

**ГИДРОДИНАМИКА И ДИФФУЗИЯ ПРИМЕСИ
В ЯЧЕЙКЕ ДВУХФАЗНОЙ СРЕДЫ****П. К. Волков, П. И. Гешев**Институт теплофизики СО РАН,
630090 Новосибирск*

В барботажных аппаратах при продувании газа через перфорированную мембрану образуется двухфазная смесь жидкости с пузырями газа. Скорость всплытия пузырей отличается от скорости одиночного пузыря такого же размера, а картина течения существенно зависит от расстояния между ними. Теоретическое и экспериментальное исследование динамических свойств смеси представляет значительные трудности. Неоднократно предпринимались попытки описания двухфазной среды с помощью выделения некоторой ячейки жидкости, содержащей газовый пузырь или частичку. В силу сложности задачи, как правило, ограничивались сферической ячейкой, сферической формой пузыря, безотрывным стоксовым течением жидкости около пузыря. На границе ячейки ставились условия обращения в нуль потока массы, энергии, импульса. Из этих условий определяли радиус ячейки и эффективную скорость всплытия пузырей [1]. Очевидно, что при таком подходе на самом деле не учитывается реальное взаимодействие пузырей в смеси, поскольку они всплывают вследствие перетока жидкости за пузырь, а значит, имеется поток массы через ячейку.

Основная трудность при теоретическом моделировании состоит в выборе геометрии ячейки и постановке краевых условий на внешней границе ее, учитывающих взаимодействие пузырей с несущей средой и между собой. При этом, как правило, процесс слияния или дробления пузырей не учитывается.

Физическая постановка задачи. Рассмотрим смесь жидкости с пузырями газа одного объема V , расположенными слоями. Расстояние между слоями задается величиной $2l$. Распределение пузырей в слоях таково, что если провести вертикальную прямую через центр какого-нибудь пузыря, то получится цепочка нанизанных пузырей. Пузыри в слое равномерно расположены и образуют гексагональную упаковку, когда каждый пузырь окружен шестью другими такого же размера. Расстояние между центрами их дает еще один геометрический параметр $2R_k$. В этом случае в качестве элементарной ячейки двухфазной среды, содержащей внутри один пузырь, естественно выбрать прямую призму с основанием в виде правильного шестиугольника. Очевидно, что такие ячейки заполняют всю область течения. Таким образом, геометрические характеристики ячейки — высота призмы и сторона основания. Данная модель дает нижнюю оценку для скорости всплытия пузырей, поскольку при любом другом расположении их (чуть выше и чуть ниже слоя) переток жидкости через пузырь сверху вниз, в результате которого и происходит всплытие, будет более легким.

Перейдем к обсуждению краевых условий на внешней границе ячейки. Очевидно, что в силу выбора ячейки на верхнем и нижнем основании призмы характеристики должны быть одними и теми же. Через боковую поверхность нет перетоков и касательного напряжения, т. е. эта поверхность

* Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 95-01-00879а).

является «свободной». Таким образом, все поле течения можно представить как совокупность одинаковых равноправных ячеек жидкости с пузырьком газа внутри, что, конечно, в точности не реализуется, поскольку пузыри при всплытии на достаточно большом расстоянии увеличивают свой объем. Однако для системы пузырей толщиной h , расположенных далеко под свободной поверхностью, когда изменение гидростатического давления мало по сравнению с давлением «на уровне слоя», увеличение объема пузыря небольшое, и, следовательно, это приближение будет хорошим. В системе координат, связанной с центром масс какого-нибудь пузыря, жидкость обтекает его; на боковой поверхности равна нулю нормальная компонента скорости. Последнее недостающее условие получается из равенства нулю касательных напряжений на границе ячейки. Теперь для описания динамики всей системы пузырей достаточно рассмотреть задачу обтекания одного пузыря в ячейке с соответствующими условиями периодичности на верхнем и нижнем основании, непротекания и отсутствия трения на боковой поверхности. Следует отметить, что эта стационарная задача обтекания может быть решена точно. Степень соответствия ее решений с решениями исходной задачи определяется оговоренными выше предположениями о росте пузыря по мере его всплытия.

