

**О ТЕОРЕТИЧЕСКОМ ИССЛЕДОВАНИИ ЕДИНСТВЕННОСТИ
И УСТОЙЧИВОСТИ СТАЦИОНАРНЫХ РЕЖИМОВ
ГЕТЕРОГЕННОГО ГОРЕНИЯ
ПРИ СВЕРХЗВУКОВОМ ОБТЕКАНИИ ТЕЛА**

Л. Ю. Артюх, В. П. Каишкар, Ш. О. Кожажметова
(Алма-Ата)

Обтекание поверхностей различных конструкций высокоэнтальпийными потоками может привести к значительному нагреву тел. Известны различные способы искусственного охлаждения поверхностей, например, потоком охладителя изнутри тела. Если скорости тепловыделения и теплоотвода оказываются различными по величине и при подводе и отводе тепла возникают положительная и отрицательная обратные связи, как, например, в случае горения, то становится принципиально возможной неустойчивость процесса, в частности появление автоколебаний. Кроме того, непрерывное изменение любого из определяющих параметров системы, например скорости или температуры потока, может привести в зависимости от возрастания или убывания параметра к гистерезисному характеру изменения температуры поверхности. Известны экспериментальные факты гистерезисного и колебательного режимов изменения температуры поверхности тела, обтекаемого потоком, когда на поверхности протекает экзотермическая каталитическая реакция [1, 2]. Подобные явления термокинетических колебаний нашли ясное физическое и математическое объяснение во многих работах [1—4].

Чаще всего явления термокинетических колебаний и неединственности стационарных состояний встречаются в химической технологии [2]. Возможность гистерезисного изменения температуры поверхности тела, обтекаемого потоком при наличии гетерогенного горения, предсказывалась в работах [4—6]. В [6] проведен также качественный анализ устойчивости стационарных состояний тепломассообмена на поверхности с сильным вдувом и горением в объеме и на поверхности. Показано, в частности, что при числе $Le < 1$ возможна автоколебательная неустойчивость.

В настоящем сообщении теоретическими методами качественной теории дифференциальных уравнений (7) и теории пограничного слоя [8—10] исследуется единственность и устойчивость стационарных состояний на поверхности обтекаемого тела. При этом отвод тепла в тело представляется линейной функцией разности температур поверхности и охладителя¹. Для уменьшения и без того большого числа параметров процесса в рассматриваемой ниже задаче не учитывается унос вещества и излучение с поверхности.

В связи с тем, что в работе проводится лишь качественное исследование устойчивости стационарных состояний, начальные условия роли не играют. Принимается, что реакция происходит на поверхности тела, например каталитическая рекомбинация диссоциированного в потоке газа, гетерогенное горение в воздушном потоке. Изложенная выше задача описывается следующей системой уравнений и граничных условий:

$$\frac{\partial}{\partial x} (\rho u r_0^j) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho v r_0^j) = 0,$$

$$\rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) - \frac{dp}{dx},$$

¹ Последнее справедливо при малой толщине стенок. Например, в случае обтекания пластины толщиной b однородным потоком при числе Брюно $Bg = 2Pr^{1/3}(b/x)^{1/2} < 1$ нелинейность температуры в теле можно не учитывать [11].

$$\rho c_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2, \quad (1)$$

$$\rho \left(\frac{\partial c}{\partial t} + u \frac{\partial c}{\partial x} + v \frac{\partial c}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(D \frac{\partial c}{\partial y} \right),$$

$$\mu \rho = \text{const};$$

$$y = 0: u = v = 0,$$

$$\lambda \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_w - \alpha (T_w - T^0) + Q k_0 C_w \exp(-E/RT_w) = 0, \quad (2)$$

$$D \left(\frac{\partial c}{\partial y} \right)_w - k_0 C_w \exp(-E/RT_w) = 0,$$

$$y \rightarrow \infty: u \rightarrow u_\infty, \quad T \rightarrow T_\infty, \quad C \rightarrow C_\infty.$$

Здесь u, v — компоненты скорости потока; T — температура; T^0 — температура охладителя; C — концентрация компонента, вступающего в гетерогенную реакцию; Q — тепловой эффект; E — энергия активации; k_0 — константа скорости реакции; μ, λ, D — коэффициенты вязкости, теплопроводности, диффузии; ρ, c_p — плотность и теплоемкость газовой смеси; α — коэффициент теплоотдачи; r_0 — радиус кривизны поверхности тела; индекс w относится к условиям на стенке.

