

ровать лишь вторые производные от перемещений. На втором фронте отличны от нуля перемещения и деформации.

Таким образом, рассмотренная модель показывает, что измерение скоростей акустических волн в микро неоднородных средах — весьма нетривиальная задача. Неустойчивая регистрация скоростей волн в диапазоне от $c(1 - \alpha)$ до c (по данным [5] величина α может для высокопористых тел достигать 0,1—0,15 и более) вполне может привести к кажущемуся эффекту появления отрицательных коэффициентов Пуассона, даже если статические измерения этого не подтверждают. Неустойчивость скорости фронта от вида приложенного воздействия может объяснить тот парадоксальный факт, что скорость волн в таких средах зависит не только от самой среды, но и является в некотором смысле функцией экспериментальной установки.

ЛИТЕРАТУРА

1. Gregory A. R. Fluid saturation effect on dynamic elastic properties of sedimentary rocks. — *Geophysics*, 1976, v. 41.
2. Усманов Ф. А. Основы математического анализа геологических структур. Ташкент: Фан, 1977.
3. Жигов В. В., Козлов С. М. и др. Усреднение и G -сходимость дифференциальных операторов. — *УМН*, 1979, т. 34, № 5.
4. Бердичевский В. Л. Пространственное осреднение периодических структур. — *ДАН СССР*, 1975, т. 22, № 3.
5. Сибиряков Б. П. Упругие свойства пустых скелетов зернистых коллекторов. — *ПМТФ*, 1983, № 4.

Поступила 18/VII 1984 г.

УДК 534.112

ТЕРМОПАРАМЕТРИЧЕСКОЕ ВОЗБУЖДЕНИЕ ЦЕЛЫХ КОЛЕБАНИЙ СТРУНЫ

А. И. ПОТАПОВ, В. В. СТУПНИ

(Горький)

Многие тонкостенные элементы конструкций вынуждены работать в нестационарных температурных полях. В результате теплообмена с окружающей средой в них возникают пульсирующие термоупругие напряжения, которые могут приводить к динамической потере устойчивости [1]. Простейшей системой, в которой наблюдаются подобные эффекты, является металлическая струна с протекающим по ней переменным электрическим током [2]. Переменное температурное поле, возникающее за счет джоулевых потерь, вызывает периодическую модуляцию натяжения струны и при определенных условиях приводит к параметрическому возбуждению колебаний.

В данной работе экспериментально и теоретически исследован эффект возбуждения поперечных колебаний струны при протекании по ней переменного тока большой плотности. Принятая теоретическая модель позволяет с хорошей точностью рассчитать пороги параметрической неустойчивости, зависимость амплитуды установившихся колебаний от мощности протекающего тока и величины расстройки. В то же время она не предсказывает наличия жестких режимов возбуждения и срыва колебаний.

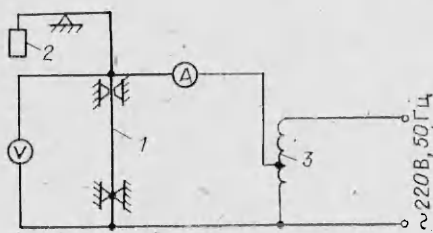
Эксперимент. При протекании по металлической струне переменного электрического тока промышленной частоты 50 Гц происходит ее нагрев за счет джоулевых потерь. Статическое удлинение проволоки, обусловленное повышением ее средней температуры, выбиралось под действием растягивающего груза N_0 , который задавал постоянную составляющую натяжения.

Схема экспериментальной установки показана на фиг. 1, где 1 — струна из высокоомной проволоки, 2 — груз, задающий постоянное натяжение, 3 — латр.