Наконец, сделаем последнее допущение, сводящее задачу к осесимметричной. При численных решениях будем использовать ячейку цилиндрической формы с радиусом основания R_k . Степень корректности этого предположения оценить трудно. По сути, происходит «снос» краевых условий с боковой поверхности правильной призмы на боковую поверхность вписанного цилиндра. Такие процедуры сноса краевых условий на некоторую известную линию или поверхность часто используются при получении различных приближенных моделей.

Математическая формулировка задачи. В качестве математической модели используем уравнения Навье — Стокса, которые в применении к задаче обтекания газовой полости выписаны вместе с краевыми условиями в [2]. Учитывая, что алгоритм решения аналогичен [3], где описана процедура реализации условий периодичности, здесь выпишем только краевые условия на боковой границе ячейки.

Условие непротекания в терминах функции тока ψ дает постоянное ее значение. Величина этой константы определяется из следующих соображений: в системе координат неподвижной жидкости на боковой поверхности $\psi = 0$, так как нет суммарного расхода жидкости через сечение, где нет пузыря. В системе координат пузыря на поле течения наложено поступательное движение жидкости со скоростью U , которое в сферических координатах (r, θ) описывается функцией $\psi = -Ur^2 \sin^2 \theta / 2$. Поскольку уравнение поверхности $r = R_k / \sin \theta$, то функция тока

$$\psi = -UR_k^2/2. \quad (1)$$

Из равенства нулю касательных напряжений с учетом (1) можно вывести условие для вихря ω , которое по виду совпадает с выражением для ω на свободной поверхности пузыря [2], где под $R(\theta)$ следует понимать функцию боковой поверхности. Таким образом, на боковой поверхности ячейки получены «хорошие» условия для исходных функций, и реализация их в рамках вычислительного алгоритма [3] не представляет трудностей. Но одно замечание все-таки необходимо сделать. Поскольку граница ячейки имеет углы, то функция, описывающая ее в сферической системе координат, не будет гладкой: первая и вторая производные имеют скачки в точках углов. Это обстоятельство накладывает дополнительные ограничения на вычислительную процедуру в связи с ухудшением точности конечно-разностной аппроксимации уравнений Навье — Стокса, записан-

ных в криволинейной системе координат.

Простейшим способом избежания указанных неприятностей является увеличение числа расчетных точек в области течения. В данной работе использовалась равномерная сетка с 50 узлами по углу θ и с 61 узлом по переменной r . Однако для некоторых геометрий ячеек этого оказывалось недостаточно. Контроль точности проводился на основе тестовых расчетов с изменением итерационных параметров и сравнения результатов по обтеканию цепочек пузырей и одиночных.

Анализ размерностей. Как и в [2-4], в качестве гидродинамических независимых безразмерных параметров здесь используются числа Рейнольдса $Re = U2a/\nu$ и Вебера $We = \rho U^2 2a/\sigma$, где $a = (3V/4\pi)^{1/3}$; ν, ρ, σ — соответственно кинематическая вязкость, плотность и поверхностное натяжение жидкости. В данной работе к ним добавляется еще два независимых геометрических параметра: l и R_k .

Рассмотрим предельные случаи малых и больших R_k . Когда R_k велико, практически нет взаимодействия пузырей в слое, т. е. имеем одну цепочку одинаковых пузырей. При малых R_k гидродинамика полностью определяется этим взаимодействием. Для того чтобы сравнение было корректным (значения Re и We еще не определяют среду, а число Фруда $Fr = U^2/ga$ является определяемым параметром), данные приводятся для таких Re и We , которые соответствуют одним и тем же значениям $M = \rho^3 \nu^4 g / \sigma^3 = We^3 / Re^4 Fr$ и $R_\sigma = a/\delta_\sigma$, отвечающим конкретной среде и размеру пузыря a ($\delta_\sigma = (\sigma/\rho g)^{1/2}$ — капиллярная постоянная) [4].

Коэффициент сопротивления C_d обычно определяется как отношение силы сопротивления к динамическому напору. В данном случае, поскольку для стационарного всплытия пузыря сила сопротивления равна архимедовой, имеем $C_d = \frac{\rho V g}{(1/2)\rho u^2 \pi a^2} = \frac{8}{3Fr}$, и нахождение \bar{Fr} эквивалентно вычислению C_d .

