4. **Зубцов А. В., Пономарев В. И.** Асимптотическое решение задачи об обтекании волнистой поверхности плоским потоком вязкой жидкости.— Учен. зап. ЦАГИ, 1972, т. 3, № 2.
5. **Сычев В. В.** О ламинарном отрыве.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1972, № 3.
6. **Бетяев С. К.** Отрывные течения. Препринт № 14—83. Новосибирск: ИТПМ СО АН СССР, 1983.

Поступила 24/VII 1983 г.

УДК 532.59 : 522.2

ПРОНИКАНИЕ ЗАТУПЛЕННОГО ТЕЛА В СЛАБО СЖИМАЕМУЮ ЖИДКОСТЬ

А. А. Коробкин

(Новосибирск)

Введение. Рассмотрим начальный этап неустановившегося движения жидкости, вызванного прониканием в нее твердого тела. Первоначально ($t' = 0$) жидкость покоится, а тело касается ее свободной поверхности в единственной точке. Область $\Omega(t')$, занятая жидкостью, изменяется со временем, причем ее граница $\partial\Omega(t')$ состоит из свободной поверхности Σ_1, твердой поверхности проникающего тела Σ_2, линии контакта между ними Г и, возможно, неподвижных твердых стенок Σ_3 (например, посадка гидросамолета на поверхность водоема). Диапазон скоростей предполагается таким, что число Рейнольдса $\mathrm{Re} \gg 1$, а число Маха $\mathrm{M} \ll 1$.

Количественная информация о процессе проникания может быть получена лишь на основе численных расчетов. Однако точность этих расчетов существенно снижается в моменты, когда меняется топология течения, возникают особенности поля давлений, бесконечные ускорения жидких частиц и т. д. Особенности подобного рода следует выделять аналитически.

Численное решение задачи о проникании заостренных тел (клин, конус) в несжимаемую жидкость было построено в [1], при этом полученное распределение давления на пятне контакта хорошо согласуется с экспериментом. Для затупленных же тел использование модели идеальной несжимаемой жидкости приводит к бесконечному давлению при $t' = 0$, какой бы малой ни была скорость проникания [2]. Это связано с тем, что модель несжимаемой жидкости, в которой скорость распространения возмущений считается бесконечной, не в состоянии описать важный этап истории процесса проникания затупленного тела. А именно существует момент времени t'_* порядка нескольких микросекунд такой, что при $t' < t'_*$ линия контакта Г движется со скоростью, превышающей скорость звука в жидкости. При этом фронт возмущений присоединен к линии Г, а возмущенная часть жидкости ограничена твердой поверхностью с одной стороны и фронтом ударной волны — с другой. До момента отрыва ударной волны от линии контакта свободная поверхность остается невозмущенной. Таким образом, для получения реальных результатов на этой стадии расчетов независимо от величины числа Маха M необходимо использовать модель сжимаемой жидкости.

Построенное и исследованное в [3] при малых t' решение задачи проникания затупленного твердого тела в идеальную несжимаемую жидкость хорошо описывает процесс при $t' \gg t'_*$, когда ударная волна достаточно далеко отошла от линии контакта. Это решение, как будет показано ниже, следует рассматривать как главный член внешнего (по отношению к $t' = 0$) асимптотического разложения при $\mathrm{M} \to 0$ решения задачи проникания в модели идеальной сжимаемой жидкости.

1. Постановка задачи. Ограничимся исследованием плоской задачи о проникании параболического контура.

Рассматривается плоское неустановившееся изэнтропическое движение идеальной сжимаемой жидкости, заполняющей в момент $t' = 0$ полуплоскость $y' < 0$ и первоначально покоящейся (как и раньше, штрихом снабжаются размерные переменные). Линия $y' = 0$ в начальный момент является свободной границей. Предполагается, что поверхностное натяжение и внешние массовые силы отсутствуют.

Пусть R и V — положительные постоянные. При фиксированном t' уравнение

$$y' = (1/2R)x'^2 - Vt' \tag{1.1}$$

определяет параболу на плоскости x', y', которую будем отождествлять с твердым недеформируемым контуром.