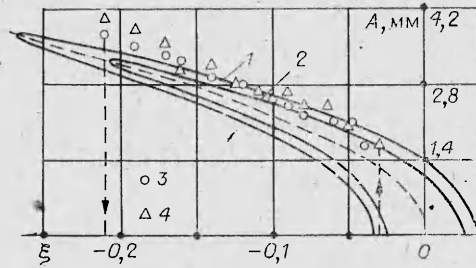
Сила протекающего тока I_0 и напряжение на рабочем участке измерялись амперметром (А) и вольтметром (В) класса точности 1,5. Температура проводника определялась промышленным пирометром «Проминь», обеспечивающим измерение температуры в диапазоне 1075—5273 К с погрешностью 1—1,5%. Амплитуда колебаний струны измерялась с помощью микрометра. Натяжение струны N_0 задавалось рычажным устройством и изменялось дискретно с помощью разновесок с шагом 10^{-3} Н. Это позволило достаточно плавно менять частоту свободных колебаний струны, которая вычислялась по формуле

$$\omega_n = \frac{\pi n}{l} \sqrt{\frac{N_0}{\rho S} [1 + \alpha_T (T_c - T_0)]},$$

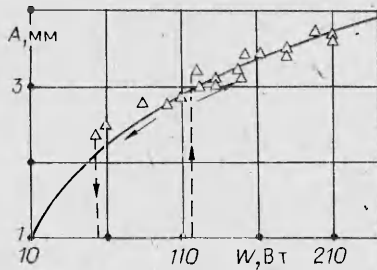
где n — номер формы колебаний; ρ — плотность; S — площадь поперечного сечения струны при температуре T_0 ; α_T — коэффициент линейного расширения; T_c , T_0 —



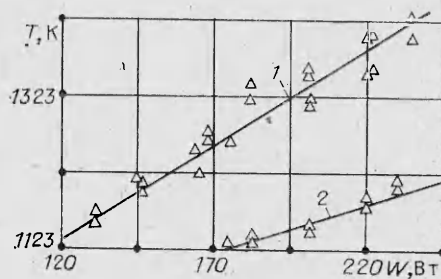
Ф и г. 1



Ф и г. 2



Ф и г. 3



Ф и г. 4

абсолютные температуры нагретой и холодной струн соответственно. Частота ω_n контролировалась стробоскопическим методом. В экспериментах наблюдалось термопараметрическое возбуждение первых девяти форм колебаний. Причем чем выше номер собственных колебаний, тем легче происходило возбуждение. Однако на высоких формах ($n \geq 4$) амплитуда колебаний была небольшой, что затрудняло ее измерение, а для возбуждения первой формы колебаний требовалось большое натяжение, приводящее к частым обрывам при нагревании струны. Поэтому большинство экспериментальных исследований проводилось на второй форме колебаний. В качестве струны использовались проволоки из высокоомных материалов (нихром, нейзильбер, константан и др.) диаметром $d = 0,1 - 0,5$ мм и длиной 1 м и более.

Ниже приведены экспериментальные результаты для нихромовой проволоки Х20Н80 диаметром $d = 0,35$ мм и длиной $l = 1$ м. На фиг. 2 представлена резонансная кривая $A = A(\xi)$, здесь же нанесены экспериментальные данные, показана зависимость амплитуды колебаний струны от величины расстройки $\xi = (\omega_n - \omega)/\omega$ при мощности протекающего тока $W_1 = 107$ Вт и $W_2 = 170$ Вт (точки 3, 4, $\omega = 100$ л).

Зависимость амплитуды установившихся колебаний от мощности протекающего тока показана на фиг. 3 (данные эксперимента обозначены треугольниками). На фиг. 4 приведены зависимости средней температуры T_c от мощности протекающего тока W в диапазоне 1123—1430 К в узлах (линия 1) и пучностях (линия 2) колеблющейся струны. Видно, что температура струны в узлах примерно на $150 - 200^\circ$ больше ее температуры в пучностях.

Теоретический расчет. Последовательный теоретический анализ термопараметрического возбуждения поперечных колебаний упругой токопроводящей струны возможен в рамках нелинейных динамических задач термоупругости [1], учитывающих взаимодействие между продольными и поперечными колебаниями струны [3], а также теплообмен нагретой струны с окружающей средой [4].