Результаты расчетов. При заданных значениях параметров Re , We , l , R_k по алгоритму [3] находятся форма пузыря, функции течения ψ , ω , определяемый параметр Fr , несущий полную информацию о скорости всплытия. Из условия на нормальные напряжения при $We = 0$ имеем сферический пузырь с $R \equiv 2$. С увеличением We пузырь изменяет форму, но объем его V остается неизменным.

В таблице представлены рассчитанные значения Fr для разных l , отвечающие среде с $M \simeq 0,000002$ и $R_\sigma \simeq 1$ ($a \simeq \delta_\sigma$). Второй столбец отвечает большим R_k — одиночной цепочке пузырей, третий — модели ячейки с $R_k = 3$; это соответствует плотной упаковке пузырей в слое, когда площадь сечения пузыря составляет более 1/2 от сечения ячейки с учетом его деформации.

Расчеты для $l = 20$ (цепочка, $Re = 100$, $We = 6,64$) отвечают случаю одиночного пузыря, когда влияние на всплытие от соседних пузырей несущий

l	$Fr_{ц}$	$Fr_{я}$	$\bar{J}_{ц}$	$\bar{J}_{я}$	$Nu_{ц}/Nu_{я}$
3	4,83	0,53	18	29,3	1,068
6	4,0	0,5	0,5+16,7+0,8	1,1+26,1+2,1	1,076
			18	28,2	
9	3,37	0,45	17,8+0,2	27,8+0,4	1,08
			19	28,3	
20	2,73	0,43	18,9+0,1	28,2+0,1	1,08
			20,3	29,8	
				29,3+0,5	

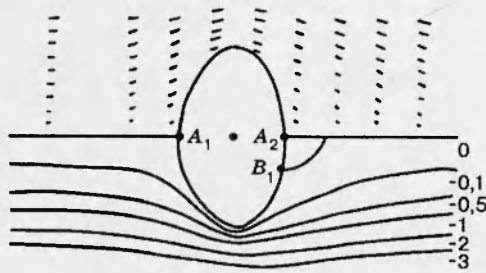


Рис. 1

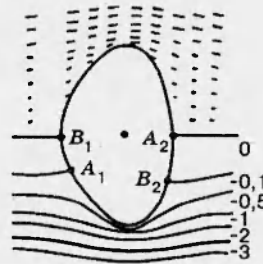


Рис. 2

ществено. По значениям Fr имеется хорошее количественное совпадение с [3], где приведены изолинии Fr . Сравнение по Fr с расчетами одиночного пузыря [4] несколько хуже. На карте режимов течений это точка, которая лежит на границе области образования вихревого следа за пузырем, когда появление его приводит к колебаниям поверхности и нестационарному всплытию по винтовой линии. Поэтому в данной области имеется довольно большой разброс экспериментальных результатов.

Обтекание около пузыря безотрывное и похоже на картину рис. 1 (сплошные линии — изолинии функции тока, черточки — векторы скорости по сечениям), где изображено течение для $l = 6$ ($Re = 100$, $We = 8,88$). Здесь уже имеется небольшая застойная зона за пузырем и возросла скорость всплытия. (При $l = 9$ ($Re = 100$, $We = 7,68$) застойная зона еще меньше, и существенных изменений в течении нет.)

На рис. 2 показано течение для $l = 3$ ($Re = 120$, $We = 10,5$). Качественно изменилась структура течения: между пузырями у оси цепочки имеется застойная зона, хотя по сравнению с $l = 6$ значение скорости всплытия (пропорциональное корню из Fr) возросло менее чем на 10%. Профиль скорости в сечениях монотонно и достаточно быстро растет от некоторой величины на пузыре до единицы.