При $t' = 0$ этот контур касается свободной границы в точке $x' = 0$. Соотношение (1.1) задает движение контура вдоль оси y' с постоянной скоростью V. Требуется определить возникающее при этом движение жидкости, считая, что часть ее границы, не являющаяся частью твердого контура, остается свободной. На плоскости лагранжевых координат ξ', η' область, занятая жидкостью, заранее известна — это полуплоскость $\eta' < 0$.

Примем за масштаб длины радиус R параболы (1.1) в точке $x' = 0$, а за масштаб времени — величину R/V и перейдем к безразмерным переменным (обозначения безразмерных переменных отличаются отсутствием штриха).

Так как движение начинается из состояния покоя и внешние массовые силы отсутствуют, то течение идеальной сжимаемой жидкости по теореме Лагранжа [4] будет безвихревым. Следовательно, существует потенциал скоростей $\varphi_0'(x', y', t')$ такой, что $x_t = \varphi_{0x}$, $y_t = \varphi_{0y}$, где $\varphi_0' = RV\varphi_0(x, y, t)$. Функция φ_0 удовлетворяет уравнению [5]

$$\Delta\varphi_0 = S(\rho)\left(\varphi_{0tt} + 2\nabla\varphi_0\nabla\varphi_{0t} + \nabla\varphi_0\nabla\left(\frac{1}{2}|\nabla\varphi_0|^2\right)\right), \quad S(\rho) = V^2c^{-2}(\rho) \tag{1.2}$$

($\rho(\xi, \eta, t)$ — плотность жидкости, $c(\rho)$ — местная скорость звука). К уравнению (1.2) присоединяем краевые условия (на свободной поверхности Σ_1 давление p постоянно, на пятне контакта Σ_2 выполняется условие непротекания) и начальные условия ($\varphi_0 = 0$, $\varphi_{0t} = 0$ при $t = 0$).

Введем лагранжевы координаты ξ, η, в которых область течения фиксирована таким образом, что $x = \xi$, $y = \eta$ при $t = 0$. В переменных Лагранжа уравнение (1.2) перепишется в виде

$$S(\rho)\varphi_{tt} - \Delta\varphi_0 = S(\rho)L(\varphi) \text{ при } \eta < 0, \tag{1.3}$$
$$\Delta\varphi_0 = (N^{*-1}\nabla_\xi)(N^{*-1}\nabla_\xi\varphi), \quad \mathbf{x}_t = N^{*-1}\nabla_\xi\varphi,$$

где $\varphi(\xi, \eta, t) = \varphi_0(\mathbf{x}(\xi, \eta, t), t)$; $N = \partial(\mathbf{x})/\partial(\boldsymbol{\xi})$ — матрица Якоби; L — нелинейный дифференциальный оператор; $\mathbf{x} = (x, y)$; $\boldsymbol{\xi} = (\xi, \eta)$. Обозначим через $a(t)$ прообраз в лагранжевых координатах точки контакта Σ_1 и Σ_2. Тогда при любом t из некоторого интервала $[0, T]$ линия $\eta = 0$, ограничивающая жидкость, состоит из трех областей: $\xi < -a(t)$, $|\xi| \leqslant a(t)$, $\xi > a(t)$, где функция $a(t)$ подлежит определению. Участки $|\xi| > a(t)$ являются свободными границами.

Определим краевые условия, которым должна удовлетворять искомая функция $\varphi(\xi, t)$. Интеграл Бернулли для потенциального течения сжимаемой жидкости имеет вид

$$\varphi_{0t} + (1/2)q^2 + i = 0, \tag{1.4}$$

где $q^2 = |\nabla\varphi_0|^2$; i — энтальпия, связанная с давлением p и плотностью ρ соотношением $di = \rho^{-1}dp$. Учитывая, что $\varphi_t = \varphi_{0t} + q^2$, перепишем (1.4) в лагранжевых координатах:

$$\varphi_t = (1/2)q^2 - i.$$

Так как на свободной поверхности $p = \text{const}$, а следовательно, и $i = \text{const}$, то имеем

$$\varphi_t = (1/2)q^2 \text{ при } \eta = 0, \quad |\xi| > a(t) \tag{1.5}$$

(напомним, что потенциал φ определяется с точностью до постоянного слагаемого).

