ПМТФ, № 1, 1970

РЕЛАКСАЦИЯ ЖИДКОГО СЛОЯ ПОД ДЕЙСТВИЕМ КАПИЛЛЯРНЫХ СИЛ

О. В. Воинов

(Москва)

Рассматривается в рамках теории ползущих движений релаксация безграничного неоднородного по толщине слоя (пленки) вязкой жидкости и распространение краевого возмущения в полубесконечный слой под действием сил поверхностного натяжения. Слой хотя бы с одной стороны граничит с газом.

Найдено, что процессы релаксации безграничного слоя или распространения краевого возмущения внутрь ограниченного слоя являются немонотонными, что всегда возникают волнообразные возмущения поверхности. Определены времена релаксации. Найдены максимальные расстояния, на которых отдельные области слоя могут повлиять друг на друга.

1. Основные уравнения. Предполагается, что толщина h слоя вязкой жидкости изменяется на расстояниях l таких, что $l \gg h$, т. е. $dh/dx \ll 1$ (x — координата вдоль слоя). Известно [1], что уравнения гидродинамической теории смазки справедливы, когда приведенное число Рейнольдса $R^* \ll 1$ ($R^* = vh^2 / l\nu$, v — скорость вдоль слоя). Для малых волновых возмущений, когда изменение толщины $\Delta h \ll h$, этого условия недостаточно, так как нестационарный член в уравнении Навье — Стокса может быть большим. Поэтому необходимо принять более общее условие $h^2 \ll \nu\tau$, где τ — характерное время изменения толщины слоя.

Уравнения движения и сохранения массы имеют вид [1]

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \rho g + \mu \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}, \qquad \frac{\partial}{\partial x}\int_0^h v\,dy + \frac{\partial h}{\partial t} = 0 \tag{1.1}$$

Здесь y — координата поперек слоя; $y = 0$, $y = h$ — координаты поверхностей, ограничивающих слой; g — массовая сила.

В случае пленки, находящейся на твердой поверхности, можно допустить, что на свободной поверхности пленки действует постоянное касательное напряжение F, приложенное извне. Следовательно, $\mu\partial v / \partial y = F$ при $y = h$. Очевидно также, что $v = 0$ при $y = 0$. Этим граничным условиям и первому из уравнений (1.1) удовлетворяет

$$2v\mu = (\partial p / \partial x - \rho g)(y^2 - 2yh) + 2Fy$$

Если учесть второе уравнение (1.1), то легко получается

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{h^3}{3\mu}\left(\frac{\partial p}{\partial x} - \frac{3}{2h}F - \rho g\right)\right] = \frac{\partial h}{\partial t} \tag{1.2}$$

Известно, [2], что граничное условие на свободной поверхности жидкости может совпадать с условием на поверхности твердого тела, если присутствуют поверхностно активные вещества. Ниже пленки с таким граничным условием называются стабилизированными. Для стабилизированной пленки нетрудно получить уравнение, аналогичное (1.2), если учесть, что пленка деформируется только симметрично относительно середины из-за присутствия сил поверхностного натяжения и постоянства давления вдоль сечения. Это уравнение имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{h^3}{12\mu}\left(\frac{\partial p}{\partial x} - \rho g\right)\right] = \frac{\partial h}{\partial t} \tag{1.3}$$

Для случая $\partial p / \partial x = 0$ это уравнение рассматривается в [3]. Предполагая, что давление газа p_0 над свободной поверхностью постоянно, можно записать для давления внутри пленки следующие выражения:

$$(p - p_0)_1 = \sigma\partial^2 h / \partial x^2, \qquad (p - p_0)_2 = {}^1/_2\, \sigma\partial^2 h / \partial x^2 \tag{1.4}$$

Здесь σ — коэффициент поверхностного натяжения; индекс 1 относится к пленке на твердой поверхности, индекс 2 — к стабилизированной пленке, граничащей только с газом.