Расчеты для модели ячейки дают значения Fr , почти на порядок меньшие, чем для цепочки. Следовательно, скорость всплытия цепочки почти в 2,5 раза больше при $l = 20$ и в 3 раза при $l = 3$. Кстати, здесь можно проверить правильность отыскания Fr : отношение значений Fr равно отношению квадратов скоростей всплытия и, поскольку данные отвечают одной среде и размеру пузыря, должно быть равно отношению квадратов Re . В этом случае наибольшее различие отношений при $l = 6$ ($\sim 11\%$), при $l = 9$ меньше ($\sim 7\%$), а при $l = 3$ и 20 отношения совпадают. Учитывая, что сами табличные данные с точностью 5–7% соответствуют $M = 2 \cdot 10^{-6}$, сравнение можно признать хорошим.

Существенно различаются и картины течений. Так, при $l = 20$ ($Re = 40$, $We = 1,1$) имеется застойная зона длиной примерно в диаметр пузыря. Структура течения здесь (и для $l = 9$) такая же, как и на рис. 3, отвечающем $l = 6$ при тех же Re и We . Сравнение длин векторов скорости для цепочки пузырей и в ячейке показывает существенное увеличение их между пузырями в слое. Однако это отличие кажущееся, поскольку обезразмеривание проведено по скорости всплытия. Чтобы выяснить, действительно ли произошло увеличе-

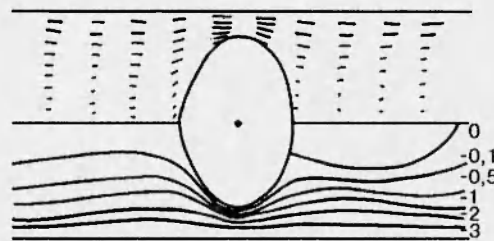


Рис. 3

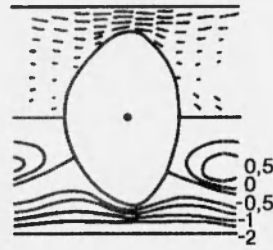


Рис. 4

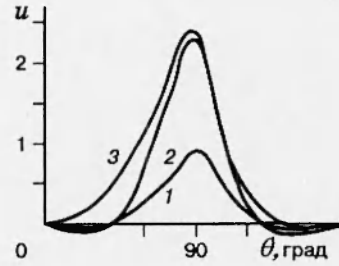


Рис. 5

ние скорости, надо значения скорости умножить на отношение скоростей всплытия пузыря в ячейке и в цепочке. Прямые измерения и пересчет дают значения, на $\sim 10\%$ меньшие на границе ячейки между пузырями и существенно меньшие по мере удаления к основаниям ячейки.

На рис. 4 показана картина течения для $l = 3$ ($Re = 40$, $We = 1,28$). Между пузырями имеется довольно развитое вторичное течение. В целом скорость всплытия, как и следует ожидать, несильно зависит от расстояния между слоями пузырей, поскольку переток жидкости существенно ограничен. Наличие развитой застойной зоны при меньшей скорости всплытия по сравнению с цепочкой пузырей объясняется просто: в случае ячейки имеется существенно большая неравномерность в скорости жидкости около пузыря как в области между пузырями в слое, так и вдоль поверхности пузыря.

На рис. 5 представлены графики касательной к пузырю компоненты скорости u , кривые 1–3 отвечают рис. 2, 4 и 3. Так, максимальная величина u изменяется в пределах 10% . В случае цепочки пузырей она составляла от 0,89 до 0,94, а для ячейки — от 2,35 до 2,6. В области лобовых точек скорость мала, с уменьшением l происходит сжатие графика (кривые 2 и 3 на рис. 5) с переходом значений в отрицательную область при появлении застойных зон.

Диффузия газа из пузыря в жидкость. Имея рассчитанные поле функции тока, форму пузыря, структуру поля течения, точки отрыва на пузыре, можно решить задачу о диффузии примеси при заданном течении. Коэффициенты диффузии молекул растворенных в жидкости газов очень малы. Для диффузии молекул кислорода в воде $D \sim 10^{-9} \text{ м}^2/\text{с}$. С увеличением вязкости жидкости коэффициенты диффузии уменьшаются обратно пропорционально росту коэффициента вязкости и могут стать еще на 2–3 порядка меньше. Это показывает, что диффузионное число Пекле имеет очень большие значения ($Pe = Ud/D \sim 10^5 \div 10^8$, $d = 2a$). Следовательно, на поверхности пузыря образуется тонкий диффузионный пограничный слой толщиной порядка $\delta_D \sim d/\sqrt{Pe}$. В нем концентрация растворяющегося газа C будет резко изменяться от равновесной на поверхности пузыря C_0 до концентрации газа в объеме жидкости C_1 .