На пятне контакта Σ_2 следует поставить условие непротекания

$$(N^{*-1}\nabla_\xi\varphi - \mathbf{v})\,\mathbf{n} = 0, \quad |\xi| < a(t), \quad \eta = 0, \tag{1.6}$$

где $\mathbf{v} = (0, -1)$; $\mathbf{n}$ — нормаль к поверхности Σ_2. К сформулированной задаче необходимо добавить условие на бесконечности

$$\varphi \to 0 \text{ при } |\xi| \to \infty, \tag{1.7}$$

начальные условия

$$\varphi = 0, \quad \varphi_t = 0 \text{ при } t = 0 \tag{1.8}$$

и потребовать, чтобы частицы жидкости, лежащие на свободной поверхности Σ_1, не проникали за поверхность твердого контура во все время движения [3]

$$Y \leqslant \frac{1}{2}(\xi + X)^2 - t \quad \text{при} \quad \eta = 0, \ |\xi| > a(t), \tag{1.9}$$

где $\mathbf{X} = \mathbf{x} - \xi$, $\mathbf{X} = (X, Y)$.

Сформулированная задача сложна в силу нелинейности и наличия неизвестной границы смены вида краевого условия (напомним, что $a(t)$ необходимо определить в ходе решения задачи (1.3), (1.5) — (1.8) при дополнительном одностороннем ограничении (1.9) на перемещение частиц свободной границы).

2. Асимптотическое решение. Решение задачи (1.3), (1.5)—(1.9) ищем в виде разложений по степеням параметра M, где $\mathrm{M} = V/c_0$, c_0 — скорость звука в покоящейся жидкости, при $\mathrm{M} \to 0$:

$$\varphi(\xi, t) = \varphi^{(0)}(\xi, t) + \mathrm{M}^2\varphi^{(1)}(\xi, t) + \ldots, \tag{2.1}$$

$$S(\rho) = \mathrm{M}^2 + \varepsilon_1(\mathrm{M})s_1(\rho) + \ldots, \quad a(t) = a^{(0)}(t) + \delta_1(\mathrm{M})a^{(1)}(t) + \ldots,$$

$\{\varepsilon_i(\mathrm{M})\}$, $\{\delta_i(\mathrm{M})\}$ — асимптотические последовательности, причем $\varepsilon_i(\mathrm{M}) = o(\mathrm{M}^2)$ при $i \geqslant 1$. Тогда задача для главного члена асимптотики потенциала скоростей при $\mathrm{M} \to 0$ имеет вид

$$(N_0^{*-1}\nabla_\xi)(N_0^{*-1}\nabla_\xi\varphi^{(0)}) = 0 \quad \text{при} \quad \eta < 0, \tag{2.2}$$

$$\varphi_t^{(0)} = \frac{1}{2}|N_0^{*-1}\nabla_\xi\varphi^{(0)}|^2 \quad \text{при} \quad \eta = 0, \ |\xi| > a(t),$$

$$(N_0^{*-1}\nabla_\xi\varphi^{(0)} - \mathbf{v})\cdot\mathbf{n} = 0 \quad \text{при} \quad \eta = 0, \ |\xi| < a(t),$$

$$\varphi^{(0)}, \ \varphi_t^{(0)} = 0 \quad \text{при} \quad t = 0,$$

$$\varphi^{(0)} \to 0 \quad \text{при} \quad |\xi| \to \infty,$$

$$Y^{(0)} \leqslant \frac{1}{2}(\xi + X^{(0)})^2 - t \quad \text{при} \quad \eta = 0, \ |\xi| > a(t)$$

и, кроме того,

$$N_0 = I + \partial(X^{(0)}, Y^{(0)})/\partial(\xi, \eta), \quad \mathbf{X}_t^{(0)} = N_0^{*-1}\nabla_\xi\varphi^{(0)},$$