Граничные условия на поверхности (2) представляют собой баланс тепла и вещества и учитывают диффузионные потоки тепла и вещества в газе, конечную скорость реакции и сток тепла в твердое тело. Система уравнений (1) двумерного пограничного слоя в некоторых случаях (течение вдоль пластины, клина) в квазиавтомодельном приближении [4], а для лобовой точки — точно может быть сведена к системе одномерных дифференциальных уравнений [8]. Тогда диффузионные потоки в уравнениях (2) можно найти однократным интегрированием нестационарных «одномерных» уравнений, используя метод Мексина [9, 10]. Опустим обычные в теории пограничного слоя математические выкладки и приведем окончательный вид безразмерных уравнений баланса тепла и вещества на поверхности (2). Последняя с учетом (1) преобразуется в нелинейную динамическую систему второго порядка

$$\frac{dC_w}{dt} = \text{Le}^* (1 - C_w - \tau^* C_w \exp(-1/\Theta_w)) = P(C_w, \Theta_w), \quad (3)$$

$$\frac{d\Theta_w}{dt} = \Theta_w^* - \Theta_w - \Phi^* \tau^* C_w \exp(-1/\Theta_w) = Q(C_w, \Theta_w).$$

Здесь $C_w = C_w/C_\infty$, $\Theta_w = RT_w/E$ — безразмерные значения концентрации и температуры на поверхности. Ясно, что $C_w \in [0; 1]$, тогда как температура в обычно реализуемых условиях может меняться в области $\Theta_w = \in [0,01; 0,25]$.

В качестве конкретного примера ниже рассматривается течение в окрестности лобовой точки. Безразмерное время $\bar{t} = t/t_m$ в уравнении (3) имеет своим масштабом время t_m , определяющее релаксацию температуры в заданном пограничном слое с учетом теплоотвода в стенку

$$t_m = \frac{2 \text{Pr}^{1/3} \bar{\xi} - \Gamma(2/3)}{3(1 + \bar{\alpha}) \bar{r}_0^j} \left[\frac{6}{f''(0)} \right]^{2/3} \frac{l}{a}. \quad (4)$$

Здесь f и $\bar{\xi}$ — безразмерная функция тока и продольная координата в переменных Лиза — Дородницына; \bar{r}_0 — безразмерный радиус кривизны поверхности, отнесенный к характерному размеру тела; a — коэффициент температуропроводности смеси; Pr — число Прандтля;

$$\alpha = \Gamma(1/3) \left[\frac{6}{f''(0)} \right]^{1/3} \frac{1}{3 \text{Re}_\infty^{1/2} \text{Pr}_\infty^{1/3} \bar{r}_0^j} \frac{\alpha l}{\lambda_{\text{TB}}} \quad (5)$$

— некоторый результирующий безразмерный коэффициент теплоотвода в тело (Γ — гамма-функция).

Поведение динамической системы (3) зависит от параметров: τ^* , Le^* , ϑ^* , Θ^* . Назовем эти параметры в соответствии с их ролью в системе уравнений (3) следующим образом:

1. Безразмерное время пребывания, отнесенное ко времени реакции, — своеобразное число Дамкеллера

$$\tau^* = \tau/M_\infty, \quad (6)$$

где $\tau = \frac{\Gamma(1/3)}{3} \left[\frac{6 Sc^2}{f''(0)} \right]^{1/3} r_0 \sqrt{2\xi \bar{Re}_\infty} \frac{k_0}{u_s}$; M_∞ — число Маха внешнего потока; Re — число Рейнольдса; Sc — число Шмидта; u_s — скорость звука.

2. Эффективное число Льюиса при гетерогенном горении с теплоотводом

$$Le^* = Le^{1/3}/(1 + \bar{\alpha}), \quad Le = D/a \quad (7)$$

(a — коэффициент температуропроводности).

3. Эффективная теплотворность

$$\vartheta^* = \vartheta C_\infty Le^*, \quad \vartheta = QRLe^{1/3}/\rho_\infty c_{p\alpha} E. \quad (8)$$

4. Приведенная «внешняя» температура

$$\Theta^* = (1 + \bar{\alpha})^{-1} \left[\Theta_\infty \left(1 + \kappa \frac{\gamma - 1}{2} M_{\infty}^2 \right) + \bar{\alpha} \Theta^0 \right], \quad (9)$$

где $\gamma = c_p/c_v$; $\kappa = Pr_\infty^{1/3} \left[f''(0) \right]^{1/3} \Gamma(2/3) \sqrt[3]{\frac{4}{3}}$.