Подстановка одной из формул (1.4) в (1.2) или (1.3) и последующая линеаризация приводят к уравнению

$$\frac{\partial h}{\partial t} = -a\frac{\partial^4 h}{\partial x^4} - b\frac{\partial h}{\partial x} \tag{1.5}$$

Для нестабилизированной пленки на твердой поверхности

$$b\mu = {}^3/_2 hF + \rho g h^2, \qquad 3\mu a = \sigma h^3$$

Для стабилизированной пленки, граничащей только с газом

$$4b\mu = \rho g h^2, \qquad 24\mu a = \sigma h^3$$

Если одна из границ — твердое тело, то коэффициент b будет таким же, тогда как коэффициент a увеличится вдвое.

2. Бесконечная пленка. Для уравнения (1.5), как видно из дальнейшего, можно корректно поставить задачу Коши, если $a > 0$. Для $a < 0$ постановка является некорректной. Так как в случае пленки всегда $a > 0$, то можно сформулировать задачу с начальным условием

$$h = h_0(x) \quad \text{при } t = 0, \ -\infty < x < +\infty \tag{2.1}$$

Чтобы решить уравнение (1.5) с условием (2.1), можно применить преобразование Лапласа по времени и преобразование Фурье по координате

$$h(k, p) = \int_0^\infty dt \int_{-\infty}^\infty h(x, t)\, e^{-pt+ikx} dx \tag{2.2}$$

Тогда из уравнения (1.5) следует

$$ph(k, p) - h_0(k) = -(ak^4 + bik)h(k, p)$$

где $h_0(k)$ — фурье-образ функции $h_0(x)$. Отсюда нетрудно найти фурье-образ функции $h(x, t)$

$$h(k, t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{pt} h(k, p)\, dp = h_0(k)\, e^{-(ak^4+bik)t} \tag{2.3}$$

Выполняя обратное фурье-преобразование и используя теорему о свертке, можно выразить h через h_0 с помощью функции Грина

$$h(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} h_0(\xi - bt)\, G(x - \xi, t)\, d\xi \tag{2.4}$$

$$G(x, t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx - ak^4 t} dk \tag{2.5}$$

Из (2.4) видно, что процесс релаксации в движущейся пленке ($b \neq 0$) протекает так же, как в неподвижной ($b = 0$).

Для выяснения свойств функции Грина (2.5) удобно ввести параметр

$$s = 3^{3/2} 2^{-11/3} (x^4 / at)^{1/3} \tag{2.6}$$

Параметр $s \sim 1$, если $x \sim 2\,(at)^{1/4}$. Если $s \ll 1$ (малые расстояния или большие времена), то, как видно из (2.5), функция Грина убывает со временем как $(at)^{-1/4}$.

Если $s \gg 1$, то к интегралу (2.5) следует применить метод перевала. Можно показать, что на пути интегрирования, представляющем прямую $\operatorname{Im} k = 2^{-5/3}\sqrt{3}$, точки перевала $k = 2^{-2/3} e^{1/6 \pi i}$, $k = 2^{-2/3} e^{5/6 \pi i}$ являются наивысшими. Тогда после несложных вычислений получается, что при $s \to \infty$

$$G\,(x,\,t) = 2^{1/4} \sqrt{\pi}\,(ats\sqrt{3})^{-1/4} \exp\,(-s / \sqrt{3})\,[\cos\,(s - 1/_6\,\pi) + O\,(s^{-1})] \tag{2.7}$$

Следовательно, функция Грина (2.5) задачи (1.5), (2.1) будет знакопеременной. В этом состоит ее существенное качественное отличие от функции Грина уравнения теплопроводности, которая является монотонной. Можно заключить, что распространение начального возмущения по пленке всегда сопровождается возникновением волн. Релаксация за счет капиллярных сил носит немонотонный характер, т. е. всякое, даже весьма плавное начальное возмущение толщины, порождает в последующие моменты времени колебания толщины пленки.