где I — единичная матрица. Задача (2.2), которая описывает проникание твердого контура в идеальную жидкость, была исследована в [3] для начального этапа проникания ($t \to 0$). Асимптотики искомых функций при $t \to 0$ даются формулами

$$\varphi^{(0)}(\xi, \eta, t) = \operatorname{Im}\left(\sqrt{\zeta^2 - a^2(t)} - \zeta\right)(1 + O(\sqrt{t})), \quad \zeta = \xi + i\eta, \tag{2.3}$$

$$a^{(0)}(t) = 2\sqrt{t}(1 + O\sqrt{t})),$$

$$p^{(0)}(\xi, 0, t) = \frac{2}{\sqrt{a^2(t) - \xi^2}}(1 + O(\sqrt{t})) \quad \text{при} \quad |\xi| < a(t).$$

Нулевое приближение (2.3) удовлетворяет соотношениям (2.2) с точностью $O(\sqrt{t})$ всюду, кроме узких зон вблизи точек контакта, размер которых имеет порядок $t^{3/2}$ при $t \to 0$. Внутри этих зон картина течения уточняется [3].

Уже отмечалось, что главный член асимптотики давления $p^{(0)}$ при $\mathrm{M} \to 0$ имеет особенности в точке $t = 0$, т. е. разложение (2.1), рассматриваемое как асимптотическое, теряет силу в малой окрестности точки $t = 0$, которая, как будет показано ниже, имеет порядок $O(\mathrm{M}^2)$ при $\mathrm{M} \to 0$. Для уточнения структуры течения внутри этой окрестности необходимо строить внутренние разложения. Именно в этой области характеристики потока являются определяющими для задачи в целом.

3. Внутреннее разложение. Определим внутренние переменные α, β, τ по формулам $\xi = \delta_1(\mathrm{M})\alpha$, $\eta = \delta_1(\mathrm{M})\beta$, $t = \delta_0(\mathrm{M})\tau$ и будем искать внутреннее разложение решения задачи (1.3), (1.5) — (1.8) в виде

(3.1) $$\varphi(\xi, \eta, t) = \varepsilon_0(M)\Psi^{(0)}(\alpha, \beta, \tau) + \varepsilon_1(M)\Psi^{(1)}(\alpha, \beta, \tau) + \ldots,$$
$$a(t) = \delta_1(M)b(\tau) + \delta_2(M)b^{(2)}(\tau) + \ldots,$$

где $\{\varepsilon_i(M)\}_{i=0}^{\infty}$, $\{\delta_i(M)\}_{i=1}^{\infty}$ — асимптотические последовательности при $M \to 0$. Согласно принципу сращивания асимптотических разложений [6], из (2.3) следует, во-первых,

$$\tau^{-1/2}b(\tau) \to 2\sqrt{\delta_0(M)}/\delta_1(M) \text{ при } \tau \to \infty,$$

отсюда определяем $\delta_1(M) = \sqrt{\delta_0(M)}$, во-вторых,

(3.2) $$\Psi^{(0)}/\mathrm{Im}(\sqrt{z^2 - b^2(\tau)} - z)^2 \to \delta_1(M)/\varepsilon_0(M) \text{ при } \tau \to \infty,$$

где $z = \alpha + i\beta$. Из условия (3.2) получаем

$$\varepsilon_0(M) = \delta_1(M) = \sqrt{\delta_0(M)}.$$

Подставляя соотношения (3.1) в уравнения (1.3) и условия (1.5) — (1.9), удержим главные члены при $M \to 0$. Условие нетривиальности решения полученной задачи приводит к требованию $\delta_1(M) = M$. Главный член асимптотики внутреннего разложения потенциала скоростей φ при $M \to 0$ удовлетворяет соотношениям

(3.3) $$\Psi^{(0)}_{\tau\tau} - \Delta\Psi^{(0)} = 0 \text{ при } \beta < 0,$$
$$\Psi^{(0)}_{\beta} = -1 \text{ при } \beta = 0, \ |\alpha| \leqslant b(\tau),$$
$$\Psi^{(0)}_{\tau} = 0 \text{ при } \beta = 0, \ |\alpha| > b(\tau),$$
$$\Psi^{(0)} = 0, \ \Psi^{(0)}_{\tau} = 0 \text{ при } \tau = 0.$$

Из принципа сращивания следует

(3.4) $$b(\tau) \backsim 2\sqrt{\tau} \text{ при } \tau \to \infty,$$

при этом условие (3.2) выполняется автоматически (достаточно рассмотреть асимптотику решения задачи (3.3), (3.4) при больших τ). Заметим, что $b(\tau) = \sqrt{2\tau}$ при $\tau \leqslant \tau_*$, где τ_* — момент выхода ударной волны на свободную поверхность жидкости.