Уравнение, описывающее в приближении пограничного слоя процесс диффузии, имеет вид

$$\frac{\partial C}{\partial t} + u \frac{\partial C}{\partial x} + v \frac{\partial C}{\partial y} = D \frac{\partial^2 C}{\partial y^2}, \quad (2)$$

граничные условия следующие:

$$C = C_0 \text{ при } y = 0, \quad C \rightarrow C_1 \text{ при } y \rightarrow \infty.$$

В уравнении (2) введены скорость u и координата x вдоль свободной поверхности, v и y перпендикулярны к ним. Скорости v и u связаны

уравнением неразрывности, записанным в новых координатах:

$$\frac{\partial(Ru)}{\partial x} + \frac{\partial(Rv)}{\partial y} = 0$$

($R(x)$ — расстояние от точки на поверхности пузыря до его оси вращения).
Для v имеем

$$v = -\frac{y}{R} \frac{\partial(Ru)}{\partial x}.$$

Для широкого класса диффузионных задач со свободной поверхностью существует автомодельное решение, использованное ранее для волновых пленок в [5, 6], для пузырей и капель в [7, 8]:

$$\frac{C_1 - C_0}{C_1 - C_0} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\eta e^{-\eta^2} d\eta, \quad \eta = y/\delta(x, t).$$

Здесь толщина пограничного слоя δ удовлетворяет уравнению

$$(\delta^2)'_t + u(\delta^2)'_x + 2 \frac{(uR)'_x}{R} \delta^2 = 4D \quad (3)$$

с начальным условием

$$\delta|_{t=0} = 0. \quad (4)$$

Полное решение нестационарной задачи (3), (4) может быть получено методом характеристик [6]. В данной работе детально рассчитано лишь стационарное решение уравнения (3), являющееся промежуточной асимптотикой, справедливой для определенного интервала времени. Для корректной оценки этого интервала времени рассмотрим структуру решения полной задачи в окрестности двух типов точек:

а) с приходящей разделяющей линией тока (точки A_1, A_2 на рис. 1); в точках A_1 и A_2 скорость u обращается в нуль, и решение для них имеет вид

$$\delta^2 = \frac{2D}{\alpha} (1 - e^{-2\alpha t}), \quad (5)$$

где $\alpha = \frac{(uR)'_x}{R} \sim \frac{U}{a}$ — скорость деформирования жидкости в окрестности точек натекания. За характерное время $t_1 = d/U$, как видно из формулы (5), толщина диффузионного пограничного слоя станет стационарной ($\delta \sim \sqrt{2Dd/U}$);

б) с уходящей линией тока (точки B_1, B_2 на рис. 2); для оценки времени выхода пограничного слоя из точек с отходящими линиями тока (типа B) следует учесть конечную толщину диффузионного пограничного слоя, имеющую порядок $\delta_D \sim d/\sqrt{Pe}$. Только благодаря тому, что толщина δ_D ненулевая, часть жидкости, насыщенная продиффундировавшим в нее газом, может преодолеть точки типа B , в окрестности которых поверхностная скорость убывает до нуля по закону $u(x) \sim xU/d$. Время на преодоление окрестности точки B с размером r_0 частичкой жидкости, «плывущей» вдоль линии тока и вначале находящейся на расстоянии $\delta_D = d/\sqrt{Pe}$ от свободной поверхности, определяется интегралом

$$t_2 = \int_{r_0}^{\delta} \frac{dx}{u(x)} \sim \frac{d}{U} \ln(Pe).$$

После прохождения точек типа B за время порядка t_2 жидким частицам потребуется еще время $t_3 \sim l/U$ на преодоление расстояния между пузырями. Только после этого на поверхность пузырей попадут жидкие частички с повышенной концентрацией растворенных газов, что вызовет падение локальных и интегральных потоков массы. Поэтому рассчитанное далее стационарное решение есть некая промежуточная асимптотика, справедливая для интервала времени

$$d/U < t < \ln(\text{Pe}) d/U + l/U. \quad (6)$$

Так как Pe велико, период времени (6) существования промежуточного стационарного массообмена может быть значительным.