При равенстве температуры охладителя и потока $\Theta^0 = \Theta_\infty$ выражение (9) упрощается

$$\Theta^* = \Theta_\infty \left[1 + \frac{\kappa}{1 + \bar{\alpha}} \left(\frac{\gamma - 1}{2} \right) M_{\infty}^2 \right]. \quad (9')$$

Из (9') видно, что возрастание теплоотвода (увеличение $\bar{\alpha}$) приводит к уменьшению аэродинамического нагрева поверхности.

Исследование устойчивости нелинейной динамической системы (3) проведем первым методом Ляпунова [3, 7]. Рассмотрим поведение со временем малых отклонений решений от стационарных состояний, т. е. величин $\Theta_w - \Theta_s$, $C_w - C_s$. Стационарные состояния определяются² из уравнений (3) при $P(C, \Theta) = Q(C, \Theta) = 0$:

$$1 - C_s = \frac{\Theta_s - \Theta^*}{\vartheta^*} = \frac{\tau^*}{(\tau^* + e^{1/\Theta_s})}. \quad (10)$$

Линеаризуем правые части системы (3), используя первые два члена разложения их в ряд Тейлора вблизи стационарных состояний. Устойчивость процесса теперь будет характеризоваться затуханием со временем возмущений. Возрастание или колебание возмущений — показатель неустойчивости процесса. Таким образом, для линейной системы устойчивость можно определить по знакам величин σ и Δ

$$\sigma = - \left[\frac{\partial P}{\partial C} \Big|_s + \frac{\partial Q}{\partial \Theta} \Big|_s \right], \quad \Delta = \frac{\partial P}{\partial C} \frac{\partial Q}{\partial \Theta} - \frac{\partial P}{\partial \Theta} \frac{\partial Q}{\partial C}. \quad (11)$$

Если $\sigma < 0$, то стационарные состояния неустойчивы. При $\Delta < 0$ существует три решения, среднее из которых седлонеустойчивое стационарное состояние. Устойчивость двух других определяется по знаку σ .

² Здесь и в дальнейшем решение проводится для условий на стенке и знак w для простоты опущен.

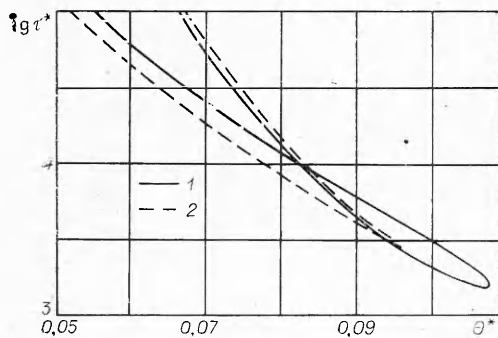


Рис. 1. Линии, ограничивающие области неустойчивости $\sigma=0$ (1) и неоднозначности $\Delta=0$ (2) стационарных состояний на плоскости обобщенных параметров τ^* и Θ^* при фиксированных $Le^*=0,3$, $\phi=0,2$.

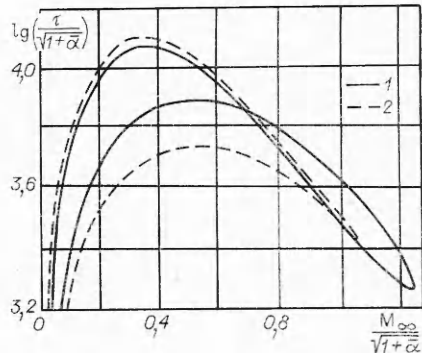
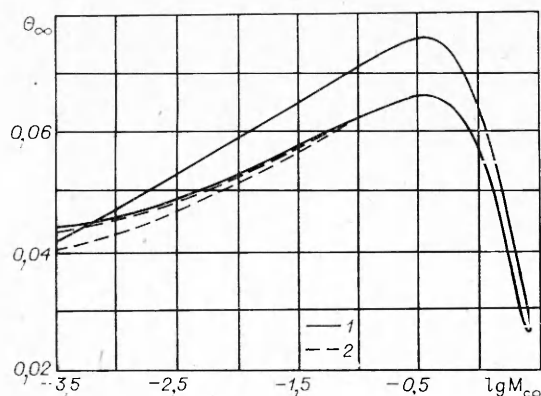


Рис. 2. Линии неустойчивости $\sigma=0$ (1) и неоднозначности $\Delta=0$ (2) стационарных состояний на плоскости параметров τ , M_∞ при фиксированных $Le^*=0,3$, $\phi=0,2$, $\Theta_\infty=0,07$.