Из неравенства (1.9) и условия непротекания (1.6) при $\tau > \tau_*$ следует

(3.5) $$Y = \frac{1}{2}(\xi + X)^2 - t \text{ при } \eta = 0, \ \xi = a(t) + 0, \ \tau_* M^2 < t < T_1,$$

где T_1 — момент отрыва области поворота свободной поверхности жидкости от поверхности тела. Напомним, что X, Y — перемещения жидкой частицы вдоль осей ξ, η соответственно. Во внутренних переменных α, β, τ для нулевого приближения потенциала скоростей $\Psi^{(0)}(\alpha, \beta, \tau)$ из соотношения (3.5) получаем

(3.6) $$\int\limits_{b(\tau)-1/2}^{\tau} \Psi^{(0)}_{\beta}(b(\tau), 0, s)\, ds = \frac{1}{2} b^2(\tau) - \tau,$$

где левая часть уравнения есть перемещение жидкой частицы вдоль оси β за время τ (в нулевом приближении перемещение частиц свободной поверхности вдоль оси α отсутствует). Совместное решение задачи (3.3) и дополнительного уравнения (3.6) дает главный член асимптотики разложения потенциала скоростей при $M \to 0$. При этом условие (3.4) выполняется автоматически (достаточно рассмотреть асимптотику решения задачи (3.3), (3.6) при больших τ).

Величину τ_* будем искать в виде

$$\tau_* = \tau_*^{(0)} + \chi_1(M)\tau_*^{(1)} + \ldots,$$

где $\{\chi_i(M)\}_{i=1}^{\infty}$ — асимптотическая последовательность при $M \to 0$. Момент выхода ударной волны на свободную поверхность характеризуется тем, что при $\tau = \tau_*$ скорость движения ударной волны W' в окрестности точки контакта и скорость движения самой точки контакта вдоль свободной поверхности совпадают: $b_\tau(\tau) = W'/c_0$ при $\tau = \tau_*$. Нулевое приближение выписанного условия ($W' \to c_0$ при $\mathrm{M} \to 0$) дает $\tau_*^{(0)} = 1/2$.

Исследуем распределение давления на пятне контакта при $\tau \leqslant 1/2$ (функция $b(\tau)$ известна априори). Введем следующие обозначения:

$$u(\alpha, \tau) = \Psi^{(0)}(\alpha, 0, \tau), \quad w(\alpha, \tau) = \Psi_\beta^{(0)}(\alpha, 0, \tau),$$

$$D = \{(\alpha, \tau) \mid |\alpha| < b(\tau)\},$$

$$p' = \rho_0 c_0 V(q^{(0)}(\alpha, \beta, \tau) + \mathrm{M} q^{(1)}(\alpha, \beta, \tau) + \ldots),$$

где p' — давление; c_0 — скорость звука в покоящейся жидкости. Функция $u(\alpha, \tau)$ связана с нулевым приближением давления $q^{(0)}(\alpha, 0, \tau)$ формулой

$$q^{(0)} = -u_\tau(\alpha, \tau), \tag{3.7}$$

а с $w(\alpha, \tau)$ — соотношением [7]

$$u(\alpha, \tau) = \frac{1}{\pi} \iint\limits_{\sigma(\alpha, \tau)} \frac{w(x, t)\, dx dt}{\sqrt{(\tau - t)^2 - (x - \alpha)^2}}, \tag{3.8}$$