В качестве расчетной модели можно использовать следующую нелинейную краевую задачу:

$$(1) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - v_0^2 \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] = - \frac{\alpha_T K}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} (T - T_c);$$

$$(2) \quad \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - v_0^2 \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{\partial w}{\partial x} \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] \right\} + \delta_1 \frac{\partial w}{\partial t} + \delta_2 w^2 \frac{\partial w}{\partial t} = 0;$$

$$(3) \quad \frac{\partial T}{\partial t} = \chi \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{2\alpha}{c\rho r} (T - T_0) + \frac{2\varepsilon\sigma}{c\rho r} (T^4 - T_0^4) = \frac{W(t)}{lSc\rho} - \frac{\alpha_T T_c K}{\rho c} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t};$$

$$(4) \quad w|_{x=0} = w|_{x=l} = 0, \quad u|_{x=0} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=l} = \frac{N_0}{SE},$$

где $u(x, t)$, $w(x, t)$ — соответственно продольное и поперечное смещения струны; $v_0 = (E/\rho)^{1/2}$, $v_0 = (N_0/\rho)^{1/2}$ — скорости продольной и поперечной волн в струне;

E , K — модуль Юнга и коэффициент объемного сжатия материала струны*; T — абсолютное значение температуры струны; T_c — среднее значение температуры нагретой струны, $(T - T_c) \ll T_c$; $T_0 \approx 290$ К — температура окружающего воздуха; ρ — объемная плотность; δ_1 , δ_2 — коэффициенты линейного и нелинейного демпфирования; $\chi = \kappa/c$ — коэффициент температуропроводности; c — удельная теплоемкость материала; α — коэффициент теплоотдачи; r — радиус струны; $S = \pi r^2$ — площадь поперечного сечения струны; $\sigma = 5,6 \cdot 10^{-8}$ Вт/м²К⁴ — постоянная Стефана — Больцмана; $\varepsilon < 1$ — коэффициент серости; $W(t) = I_0 v_0 \cos^2 \omega t$ — мощность джоулевых потерь.

Первые два уравнения описывают связанные продольно-поперечные колебания упругой струны [3] с учетом температурных напряжений [1], а также линейного и нелинейного демпфирования для поперечных колебаний [5]. Уравнение (3) описывает неоднородное по толщине струны температурное поле при наличии конвективного теплообмена и теплообмена излучением с окружающим воздухом [4]. Слагаемые в правой части (3) определяют тепловыделение за счет джоулевых потерь и саморазогрев из-за переменных продольных деформаций. В данном уравнении не учитывается влияние поперечных колебаний струны на ее теплообмен с окружающим воздухом. Этот вопрос остается малоизученным теоретически и экспериментально. Лишь в отдельных работах (см., например, [6]) указывается, что поперечные колебания приводят к увеличению интенсивности конвективного теплообмена в несколько раз. Мы пренебрегаем также релаксационными процессами, отмеченными в [7].

В общем случае аналитическое решение нелинейной задачи (1)–(4) не представляется возможным. Введем ряд упрощений, следующих из рассмотрения конкретной экспериментальной ситуации. В уравнении теплопроводности можно пренебречь малым эффектом саморазогрева $\sim \partial^2 u / \partial x \partial t$ по сравнению с джоулевым тепловыделением и переносом тепла вдоль струны $\sim \chi \partial^2 T / \partial x^2$ по сравнению с теплоотдачей в окружающий воздух. Кроме того, составляющая скорости $\partial u / \partial t$ много меньше $\partial w / \partial t$, и ею можно пренебречь в уравнении (1) [3]. В этом случае удлинение струны не зависит от координаты x и является функцией времени. Интегрируя (1) по координате и используя краевые условия (4), приходим к задаче

$$(5) \quad \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - v_0^2 \left[1 - \frac{\alpha_r K}{\rho v_0^2} \Theta(t) \right] \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{v_l^2}{2l} \left\{ \int_0^l \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx \right\} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} +$$