Анализ устойчивости, приведенный выше, справедлив в малом и не описывает состояние нелинейной системы (3) при большом отклонении от стационарного состояния. Такое исследование можно проводить для нелинейной системы (3), например, численно. Однако в частном случае, когда система имеет единственное ($\Delta > 0$) неустойчивое ($\sigma < 0$) стационарное решение в силу существования цикла без контакта [3, 7] для систем, аналогичных (3), реализуется автоколебательный режим.

Проведем изложенным выше методом анализ устойчивости системы (3), построив области устойчивости и неединственности на плоскости каких-либо двух из четырех обобщенных параметров (6)–(9). На рис. 1 показан пример такого решения на плоскости τ^* , Θ^* . Кривая 2 разделяет плоскость τ^* , Θ^* на внешнюю область с $\Delta > 0$, где существуют единственные стационарные состояния, и внутреннюю, гораздо меньшую область с $\Delta < 0$, где возможны три решения. Кривая 1 также разделяет всю плоскость τ^* , Θ^* при заданных Le^* и ϕ на устойчивые ($\sigma > 0$) и неустойчивые ($\sigma < 0$) стационарные состояния. Согласно приведенным выше рассуждениям, внутри петли должны существовать предельные циклы на плоскости Θ , C , т. е. температура и концентрация на поверхности будут колебаться во времени.

Поскольку параметры τ^* и Θ зависят от числа M_∞ (см. (6) и (9)), то, исключив M_∞ из последних, можно перейти к плоскости параметров τ , M_∞ . Из рис. 2 видно, что области неоднозначности и неустойчивости довольно ограничены по числу Маха и времени пребывания τ . Отметим, что параметр тепловода вошел как масштаб в обе координаты, так что при увеличении тепловода числа τ и M_∞ также возрастают. В отличие



от первого рисунка на втором для заданного τ наблюдается при изменении числа Маха две области неустойчивости и неединственности стационарных состояний: в дозвуковой и сверхзвуковой

Рис. 3. Линии неустойчивости $\sigma=0$ (1) и неоднозначности $\Delta=0$ (2) стационарных состояний на плоскости параметров, характеризующих скорость и температуру набегающего потока при фиксированных $Le^*=0,3$, $\phi=0,2$, $\tau=10^5$.

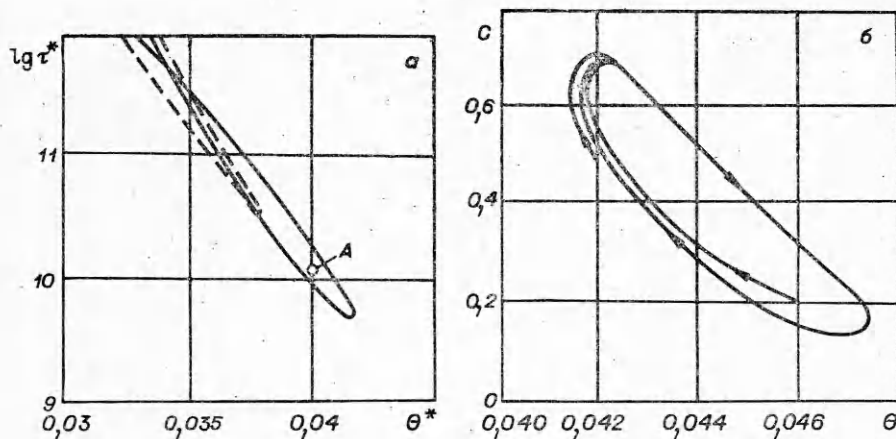


Рис. 4. Пример автоколебательного режима гетерогенного горения; $Le^* = 0,34$, $Le = 0,7$, $\bar{\alpha} = 1,6$.

областях. Расчет показывает, что вариация параметров Le^* и ϑ приводит к существенному изменению кривых $\sigma = 0$, $\Delta = 0$ на плоскостях τ^* , Θ^* и τ , M_∞ . Так, при $Le^* = 1$ петля в кривой $\sigma = 0$ исчезает, а сама линия «входит» внутрь кривой $\Delta = 0$. Это означает, что неседловая неустойчивость отсутствует, возможна неустойчивость только типа седла.

Для более полного представления о границах областей неустойчивых и неоднозначных стационарных состояний на рис. 3 построены линии $\sigma = 0$ и $\Delta = 0$ на плоскости Θ_∞ , M_∞ . Оказалось, что область автоколебательных решений ($\Delta > 0$, $\sigma < 0$) существенно больше области неединственности решений.