где $\sigma(\alpha, \tau) = \{x, t \mid \alpha - \tau < x < \alpha, \; 0 \leqslant t \leqslant x - \alpha + \tau\} \cup \{x, t \mid, \alpha < x < \alpha + \tau, \; 0 \leqslant t \leqslant \alpha + \tau - x\}$. Если $(\alpha, \tau) \in D \cap \sigma(0, 3/2)$, то в формуле (3.8) интегрирование производится по области $D \cap \sigma(\alpha, \tau)$, в которой $w(\alpha, \tau) = -1$. С помощью формулы (3.8) можно построить $u(\alpha, \tau)$, а следовательно, и главный член асимптотики давления $q^{(0)}$при $\beta = 0$, $|\alpha| < \sqrt{2\tau}$, $\tau \leqslant 1/2$. Из соотношений (3.7), (3.8) следует

$$q^{(0)}(\alpha, 0, \tau) = \frac{1}{\pi \zeta(\alpha, \tau)} K\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{1 - \frac{1/2 - \tau}{\zeta(\alpha, \tau)}}\right), \tag{3.9}$$

$$\zeta(\alpha, \tau) = \sqrt{(\tau + 1/2)^2 - \alpha^2}, \; |\alpha| \leqslant \sqrt{2\tau}, \; \tau \leqslant 1/2,$$

где $K(x)$ — полный эллиптический интеграл первого рода. Приведем некоторые частные случаи формулы (3.9):

1) $q^{(0)}(0, 0, 0) = 1$, т. е. в момент $t = 0$ давление равно давлению гидравлического удара $p' = \rho_0 c_0 V$;
2) $q^{(0)}(\alpha, 0, 1/2) = K(2^{-1/2}) \pi^{-1} (1 - \alpha^2)^{-1/2}$ при $\tau = \tau_*^{(0)}$;
3) $q^{(0)}(\alpha, 0, \tau) = (1 - 2\tau)^{-1}$ при $\alpha = \sqrt{2\tau}$, $\tau \leqslant \tau_*^{(0)}$.

Формула (3.9) показывает, что с увеличением τ распределение давления в области контакта становится все более неравномерным, а рассматриваемые вплоть до момента $\tau_*^{(0)} = 1/2$ разложения (3.1) теряют силу в окрестности точки $\tau = 1/2$, $\alpha = 1$, $\beta = 0$.

Рассмотрим картину движения волны возмущения. Фронт ударной волны является огибающей семейства кривых

$$\beta^2 + (\alpha - \lambda)^2 = (\tau - \lambda^2/2)^2, \; \beta < 0, \; |\lambda| < \sqrt{2\tau}, \; \tau \leqslant \tau_*,$$

которая параметрически задается в виде [8]

$$\alpha = \lambda(\tau + 1 - \lambda^2/2), \; \beta = -(\tau - \lambda^2/2)\sqrt{1 - \lambda^2}, \tag{3.10}$$

$$|\lambda| < \sqrt{2\tau}, \quad \tau \leqslant \tau_*,$$

где λ — параметр. Тогда уравнение касательной к фронту ударной волны в точке контакта $\alpha = \sqrt{2\tau}$, $\beta = 0$ имеет вид

$$\beta = \sqrt{\frac{2\tau}{1 - 2\tau}} (\alpha - \sqrt{2\tau}).$$

Следовательно, при возрастании τ угол, образуемый касательной к фронту ударной волны в точке $(\sqrt{2\tau}, 0)$ и осью α, увеличивается от нуля при $\tau = 0$ до $\pi/2$ при $\tau = 1/2$.

На фронте ударной волны условия сохранения массы и импульса задаются соотношениями [9]

$$\rho'(W' - u') = \rho_0(W' - u_0), \quad p' - p_0 = \rho_0(W' - u_0)(u' - u_0),$$

где W' — скорость распространения ударной волны в воде с начальным давлением p_0, плотностью ρ_0 и скоростью течения u_0 (штрихом помечены размерные переменные). В нашем случае $p_0 = 0$, $u_0 = 0$, тогда

$$W' = \sqrt{\frac{p'}{\rho' - \rho_0}\frac{\rho'}{\rho_0}}, \quad u' = W'(1 - \rho_0/\rho'). \tag{3.11}$$

Уравнение состояния для воды при относительно небольших давлениях можно представить в виде [9]

$$p' = B[(\rho'/\rho_0)^n - 1],$$

где $B \simeq 3{,}085\cdot 10^8$ Па, $n \simeq 7{,}15$. Следовательно, скорость звука c' связана с плотностью воды за ударной волной следующим образом:

$$c'^2 = dp'/d\rho' = c_0^2(\rho'/\rho_0)^{n-1}, \quad c_0^2 = Bn/\rho_0$$

или $c' = c_0(1 + n\mathrm{M}^2 p)^{(n-1)/2n}$. Здесь $p' = \rho_0 V^2 p$, V — скорость проникающего тела.

