

ПРИБЛИЖЕНИЕ ПОЛОГОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА К ГРАНИЦЕ РАЗДЕЛА ДВУХ СРЕД

УДК 532.58

А. А. Коробкин, Т. И. Хабахпашева

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН,
630090 Новосибирск

Рассматривается плоская нестационарная задача о вертикальном движении пологого недеформируемого контура в двухслойной жидкости. В начальный момент тело находится в верхней жидкости, причем глубина нижнего слоя и расстояние от тела до границы раздела предполагаются малыми по сравнению с характерным линейным размером тела. Затем тело мгновенно приобретает постоянную вертикальную скорость, направленную вниз к границе раздела. Задача рассматривается в рамках теории двухслойной мелкой воды. Проанализированы возможность и условия появления зон перемешивания верхней и нижней сред. Предложена и численно исследована модель, описывающая такое течение.

Задача о приближении тела к границе раздела сред и последующего проникания в нижнюю жидкость имеет не только теоретический, но и прикладной интерес. Этот интерес возник в начале 60-х годов и связан с пионерской работой [1], в которой продемонстрирована роль воздуха в процессе падения тела на поверхность воды и показано, что до того, как падающее тело коснется жидкости, свободная граница будет деформирована потоком воздуха, который толкает тело перед собой. Было обнаружено, что при падении тела с уплощенным днищем прогиб свободной границы настолько значителен, что образуется каверна, которая замыкается в момент контакта тела с жидкостью. Эффект захвата воздуха при падении тел на поверхность воды позднее изучался многими авторами [2, 3]. Однако во всех теоретических и численных исследованиях воздух и вода рассматривались как несмешивающиеся среды с четкой линией раздела между ними. С точки зрения физики явления это предположение оправдано не всегда. Дело в том, что при уменьшении зазора между днищем тела и границей раздела скорость истечения воздуха из-под днища возрастает, что приводит к размыванию границы раздела и формированию зон смешения воздуха и воды [4]. Такие зоны образуются только в тех областях, где скорость истечения достаточно велика [5]. При этом в момент замыкания каверны контакт тела происходит не с водой, а со смесью вода — воздух. Воздух продолжает истекать из каверны через слой смешения, что приводит к его росту и разбрызгиванию воды.

Цель настоящей работы — вывод условий, при которых возникают зоны смешения, а также получение предварительных оценок размеров и местоположения этих зон. Движение воздуха в тонком слое между границей жидкости и приближающимся к ней твердым пологим телом обычно рассматривается в рамках одномерного приближения, а течение жидкости — в рамках линейного приближения. Прежде чем рассматривать общую нелинейную задачу о движении тела в двухслойной жидкости, полезно подробно исследовать модельный случай тонкого нижнего слоя с помощью приближения двухслойной мелкой воды. Известно, какую большую роль играет теория мелкой воды при изучении свойств общей задачи о нестационарном движении жидкости при наличии свободной границы или границ раздела слоев разной плотности [6, 7]. Можно надеяться, что исследование задачи в рамках теории мелкой воды даст возможность адекватно сформулировать задачу в общем случае.

Постановка задачи. Рассматривается вертикальное движение выпуклого симметричного пологого контура в двухслойной жидкости (рис. 1). До некоторого момента вре-