Как уже отмечалось, автоколебания можно получить лишь при численном решении нелинейной нестационарной системы (3). Пример такого решения показан на рис. 4, а, для которого значения параметров τ^* , ϑ^* , Θ^* и Le^* выбраны таким образом, чтобы выполнялись неравенства $\Delta > 0$, $\sigma < 0$, т. е. так, чтобы на плоскости τ^* , Θ^* соответствующая точка попала внутрь петли. Результат решения приведен на рис. 4, б в виде фазовой траектории, соответствующей точке А и полученной исключением времени из уравнений (3). Все фазовые траектории, различающиеся начальными значениями Θ и C , «наматываются» на предельный цикл.

Интересно поведение стационарных значений температуры поверхности в зависимости от внешнего параметра, например скорости или температуры потока (рис. 5—7). Линии эти имеют сложный вид. Их характер определяется тем, в какой области они лежат относительно линий $\Delta = 0$ и $\sigma = 0$. На кривых $\Theta_s(M_\infty)$ возможен двойной гистерезис и «изолю». Снижение отвода тепла охладителем в рассмотренном на рис. 6 примере приводит к существенному изменению картины стационарных состояний. При малом значении коэффициента теплоотвода ($\bar{\alpha} = 0,77$) температура поверхности монотонно повышается с ростом числа Маха, оставаясь устойчивой. В этом случае для $0,2 < M_\infty < 0,9$ наблюдаются неоднозначные состояния температуры поверхности.

Большому теплоотводу ($\bar{\alpha} = 1,96$) соответствует гистерезисный характер изменения температуры в дозвуковой области ($0,06 < M_\infty < 0,3$) и автоколебательный в сверхзвуковой области течения ($1,8 < M_\infty < 2$). При этом температура поверхности имеет значения существенно ниже, чем в случае $\bar{\alpha} = 0,77$. Из физических соображений ясно, что температура поверхности должна быть тем выше, чем больше температура потока и чем больше концентрация реагирующего вещества C_∞ . При этом, как видно из рис. 7, также возможна неоднозначность и неустойчивость стационарных состояний.

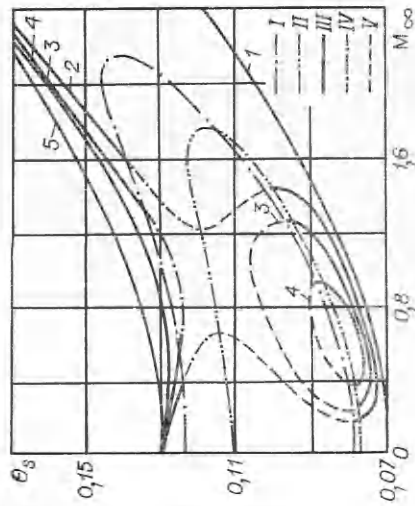


Рис. 5. Зависимость стационарной температуры поверхности от скорости набегающего потока. $Le^* = 0,3$, $Le = 0,7$, $\alpha = 1,96$, $\Theta_\infty = 0,07$, $\phi = 0,2$ для значений τ :

1 — $0,2 - 10^{2,15}$, 2 — $10^{2,2}$, 3 — $10^{2,3}$, 4 — $10^{2,35}$, 5 — ∞ . I — граница неустойчивых и II — неподвижных стационарных состояний; III — устойчивые и IV — неустойчивые стационарные состояния; V — седла.

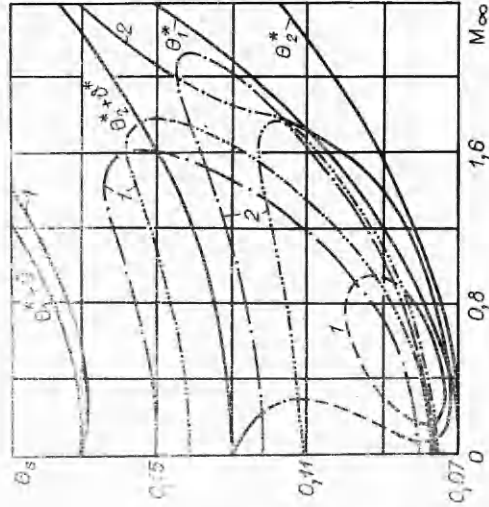


Рис. 6. Зависимость стационарной температуры поверхности от скорости набегающего потока для $\alpha = 0,77$ (I) и $1,96$ (II); $Le^* = 0,5$, $Le = 0,7$, $\phi = 0,2$, $\Theta_\infty = 0,07$, $\tau = 10^{3,7}$ (обозначения см. на рис. 5).