$$+ \delta_1 \frac{\partial w}{\partial t} + \delta_2 \frac{\partial w}{\partial t} w^2 = 0;$$

$$(6) \quad \frac{d\Theta}{dt} + \alpha_3 \Theta = \frac{W_0}{lS\rho c} \cos 2\omega t;$$

$$(7) \quad \alpha(T_c - T_0) + \sigma \varepsilon (T_c^4 - T_0^4) = \frac{W_0}{\pi r l};$$

$$(8) \quad w|_{x=0} = w|_{x=l} = 0,$$

где $\Theta(t) = T - T_c$ — пульсация температуры около среднего значения T_c ; $\alpha_3 = 2(\alpha + 4\varepsilon\sigma T_c^3)/c\rho r$ — эффективный коэффициент теплоотдачи; $W_0 = (1/2)I_0 v_0$.

Уравнение (7) определяет зависимость средней температуры струны T_c от мощности джоулевых потерь, а (6) описывает ее малые пульсации во времени:

$$\Theta(t) = \Theta_0 \sin(2\omega + \psi_0), \quad \Theta_0 = \frac{W_0}{Sl\rho c \sqrt{\alpha_3^2 + 4\omega^2}}, \quad \text{tg } \psi_0 = \frac{\alpha_3}{2\omega}.$$

При известном законе изменения температуры $\Theta(t)$ интегриродифференциальное уравнение (5) описывает нелинейные термопараметрические колебания струны. Поскольку в экспериментах, как правило, наблюдалось возбуждение колебаний на одной из собственных частот системы, ограничимся рассмотрением частных решений вида

$$w_n(x, t) = q_n(t) \sin k_n x,$$

где $k_n = (\pi n/l)$ ($n = 1, 2, 3 \dots$) — волновое число возбуждаемой формы колебаний. Для $q_n(t)$ из (5) получается нелинейное уравнение, хорошо известное в теории параметрических колебаний [5, 8, 9]:

$$(9) \quad \ddot{q}_n + \omega_n^2 [1 + m \sin(2\omega + \psi_n)] q_n + \frac{v_l^2 k_n^4}{4} q_n^3 + \left(\delta_1 + \frac{\delta_2}{4} q_n^2 \right) \dot{q}_n = 0,$$

* Значения модулей E и K выбираются при средней температуре нагретой струны $T = T_c$.

где $m = \alpha_T k \Theta_0 / \rho v_0^2$ — коэффициент модуляции натяжения струны; $\omega_n = v_0 k_n$ — собственная частота колебаний струны в линейном приближении. Решение для главной области параметрической неустойчивости будем искать в виде

$$(10) \quad q_n(t) = A(\mu t) \sin(\omega t + \varphi(\mu t)) + \mu Q(t),$$

где $A(\mu t)$, $\varphi(\mu t)$ — медленно меняющиеся амплитуда и фаза колебаний; $\mu Q(t)$ — малая поправка к решению $\mu \ll 1$. Накладывая условия ограниченности на $Q(t)$ с помощью метода усреднения [9], найдем укороченное уравнение для A и φ :

$$(11) \quad \begin{aligned} \dot{A}_n &= -\frac{m}{2} \frac{\omega_n^2}{\omega} A_n \cos 2\varphi_n - \left(\delta_1 + \frac{3}{16} \delta_2 A_n^2 \right) A_n, \\ \dot{\varphi}_n &= \frac{\omega_n^2 - \omega^2}{\omega} + \frac{m}{2} \frac{\omega_n^2}{\omega} \sin 2\varphi_n + \frac{3}{16} \frac{\beta k_n^4 A_n^2}{\omega}. \end{aligned}$$