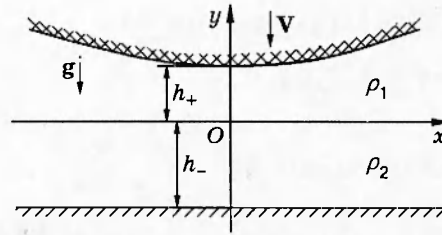


Рис. 1

мени, который принимается за начальный, тело и жидкость покоятся. Точка пересечения линии симметрии тела с границей раздела слоев принимается за начало декартовой системы координат $x'Oy'$. Здесь и ниже штрихом помечены размерные переменные. Нижний слой ограничен снизу горизонтальным недеформируемым дном. В начальный момент ($t' = 0$) тело мгновенно приобретает скорость V , направленную вертикально вниз. Требуется определить поля скоростей $\mathbf{u}^+(\mathbf{x}', t')$, $\mathbf{u}^-(\mathbf{x}', t')$ и давления $p'_+(\mathbf{x}', t')$, $p'_-(\mathbf{x}', t')$ в верхнем и нижнем слоях, а также эволюцию границы раздела $y' = \zeta'(x', t')$ при следующих предположениях: жидкость идеальная, весома, несжимаемая, течение жидкости безвихревое. Здесь и ниже знаки \pm относятся к верхнему и нижнему слоям соответственно. Система тело — жидкость находится в поле сил тяжести с ускорением свободного падения g . На границе раздела слоев действуют капиллярные силы с коэффициентом поверхностного натяжения σ . При $t' > 0$ положение тела определяется уравнением

$$y' = h_+ f(x'/L) - Vt' + h_+,$$

где L — характерный линейный размер, связанный с геометрией тела; безразмерная функция $f(x)$ описывает форму тела; h_+ — начальное расстояние от вершины тела до границы раздела; h_- — начальная глубина нижнего слоя ($h_+/h_- = O(1)$). Предполагается, что характерный горизонтальный линейный масштаб процесса L намного больше соответствующего вертикального масштаба h_+ , т. е. $\varepsilon = h_+/L \ll 1$. Это указывает на возможность использования теории двухслойной мелкой воды для описания течения. Функция $f(x)$ такая, что $f(0) = 0$, $f'(0) = 0$, $x/f(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \infty$, $f(-x) = f(x)$.

Ниже используются безразмерные переменные, которые вводятся следующим образом:

$$x' = Lx, \quad y' = h_+ y, \quad t' = h_+ t/V, \quad v' = Vv, \quad u' = V\varepsilon^{-1}u, \\ p'_+ = \rho_+ V^2 \varepsilon^{-2} p_+, \quad p'_- = \rho_- V^2 \varepsilon^{-2} p_-, \quad \zeta' = h_+ \zeta.$$

Здесь ρ_+ и ρ_- — плотность верхней и нижней сред; $u(x, y, t)$ и $v(x, y, t)$ — горизонтальная и вертикальная компоненты вектора скорости жидкости $\mathbf{u} = (u, v)$.

Течение жидкости удобно описывать в терминах функции тока $\psi(x, y, t)$ и новой искомой функции $h(x, t)$ таких, что

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad h(x, t) = -\int_0^x \zeta(\xi, t) d\xi. \quad (1)$$

Уравнения движения и граничные условия принимают в безразмерных переменных вид

$$\varepsilon^2 \psi_{xx}^+ + \psi_{yy}^+ = 0 \quad (-h_x(x, t) < y < f(x) - t + 1), \\ \varepsilon^2 \psi_{xx}^- + \psi_{yy}^- = 0 \quad (-a < y < -h_x(x, t)), \\ p_- = \mu p_+ + \beta \frac{h_{xxx}}{(1 + \varepsilon^2 h_{xx}^2)^{3/2}}, \quad \psi^- = \psi^+ = h_t(x, t) \quad (y = -h_x(x, t)), \quad (2)$$

$$\psi^+ = x \quad (y = f(x) - t + 1), \quad \psi^- = 0 \quad (y = -a),$$

$$\psi, |\nabla\psi|, h_x \rightarrow 0 \quad (|x| \rightarrow \infty, t > 0), \quad \psi = 0, \quad h = 0 \quad (t < 0),$$

где $\mu = \rho_+/\rho_-$; $0 < \mu < 1$; $a = h_-/h_+$; $\beta = \sigma h_+^3/(\rho_- V^2 L^4)$. Давление p связано с функцией тока уравнениями импульса, которые имеют один и тот же вид как для верхнего, так и для нижнего слоев:

$$u_t + uu_x + vv_y + p_x = 0, \quad \varepsilon[v_t + uv_x + vv_y] + p_y + \alpha = 0 \quad (3)$$

($\alpha = \varepsilon^3(gL/V^2)$). Условие потенциальности течения в каждом слое дает

$$u_y = \varepsilon^2 v_x. \quad (4)$$

Требуется найти приближенное решение задачи (1)–(4) при $t > 0$ и $\varepsilon \ll 1$. Заметим, что в рамках модели несжимаемой жидкости при импульсивном старте тела мгновенно устанавливаются поле скоростей течения жидкости и распределение скорости границы раздела. Эти скорости вычисляются с помощью теории удара Седова [8] и определяют начальные условия для системы (2) при $t = +0$.