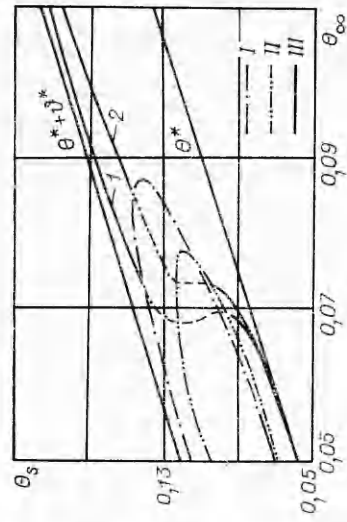


Рис. 7. Зависимость стационарной температуры поверхности от температуры набегающего потока для C_∞ , равного $1,0$ (I) и $0,8$ (2); $Le^* = 0,3$, $\phi = 0,2$, $\tau = 10^{3,7}$.

I — области неустойчивых стационарных состояний, II — седла, III — устойчивые стационарные состояния.

Отметим в заключение, что учет теплообмена излучением, вдува через поверхность и нелинейного отвода тепла в тело существенно изменит всю картину тепломассообмена при тех же параметрах задачи. В этом случае система (3) формально не изменится, появятся лишь дополнительные безразмерные критерии во введенных ранее обобщенных параметрах Θ^* , τ^* , ϑ^* и Le^* .

Поступила в редакцию
23/IV 1979

ЛИТЕРАТУРА

1. Д. А. Франк-Каменецкий. Диффузия и теплопередача в химической кинетике. М., Наука, 1967.
2. В. Главачек. Неединственные и автоколебательные режимы в каталитических химических процессах (препринт). Минск, ИТМО им. А. В. Лыкова АН БССР, 1977.
3. Б. В. Вольтер, Н. Е. Сальников. Устойчивость режимов работы химических реакторов. М., Химия, 1972.
4. Л. Ю. Артюх, Л. А. Вулис, В. П. Кашкаров. ИФЖ, 1961, IV, 3.
5. Рознер.— В сб.: Газодинамика и теплообмен при наличии химических реакций. М., ИЛ, 1962.
6. В. М. Агранат, А. М. Гришин. ПММ, 1978, 42, 6.
7. М. Н. Баутич, Е. Е. Леонтович. Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости. М., Наука, 1976.
8. Г. Шлихтинг. Теория пограничного слоя. М., Мир, 1975.
9. D. Meksyn. New methods in laminar boundary layer theory. Pergamon Press, 1961.
10. В. И. Резников, Ю. Н. Смыслов. ПМТФ, 1964, 1.
11. А. В. Лыков. Тепломассообмен. Справочник. М., Энергия, 1978, с. 262.

О МЕХАНИЗМЕ ИОНИЗАЦИИ В ПЛАМЕНАХ ЭТИЛЕНА — ЗАКИСИ АЗОТА

Е. Л. Давидчук, В. М. Мальцев, А. С. Рогачев
(Москва)

Для некоторых классов твердых топлив основными компонентами пламени являются углеводороды и окислы азота. Изучение процессов горения углеводородов с окислами азота можно проводить на модельных пламенах предварительно перемешанных газов. Этот метод позволяет исследовать стадийные превращения реагентов пламен в продукты. Наличие ионизированных частиц в пламенах — один из показателей радикальной природы процессов горения. Измерения распределений концентраций заряженных частиц по высоте пламен могут указать зоны интенсивных химических реакций и выяснить некоторые детали механизма горения в этих пламенах.

В работе с помощью одиночного электростатического зонда исследованы процессы ионизации в плоских пламенах предварительно перемешанных газов C_2H_2 — воздух, C_2H_4 — N_2O и H_2 — N_2O .

Вакуумная горелка плоского пламени. Для получения достаточно протяженных плоских газовых пламен сконструирована установка, показанная на рис. 1, а. Горючее и окислитель из баллонов 12 через демпфирующие резиновые мешки 16 и смеситель 1 поступили в горелку 3. Скорость подачи горючего и окислителя регулировалась вентилями 2 и измерялась расходомерами 15. Горелка представляет собой полый цилиндр с водяной рубашкой охлаждения, внутри которого находится 10—15 слоев сеток (все детали горелки изготовлены из нержавеющей стали). В нижнее основание горелки вварена трубка для ввода горючей