Естественно предположить, что $\mathrm{M}^2 p \to 0$ при $\mathrm{M} \to 0$ во всей области течения. Тогда $c' \to c_0$, $W' \to c_0$ и формула (3.9) дает асимптотику распределения давления на пятне контакта при $\mathrm{M} \to 0$ ($\tau \leqslant \tau_*$). Заметим, что ударная волна должна выйти на свободную поверхность жидкости при $\tau_* < 1/2$, так как увеличение давления за фронтом ударной волны (см. (3.9)) приводит, согласно формулам (3.11), к увеличению скорости ее движения W'.

Будем искать значение давления p_* в точке контакта при $\tau = \tau_*$ в виде

$$p_* = \nu_0(\mathrm{M})\Pi_0 + \nu_1(\mathrm{M})\Pi_1 + \ldots, \tag{3.12}$$

где $\{\nu_i(\mathrm{M})\}_{i=0}^{\infty}$ — асимптотическая последовательность при $\mathrm{M} \to 0$. Подставляя разложение (3.12) в первое из соотношений (3.11), получим

$$W' = c_0\left(1 + \frac{n+1}{4}\mathrm{M}^2\nu_0(\mathrm{M})\Pi_0 + \ldots\right) \quad \text{при} \quad \tau = \tau_*.$$

Тогда условие выхода ударной волны на свободную поверхность $(2\tau_*)^{-1/2} = W'(\tau_*)/c_0$ в первом приближении приводит к соотношению

$$-\chi_1(\mathrm{M})\tau_*^{(1)} = \frac{n+1}{4}\mathrm{M}^2\nu_0(\mathrm{M})\Pi_0. \tag{3.13}$$

При $\tau \to \tau_*$ на фронте ударной волны, положение которой в нулевом приближении задается равенствами (3.10), формула (3.9) дает

$$\mathrm{M}\nu_0(\mathrm{M})\Pi_0 = -\left(2\chi_1(\mathrm{M})\tau_*^{(1)}\right)^{-1}. \tag{3.14}$$

Условие нетривиальности уравнений (3.13), (3.14) приводит к требованию $\chi_1 = \mathrm{M}^2\nu_0$, $\mathrm{M}\chi_1\nu_0 = 1$ или $\nu_0(\mathrm{M}) = \mathrm{M}^{-3/2}$, $\chi_1(\mathrm{M}) = \sqrt{\mathrm{M}}$. Решая с учетом полученных для функций $\nu_0(\mathrm{M})$, $\chi_1(\mathrm{M})$ выражений уравнения (3.13), (3.14), будем иметь $\tau_*^{(1)} = -\sqrt{(n+1)/8}$, $\Pi_0 = \sqrt{2/(n+1)}$. Следовательно, при малых М максимальное давление имеет место при $t_* = (\mathrm{M}^2/2)(1 + O(\sqrt{\mathrm{M}}))$, $\xi_* = \mathrm{M}(1 + O(\sqrt{\mathrm{M}}))$ и его величина дается формулой

$$p'_* = \sqrt{2/(n+1)}\,\rho_0 c_0^{3/2} V^{1/2}\left(1 + O(\sqrt{\mathrm{M}})\right).$$

Таким образом, при $\mathrm{M} \to 0$ давление в точках контакта в момент τ_* намного превосходит начальное ударное давление. При этом, конечно, размерные давления остаются ограниченными и стремятся к нулю вместе со скоростью проникания V.

