которой отношение d/D возрастает и приближается к единице.

Более подробная информация о структуре вязкого изоэлектроннотермического скачка дана на фиг. 2—4, где построены профили функций t , u , ε , и σ в зависимости от координаты ξ . При этом различные фигуры отличаются друг от друга значениями конечной скорости плазмы u_1 , равными соответственно 0,7, 0,5 и 0,3. Значения параметра φ выбраны такими же, как в таблице.

В заключение автор благодарит В. Ф. Дьяченко за некоторые ценные советы и В. С. Ильину, осуществившую численное интегрирование уравнений и построение графиков.

Поступила 25 I 1967

ЛИТЕРАТУРА

1. Зельдович Я. Б. Ударные волны большой амплитуды в воздухе, Ж. эксперим. и теор. физ., 1957, т. 32, № 5.
2. Шафранов В. Д. Структура ударной волны в плазме. Ж. эксперим. и теор. физ., 1957, т. 32, № 6.
3. Имшенник В. С. О структуре ударных волн в высокотемпературной плотной плазме. Ж. эксперим. и теор. физ., 1962, т. 42, № 1.
4. Имшенник В. С. Численное интегрирование дифференциальных уравнений структуры ударной волны в плазме, Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1962, т. 2, № 2.
5. Gross R. A. Strong ionizing shock waves. Rev. Mod. Phys., 1965, vol. 37, No. 4.
6. Зельдович Я. Б., Райзер Ю. П. Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений. Физматгиз, 1963.
7. Ламб Г. Гидродинамика. Гостехиздат, 1947.
8. Дьяченко В. Ф., Имшенник В. С. Сходящаяся цилиндрическая ударная волна в плазме с учетом структуры фронта. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1963, т. 3, № 5.
9. Дьяченко В. Ф., Имшенник В. С. О сходящейся цилиндрически симметричной ударной волне при наличии диссипативных эффектов. ПММ, 1965, т. 29, вып. 6.
10. Дьяченко В. Ф., Имшенник В. С. К магнитогидродинамической теории пинч-эффекта в высокотемпературной плотной плазме. Сб. «Вопросы теории плазмы», Атомиздат, 1967, т. 5.
11. Chapman S., Cowling T. G. The mathematical theory of non-uniform gases. Cambridge Univ. Press, 1939 (русск. перев. Чапман, Коулинг. Математическая теория неоднородных газов. Изд. иностр. лит., 1960).
12. Landshoff R., Transport phenomena in a completely ionized gas in presence of a magnetic field. Phys. Rev., 1949, vol. 76, No 7.
13. Брагинский С. И. Явления переноса в плазме. Сб. «Вопросы теории плазмы», Атомиздат, 1963, т. 1.
14. Ландау Л., Лифшиц Е. Статистическая физика. Гостехиздат, 1951.
15. Филиппов Н. В., Филиппова Т. И., Виноградов В. П. Исследование сжатого состояния дейтериевой плазмы. Nucl. fusion, 1962, Suppl. p. II.
16. Жафрен М. И., Пробштейн Р. Ф. Структура ударной волны в плазме. ПМТФ, 1964, № 6.