Перейдем к выводу формул для стационарного решения. Уравнение (6) принимает вид

$$(\delta^2)'_x + 2 \frac{(uR)'_x}{uR} \delta^2 = \frac{4D}{u}. \quad (7)$$

Координату x будем отсчитывать от точки приходящей линии тока. Тогда решение уравнения (7) есть

$$\begin{aligned} \delta^2 &= \exp \left(-2 \int_0^x \frac{(uR)'_x}{uR} dx \right) \int_0^x \exp \left(2 \int \frac{(uR)'_x}{uR} dx \right) \frac{4D}{u} dx = \\ &= \frac{4D}{u(x)R(x)} \int_0^x R^2 u dx. \end{aligned} \quad (8)$$

Локальный поток массы определяется выражением

$$j(x) = \frac{2D\Delta C}{\sqrt{\pi\delta(x)}}. \quad (9)$$

Общий поток массы получается интегрированием выражения (9) по всем участкам между точками типа A и B . Таких участков может быть один (когда обтекание безотрывное), два (рис. 1, 3) или три (рис. 2, 4). Поток массы на отдельном участке свободной поверхности между точками типа A и B вычисляется в виде интеграла

$$J = \int_0^{x_B} j(x) 2\pi R(x) dx = 4\sqrt{\pi D} \Delta C \left(\int_0^{x_B} R^2 u dx \right)^{1/2}. \quad (10)$$

Интенсивность диффузионного потока определяется числом Нуссельта Nu и рассчитывается с учетом безразмеривания по формуле

$$\text{Nu} = J/2aD\Delta C = \sqrt{2aU/D} \bar{J} = \sqrt{\text{Pe}} \bar{J}, \quad (11)$$

где \bar{J} — безразмерный поток массы.

Собственно формула (11) мало что дает, поскольку безразмерный параметр Pe содержит определяемую по своей сути величину U . В данной работе ставится цель сравнить диффузионные потоки от пузыря одного размера в заданной жидкости при различных геометрических параметрах задачи. Естественной характеристикой для этого является отношение чисел Нуссельта:

$$\text{Nu}_n/\text{Nu}_\alpha = \sqrt{U_n/U_\alpha} \bar{J}_n/\bar{J}_\alpha = \sqrt[4]{\text{Fr}_n/\text{Fr}_\alpha} \bar{J}_n/\bar{J}_\alpha. \quad (12)$$

Формула (12) содержит отношение безразмерных диффузионных потоков \bar{J} и отношение определяемых гидродинамических параметров Fr . Теперь, имея рассчитанные значения \bar{J} и Fr , можно исследовать влияние гидродинамики течения на интенсивность диффузии газа из пузыря. В таблице приведены значения общего диффузионного потока и его слагаемых по участкам свободной поверхности для решенных гидродинамических задач, а также отношение чисел Нуссельта для пузыря в цепочке и в ячейке.

Результаты таблицы довольно неожиданны: при одном и том же объеме пузыря (в одной и той же жидкости) диффузия газа из пузыря в жидкость практически не зависит от расстояния l . Это в общем объяснимо, если посмотреть структуру диффузионного потока: наибольший вклад дает область экватора пузыря, где касательная скорость u имеет максимум (рис. 5).

На рис. 6 представлены графики функции локального диффузионного потока $\bar{j}(\theta)$. Здесь кривые 1–3 соответствуют

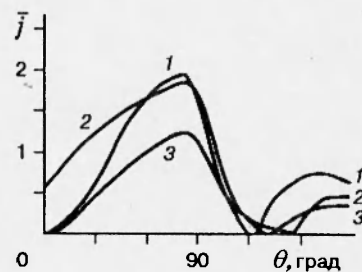


Рис. 6

рис. 4, 3, 2. Прослеживается четкая корреляция между $u(\theta)$ и $\bar{j}(\theta)$. Причем $\bar{j}(\theta)$ на передней части пузыря, где происходит натекание жидкости, больше, чем на задней, где жидкость тормозится, за исключением области кормовой точки, когда имеется отрывная зона.