Из вышеприведенных соотношений несложно получить формулу для скорости жидкости за фронтом ударной волны u' в момент τ_*:

$$u'_* = \sqrt{2/(n+1)}\, c_0^{1/2} V^{1/2} \left(1 + O\left(\sqrt{\mathrm{M}}\right)\right).$$

Следовательно, даже при малых скоростях проникания V скорость u'_* может быть достаточно высокой.

Формула (3.9) показывает, что при $\tau < \tau_*$ кинетическая энергия твердого тела частично переходит в упругую энергию сжатой жидкости и накапливается в ней. В момент τ_* свободная поверхность жидкости деформируется, образуется встречное течение. Упругая энергия сжатой жидкости переходит в кинетическую энергию течения. Если считать функцию $b(\tau)$ известной, то задача (3.3) эквивалентна задаче о сверхзвуковом обтекании тонкого крыла с острыми кромками [7], когда число Маха задачи равно двум. Используя метод, предложенный в [7], можно показать, что при $\tau > \tau_*$ с увеличением τ давление уменьшается в каждой точке пятна контакта.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Shiffman M., Spencer D. C.** The force of impact on a cone striking a water surface (vertical entry).— Comm. Pure Appl. Math., 1951, vol. 379, N 4.
2. **Moran J. P., Kerney K. P.** On the small-perturbation theory of water-exit and entry.— In: Developments in mechanics. Vol. 2. Oxford: Pergamon Press, 1963.
3. **Pukhnachov V. V., Korobkin A. A.** Initial asymptotics in problem of blunt body entrance into liquid.— In: 3rd Intern. Conf. on Numerical Ship Hydrodynamics. Paris, 1981.
4. **Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В.** Теоретическая гидромеханика. Ч. 1. М.: Физматгиз, 1963.
5. **Овсянников Л. В.** Лекции по основам газовой динамики. М.: Наука, 1981.
6. **Коул Дж.** Методы возмущений в прикладной математике. М.: Мир, 1972.
7. **Красильщикова Е. А.** Влияние вихревой пелены при установившемся движении крыла.— ДАН СССР, 1947, т. 58, № 6.
8. **Корн Г., Корн Т.** Справочник по математике для научных работников и инженеров. М.: Наука, 1977.
9. **Березин О. А., Гриб Л. А.** Нерегулярное отражение плоской ударной волны в воде от свободной поверхности.— ПМТФ, 1960, № 2.

Поступила 29/IX 1983 г.

УДК 532.528 : 532.58.33

УНИВЕРСАЛЬНЫЕ, НЕ ЗАВИСЯЩИЕ ОТ ФОРМЫ КАВИТАТОРА, СООТНОШЕНИЯ ПРИ МАЛЫХ ЧИСЛАХ КАВИТАЦИИ

А. Г. ПЕТРОВ, П. Б. СОТИНА

(Москва)

Рассматриваются плоская и осесимметричная задачи о кавитационном обтекании произвольного тела потоком идеальной невесомой жидкости при наличии источника на теле или в потоке. Найдены универсальные, т. е. не зависящие от формы тела, асимптотические (по числу кавитации) соотношения между силой сопротивления, длиной и шириной каверны, числом кавитации и мощностью источника.

В [1] доказано, что если из тела подавать струю жидкости против потока, то при безотрывном обтекании его возникает сила тяги, а при обтекании по схеме Кирхгофа указан случай, когда сопротивление падает в 2 раза по сравнению с сопротивлением тела без вдува, но с тем же асимптотическим поведением каверны. В [2] показано, что замена струйки источником дает хорошее приближение как для силовых характеристик, так и для определения формы свободных линий тока. Вместе с тем моделирование источником струи, вытекающей из тела, существенно упрощает исследование задачи.

В [3] на основании точного решения плоской задачи о кавитационном обтекании клина с источником проанализирован закон снижения сопротивления и получения тяги в зависимости от мощности источника и угла раствора клина.

Для осесимметричных задач единственная до настоящего времени теория, которая позволяла для малых чисел кавитации получать математически обоснованные формулы,— это асимптотическая теория тонкого тела. По этой теории в главном приближении $|\ln \sigma| \gg 1$ задача сводится к решению обыкновенного дифференциального уравне-