Приближение мелкой воды. Решение задачи (1)–(4) будем искать в виде ряда по целым степеням параметра ε . Предполагая, что $\beta = O(1)$, $\alpha = O(1)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, получим

$$u(x, y, t) = U(x, t) + O(\varepsilon^2), \quad p(x, y, t) = -\alpha y + P(x, t) + O(\varepsilon),$$

$$\psi^+(x, y, t) = x + U^+(x, t)(y + t - f(x) - 1) + O(\varepsilon^2), \quad (5)$$

$$\psi^-(x, y, t) = U^-(x, t)(y + a) + O(\varepsilon^2), \quad h(x, t) = h^{(0)}(x, t) + O(\varepsilon^2).$$

Здесь

$$U(x, t) = \frac{Q(x, t)}{H(x, t)}, \quad Q_+ = x - h_+^{(0)}, \quad Q_- = h_-^{(0)}, \quad (6)$$

$$H_+ = f(x) - t + 1 + h_x^{(0)}, \quad H_- = a - h_x^{(0)}.$$

Динамическое условие на границе раздела сред с учетом (3)–(5) дает

$$U_t^- + U^- U_x^- = \mu[U_t^+ + U^+ U_x^+] + \alpha(1 - \mu)h_{xx}^{(0)} + \beta h_{xxxx}^{(0)} + O(\varepsilon^2 + \beta\varepsilon^2). \quad (7)$$

Подставляя в (7) вместо $U^+(x, t)$ и $U^-(x, t)$ их выражения согласно (6), получаем одно квазилинейное дифференциальное уравнение относительно функции $h^{(0)}(x, t)$. В дальнейшем индекс (0) опускается. В первом приближении

$$Ah_{tt} + 2Bh_{xt} + Ch_{xx} + \beta h_{xxxx} = D, \quad (8)$$

где

$$A = H_+^2 H_-^2 (H_+ + \mu H_-), \quad B = H_+ H_- (H_+^2 Q_- + \mu H_-^2 Q_+), \quad (9)$$

$$C = H_+^3 Q_-^2 + \mu H_-^3 Q_+^2 - (1 - \mu)\alpha H_+^3 H_-^3, \quad D = \mu H_-^3 Q_+ (2H_+ - f'(x)Q_+).$$

Уравнение (8) в силу симметрии течения рассматривается только при $x > 0$. Краевые условия для него имеют вид

$$h(0, t) = 0, \quad h_{xx}(0, t) = 0, \quad h(x, t) \rightarrow 0, \quad h_x(x, t) \rightarrow 0 \quad (x \rightarrow \infty), \quad (10)$$

а начальные условия

$$h(x, +0) = 0, \quad h_t(x, +0) = b(x). \quad (11)$$

Чтобы определить функцию $b(x)$, проинтегрируем равенство (7) по времени от $-\delta$ до δ и перейдем к пределу при $\delta \rightarrow 0$. Тогда $U^-(x, +0) = \mu U^+(x, +0)$, откуда с учетом (6) получим

$$b(x) = \frac{a\mu x}{f(x) + 1 + a\mu}. \quad (12)$$

Задача (8)–(12) содержит четыре параметра: a , μ , α , β , значимость каждого из которых определяется его величиной.