Из (2.4) — (2.7) видно, что характерное время релаксации пленки с неоднородностями размером l равно $\tau = l^4 / a$. Для достаточно тонких слоев это время может достигать суток и даже месяцев, так оно равно суткам, например, при $l \sim 0.1$ *см*, $h \sim 10^{-4}$ *см*, $\sigma \sim 10^2$ *дн / см*, $\mu \sim 10^{-2}$ *г / см·сек*.

Из формул (2.4) — (2.7) следует, что участки пленки, отстоящие друг от друга на расстоянии, большем $r = (at)^{1/4}$, не успевают повлиять друг на друга. Если размеры пленки намного превышают r, то нет смысла изучать пленку в целом, можно ограничиться рассмотрением отдельных ее участков. Например, для мыльного пузыря радиусом 1 *см*, временем жизни $t \approx 10^2$ *сек*, толщиной стенки $h \sim 10^{-4}$ *см*, при $\mu \sim 10^{-2}$ *г/см·сек*, $\sigma \sim 10^2$ *дн / см* $r \sim 2 \cdot 10^{-2}$ *см* $\ll 1$ *см*. Следовательно, при выяснении процессов, происходящих в пленке, можно не рассматривать весь мыльный пузырь и даже не учитывать кривизну его поверхности.

Очевидно, если размеры пленки намного превышают r, то область, близкую к краю пленки, можно рассматривать отдельно, считая пленку полубесконечной.

3. Полубесконечная пленка. Рассматриваются решения уравнения (1.5) при $b = 0$ на интервале $(0, \infty)$. Кроме начального условия

$$h = h_0\,(x) \quad \text{при } t = 0,\ 0 < x < \infty \tag{3.1}$$

задаются краевые условия двух типов. Первые краевые условия соответствуют заданию потока массы из пленки и угла наклона на краю пленки, вторые краевые условия соответствуют заданию давления и толщины. Возможны и другие краевые условия, но они не обсуждаются.

Первыми краевыми условиями будут

$$\partial^3 h / \partial x^3 = \alpha(t), \quad \partial h / \partial x = \beta(t) \quad \text{при } x = 0 \tag{3.2}$$

Чтобы построить решение задачи при этих краевых условиях, можно продолжить начальное условие (3.1) для $x < 0$ четным образом и применить преобразования Лапласа и Фурье (2.2). Если учесть при этом, что производные $h(x, t)$ по x испытывают в нуле скачок, определяемый (3.2), то нетрудно получить для изображения функции $h(x, t)$ формулу

$$(p + ak^4)h(k, p) = h_0(k) + 2a\alpha(p) - 2ak^2\beta(p)$$

где $h_0(k)$ — фурье-образ функции, равной $h_0(x)$ при $x > 0$ и $h_0(-x)$ при $x < 0$. Применение к $h(k, p)$ обратного преобразования Лапласа позволяет найти

$$h(k, t) = 2a\int_0^t [\alpha(\tau) - k^2\beta(\tau)]\, e^{-ak^4(t-\tau)}d\tau + h_0(k)\, e^{-ak^4t}$$

Выполнив обратное фурье-преобразование, можно отсюда получить решение задачи с краевыми условиями (3.2) в следующем виде:

$$h(x, t) = \int_0^\infty h_0(\xi)\,[G(x-\xi, t) + G(x+\xi, t)]\,d\xi +$$
$$+ 2a\int_0^t \left[G(x, t-\tau)\,\alpha(\tau) + \frac{\partial^2 G}{\partial x^2}(x, t-\tau)\,\beta(\tau)\right]d\tau \qquad (3.3)$$

Здесь $G(x, t)$ определяется формулой (2.5).