Еще более неожиданными оказываются данные в последнем столбце таблицы. Отношение диффузионных потоков для пузыря в цепочке и в ячейке примерно постоянно. Суммарный поток в случае цепочки всего на 7–8% больше, чем в ячейке. Учитывая точность расчета Fr , данные таблицы, точность вычисления \bar{J} по (10), можно с большей уверенностью говорить о практически равных диффузионных потоках, чем о преимуществе какого-либо типа течения. Отсюда следует вывод, что наиболее интенсивным в некотором объеме жидкости процесс диффузии будет тогда, когда за время Δt через слой жидкости толщиной h всплывет максимально возможное количество пузырей заданного размера. Можно ожидать, что это заключение будет верно не только для малых интервалов времени Δt , для которых справедливо стационарное решение согласно оценке (6), но и для больших времен, на которых начнется нестационарное взаимодействие диффузионных пограничных слоев соседних пузырей.

Выводы. Полученные численные решения по модели ячейки хорошо согласуются с предыдущими расчетами по моделированию всплытия цепочек и одиночных пузырей. Это означает, что условия периодичности и условия на внешней границе ячейки в целом достаточно верно отражают реальное взаимодействие пузырей в газожидкостной среде. Рассмотренная задача близка к случаю всплытия пузыря в трубе с покоящейся жидкостью [9]. Различие состоит в том, что в [9] ставилось условие прилипания на стенке трубы, тормозящее жидкость до нулевой скорости, а в данной работе — условие отсутствия трения на границе ячейки. Поэтому в [9] жидкость перетекала струей вблизи пузыря, а здесь — струей вблизи стенки ячейки.

Результаты серии расчетов, проведенных для пузырей одного размера в жидкости с $M \approx 2 \cdot 10^{-6}$, показывают, что интенсификацию процесса диффузии газа в жидкость следует искать на пути изменения размеров пузырей в двухфазной среде. Можно надеяться, что и в средах с другими M выводы работы останутся справедливыми. В самом деле, не должно быть существенных изменений в системе, если движущая сила (архимедо-

ва) остается неизменной, а на границах касательные напряжения равны нулю, либо выполняются условия периодичности. Ситуация может измениться, если термокапиллярные или концентрационно-капиллярные силы на поверхности пузыря окажутся преобладающими.

Выводы предыдущего пункта остаются справедливыми и для процесса распространения тепла, которое также описывается уравнением типа (2) с решением вида (8), (10). Однако для применения этого решения необходимы очень большие тепловые числа Пекле.

ЛИТЕРАТУРА

1. Протоdjяконов И. О., Люблинская И. Е. Гидродинамика и массообмен в системах газ — жидкость. Л.: Наука, 1990.
2. Christov С. I., Volkov P. K. Numerical investigation of the steady viscous flow past a stationary deformable bubble // J. Fluid Mech. 1985. V. 158. P. 341–364.
3. Волков П. К. Движение цепочки пузырьков в вертикальном канале с вязкой жидкостью // ПМТФ. 1991. № 3. С. 87–91.
4. Волков П. К. Гидродинамика всплывающих пузырей и капель // Инж.-физ. журн. 1994. Т. 66, № 1. С. 93–123.
5. Ruckenstein E., Verbente С. Mass transfer to falling liquid film at low Reynolds numbers // Int. J. Heat Mass Transfer. 1968. V. 11, N 4. P. 743–753.
6. Гешев П. И., Лапин А. М. Диффузия слабо растворимого газа в стекающих волновых пленках жидкости // ПМТФ. 1983. № 6. С. 106–112.
7. Chao В. Т. Transient mass and heat transfer to translating droplet // Trans. ASME. Ser. C. J. Heat Transfer. 1969. V. 91, N 2. P. 273–281.
8. Гупало Ю. П., Полянин А. Д., Рязанцев Ю. С. Массотеплообмен реагирующих частиц с потоком. М.: Наука, 1985.
9. Волков П. К. Всплывание газового пузыря в трубе, заполненной вязкой жидкостью // ПМТФ. 1989. № 6. С. 98–105.

*Поступила в редакцию 16/XII 1994 г.,
в окончательном варианте — 28/XII 1994 г.*