Состояние равновесия $\dot{A} = 0$, $\dot{\varphi} = 0$ укороченной системы уравнений (11) соответствует установившимся периодическим колебаниям струны. Зависимость амплитуды установившихся колебаний от величины расстройки имеет вид

$$(12) \quad \xi = -\frac{3}{32} \frac{\beta k_n^4}{\omega^2} A_n^2 \pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{m^2}{4} \left(\frac{\omega_n}{\omega} \right)^4 - \frac{1}{\omega^2} \left(\delta_1 + \frac{3}{16} \delta_2 A_n^2 \right)^2}.$$

Здесь введено обозначение $\xi \approx (\omega_n - \omega)/\omega \approx (\omega_n^2 - \omega^2)/2\omega^2$, определяющее расстройку частоты пульсаций тока ω от частоты собственных колебаний струны ω_n при малой амплитуде. Выражение (12) описывает резонансные кривые, выходящие из точек

$$\xi_{\max} = \pm \frac{1}{4} \left(\frac{\omega_n}{\omega} \right)^2 \sqrt{m^2 - \left(\frac{\delta_1}{\omega} \right)^2},$$

которые сливаются в точке, отвечающей максимальному значению амплитуды колебаний

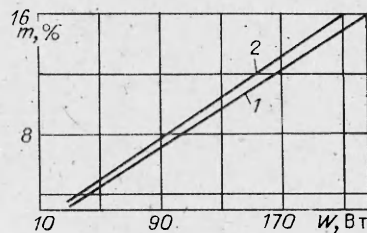
$$(13) \quad A_{\max} = \sqrt{\frac{8 \left(m \frac{\omega_n^2}{\omega} - 2\delta_1 \right)}{3\delta_2}}.$$

Отсюда легко находится величина порога параметрической неустойчивости ($\xi = 0$, $A_n = 0$):

$$(14) \quad m_* = \frac{2\delta_1}{\omega_n} \left(\frac{\omega}{\omega_n} \right).$$

Отметим, что в то время как амплитуда колебаний (12) сложным образом зависит от всех величин, входящих в уравнение (9), порог неустойчивости m_* и наибольшая амплитуда колебаний A_{\max} определяются только коэффициентом модуляции натяжения струны m , коэффициентами линейного δ_1 и нелинейного δ_2 демпфирования. Величина нелинейной восстанавливающей силы определяет только расстройку по частоте (скелетную кривую). Вопросы устойчивости периодических решений (10) достаточно подробно рассмотрены в [8, 9] и здесь не излагаются.

Обсуждения. Полученные результаты позволяют провести сопоставления экспериментальных данных с теоретическими расчетами по модели (5)–(8). Используя экспериментальные данные, можно из (7) вычислить коэффициент теплоотдачи α . В диапазоне температур 500–1500 К он линейно изменяется от 50 до 60 Вт/(м²·К), и его можно считать практически постоянным на рабочем участке. Зная все необходимые константы материала* (нихром X20H80) [10, 11], можно найти величину относительной пульсации температуры Θ_0/T_c и коэффициент модуляции по натяжению m . Расчеты показывают, что, хотя температура струны в результате нестационарного теплообмена изменяется менее чем на 0,05% от ее среднего значения, коэффициент натяжения m изменяется на десятки процентов (фиг. 5, 1 — узлы, 2 — пучности). Этого



Фиг. 5

* При расчетах учитывалось, что в рабочем диапазоне с ростом температуры модуль Юнга E уменьшается на 20–25% примерно по линейному закону.

вполне достаточно для параметрического возбуждения колебаний, что и наблюдается экспериментально. Соотношения (13) и (14) позволяют вычислить коэффициенты демпфирования, которые в данном случае оказываются равными $\delta_1 = 1,5 \text{ 1/с}$, $\delta_2 = 1,5 \cdot 10^7 \text{ 1/(с} \cdot \text{м}^2)$. С использованием этих констант соотношения (12) позволяют построить зависимость амплитуды установившихся колебаний от величины расстройки (см. фиг. 2, кривые 1 — $m = 0,12$, 2 — $m = 0,14$). Выражение (13) определяет зависимость амплитуды установившихся колебаний от мощности протекающего тока при постоянной расстройке ξ_0 (см. сплошную линию на фиг. 3, $\delta_1 = 1,5 \text{ 1/с}$, $\delta_2 = 1,5 \cdot 10^7 \text{ 1/(с} \cdot \text{м}^2)$, $\xi_0 \approx -0,20$).