Задание толщины и давления на границе эквивалентно следующим условиям:

$$h = \varkappa(t), \quad \partial^2 h \,/\, \partial x^2 = \gamma(t) \quad \text{при } x = 0 \qquad (3.4)$$

В этом случае, чтобы получить решение уравнения (1.5) при начальных условиях (3.1), $h_0(x)$ надо продолжить для $x < 0$ нечетным образом. Проводя выкладки, аналогичные тем, с помощью которых получена формула (3.3), можно найти решение задачи с краевыми условиями (3.4) в следующей форме:

$$h(x, t) = \int_0^\infty h_0(\xi)\,[G(x-\xi, t) - G(x+\xi)\, t)]\,d\xi + \qquad (3.5)$$
$$+ 2a\int_0^t \left[\frac{\partial G}{\partial x}(x, t-\tau)\,\gamma(\tau) + \frac{\partial^3 G}{\partial x^3}(x, t-\tau)\,\varkappa(\tau)\right]d\tau$$

Здесь, как и в (3.3), $G(x, t)$ определяется формулой (2.5).

Представляет интерес определить, как распространяются возмущения от края пленки в начальные моменты времени или на больших расстояниях, т. е. при больших значениях параметра s, определяемого (2.6). Применяя к $\partial G \,/\, \partial x$ метод перевала, можно найти при $s \to \infty$

$$\partial G \,/\, \partial x = \sqrt{2\pi}\,(3at)^{-1/2}\exp(-s\,/\,\sqrt{3})\,[\sin s + O(s^{-1})] \qquad (3.6)$$

Аналогичные формулы нетрудно записать и для $\partial^2 G \,/\, \partial x^2$, $\partial^3 G \,/\, \partial x^3$. Существенно, что в них, как и в (3.6), будут содержаться осцилляции. Из (3.3), (3.5) тогда следует, что возмущения на границе вызывают знакопеременные возмущения в пленке на больших расстояниях от края.

Если в граничных условиях (3.2) $\alpha = \mathrm{const}$, $\beta = \mathrm{const}$, то как следует из (3.3), убывание толщины быстрее всего происходит на границе, причем по следующему закону:

$$h - h_0 = - {}^1/_3\, \alpha c_1 (at)^{3/4} - \beta c_2 (at)^{1/4}$$
$$\frac{\pi c_1}{4} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^4} dz \approx 1.81, \qquad \frac{\pi c_2}{4} = \int_{-\infty}^{\infty} z^2 e^{-z^4} dz \approx 0.60 \tag{3.7}$$

Если на границе действует постоянное возмущение давления Δp при постоянной толщине ($\gamma = \mathrm{const}$, $\varkappa = \mathrm{const}$), то максимальное изменение толщины Δh происходит в некоторой точке $x_0 > 0$. На основании (3.5)

$$\Delta h\,(x_0,\ t) \approx -\gamma\,(at)^{1/2},\ x_0\,(t) \approx (at)^{1/4} \tag{3.8}$$

Пленка размером l будет утончаться в краевой области, если $x_0 \ll l$ при $\Delta h \sim h$, т. е. $\Delta p l^2 \gg h\sigma$, как это следует из (3.8). Если выполнено обратное неравенство, то пленка будет утончаться в центральной области.

Условиями, при которых сохраняются сделанные при выводе (1.5) предположения $h^2 \ll \nu\tau$ и $h \gg \Delta h$, на основании (3.8) будут $a\gamma^2 \ll \nu$ и $\gamma\sqrt{at} \ll h$. Для стабилизированной пленки, граничащей только с газом, это означает

$$h^3 (\Delta p)^2 \ll 24 \rho \nu^2 \sigma, \quad \Delta p \sqrt{ht} \ll 5 \sqrt{\mu\sigma}$$

Автор благодарит В. Г. Левича за обсуждение результатов работы.

Поступила 21 IV 1969

ЛИТЕРАТУРА

1. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя М., Изд-во иностр. лит., 1956.
2. Левич В. Г. Физико-химическая гидродинамика. М., Физматгиз, 1959.
3. Mysels K. J., Shinoda K., Frankel S. Soap films. London. Pergamon Press, 1959.