Сопоставляя теоретические расчеты с экспериментальными данными, приходим к следующему выводу. Принятая теоретическая модель правильно предсказывает возможность термопараметрического возбуждения колебаний струны при протекании по ней переменного электрического тока. Она позволяет с хорошей точностью рассчитать пороги параметрической неустойчивости, зависимость амплитуды установившихся колебаний от мощности протекающего тока и расстройки между частотой изменения температуры и собственной частотой колебаний струны ξ . В то же время она не может предсказать наличие такого существенно нелинейного эффекта, как жесткий режим возбуждения и срыва колебаний. Последнее, по-видимому, связано с наличием особенностей теплообмена колеблющейся струны с окружающим воздухом, которые не описываются уравнением теплопроводности (3). Детальное обсуждение этого вопроса представляет сложную задачу и выходит за рамки данной работы.

Авторы признательны А. И. Весницкому за внимание и интерес к работе, а также Н. Д. Романову за помощь в экспериментальных исследованиях.

ЛИТЕРАТУРА

1. Безухов И. И., Бажанов В. Л., Гольденблатт и др. Расчеты на прочность, устойчивость и колебания в условиях высоких температур. М.: Машиностроение, 1965.
2. Иверонова В. П., Белянкин А. Г., Мотулевич и др. Физический практикум. М.: Наука, 1967.
3. Каудерер Г. Нелинейная механика. М.: ИЛ, 1961.
4. Кутателадзе С. С. Основы теории теплообмена. М.: Атомиздат, 1979.
5. Болотин В. В. Динамическая устойчивость упругих систем. М.: Гостехиздат, 1956.
6. Ruszel F., Tomezak W. Heat transfer from cylinder to liquid with applied vibration. — Arch. termodyn., 1982, v. 3, N 1.
7. Геммерлинг Г. А. О зависимости внутренней энергии твердого тела от скорости изменения температуры. — ДАН СССР, 1968, т. 180, № 5.
8. Шмидт Г. Параметрические колебания. М.: Мпр, 1978.
9. Боголюбов П. Н., Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1974.
10. Справочник по машиностроительным материалам/Под ред. Г. И. Погодина-Алексеева (Т. 2. Цветные металлы и их сплавы. Ред. М. А. Бочвар). М.: Машгиз, 1959.
11. Лифшиц Б. Г., Краношин В. С., Линецкий Л. А. Физические свойства металлов и сплавов. М.: Металлургия, 1980.

Поступила 15/VI 1984 г.

УДК 539.3

К ОПРЕДЕЛЕНИЮ ЭФФЕКТИВНЫХ МОДУЛЕЙ УПРУГОСТИ НЕОДНОРОДНЫХ МАТЕРИАЛОВ

В. В. НОВИКОВ

(Вологда)

1. **Постановка задачи.** При рассмотрении эффективных свойств неоднородных материалов обычно переходят к исследованию квазигомогенной среды, обладающей эффективными свойствами, которые зависят от свойств, объемной концентрации и условий контактирования компонентов. Необходимым и достаточным условием перехода к квазигомогенной среде является удовлетворение размера неоднородности l неравенству

$$(1.1) \quad l_0 \ll l \ll L,$$

где l_0 — постоянная кристаллической решетки; L — размер образца.

Эффективные модули упругости C_{ijkl} и податливости S_{ijkl} определяются из уравнений

$$(1.2) \quad \langle \sigma_{ij} \rangle = C_{ijkl} \langle \varepsilon_{kl} \rangle, \quad \langle \varepsilon_{ij} \rangle = S_{ijkl} \langle \sigma_{kl} \rangle.$$