Вязкостью жидкости при выводе уравнения (7) можно пренебречь при условии

$$V \ll \max(\nu^+, \nu^-)/h_+ \quad (13)$$

(ν — кинематический коэффициент вязкости). Вклад сил поверхностного натяжения будет порядка отброшенных членов в (7) при условии $\beta = O(\varepsilon^2)$. Если же $\beta = O(1)$, то эти силы играют основную роль. Аналогичные условия для силы тяжести имеют вид $\alpha(1 - \mu) = O(\varepsilon^2)$ и $\alpha(1 - \mu) = O(1)$. Это означает, что уравнение (8) формально соответствует исходным соотношениям с точностью до $O(\varepsilon^2)$ при выполнении условий

$$V \ll \sqrt{\frac{\sigma h_+}{\rho - L^2}}; \quad (14)$$

$$V \ll \sqrt{gh_+}. \quad (15)$$

Если условие (14) не выполняется, то в (8) следует положить $\beta = 0$, если же не выполняется условие (15), то $\alpha = 0$. С другой стороны, силы поверхностного натяжения и силы тяжести играют ключевую роль при движении тела к границе раздела, если $\beta = O(1)$ и $\alpha(1 - \mu) = O(1)$ соответственно.

Смысл этих условий поясним на примере. Пусть параболический контур с радиусом кривизны в вершине $R = 100$ м находится изначально в воздухе на расстоянии $h_+ = 1$ см от свободной границы слоя воды. Тогда $L = \sqrt{Rh_+} = 1$ м и $\varepsilon = 0,01$. Вязкостью воды можно пренебречь по сравнению с другими эффектами, если скорость тела намного больше, чем 1 мм/с, что следует из (13). Неравенства (14), (15) дают $V \ll 0,85$ мм/с, $V \ll 31$ см/с соответственно. Это означает, что в практически важных случаях, когда скорость удара порядка нескольких сантиметров в секунду и выше, силами вязкости и поверхностного натяжения можно пренебречь. Если же скорость удара порядка метра в секунду и выше, то жидкость приближенно можно считать невесомой.

Качественное исследование модели. Далее рассматривается такой диапазон скоростей тела, что $\beta \ll 1$, $\alpha(1 - \mu) = O(1)$. В этом случае (8) представляет собой неоднородное квазилинейное дифференциальное уравнение второго порядка. Тип уравнения определяется знаком выражения $\Delta(x, t, \alpha, \mu, a) = B^2 - AC$. При $\Delta < 0$ уравнение имеет эллиптический тип, при $\Delta > 0$ — гиперболический. Величина Δ зависит не только от параметров задачи α , μ , a , но и от независимых переменных x , t , поэтому тип уравнения может меняться со временем. Вычисления дают

$$\Delta(x, t, \alpha, \mu, a) = (H_+ H_-)^5 (\alpha(1 - \mu)(H_+ + \mu H_-) - \mu(U^+ - U^-)^2). \quad (16)$$

Области эллиптичности, где $\Delta < 0$, появляются на участках, на которых сдвиг скорости $|U^+ - U^-|$ велик. Вблизи оси симметрии сдвиг скорости мал ($U^+(0, t) = U^-(0, t) = 0$), и $\Delta > 0$ при всех временах. При удалении от оси симметрии ($|x| \rightarrow \infty$) движение жидкости затухает, поэтому здесь также $\Delta > 0$. Следовательно, области эллиптичности уравнения (8) при $\beta = 0$ отделены от оси симметрии и имеют конечный размер. Определим ограничения на параметры задачи, при которых уравнение будет гиперболического типа в

начальный момент ($t = +0$). Условие $\Delta(x, +0, \alpha, \mu, a) > 0$ дает

$$\alpha > \mu(1 - \mu) \max_{0 < x < \infty} \left(\frac{x^2}{(f(x) + 1 + \mu a)^3} \right). \quad (17)$$

Для параболического контура ($f(x) = x^2/2$)

$$\alpha > \frac{8}{27} \frac{\mu(1 - \mu)}{(\mu a + 1)^2}. \quad (18)$$

В случае $a = 1$, $h_+ = 1$ см, $R = 100$ м, $\mu = 0,001$ (система вода — воздух) последнее неравенство приводит к ограничению на скорость тела $V \leq 18$ см/с, при выполнении которого начальные данные (11), (12) лежат в области гиперболичности уравнения (8) при $\beta = 0$ для всех значений x . При больших значениях скорости движения контура возникают зоны эллиптичности, размер которых можно приближенно использовать для оценки начальной длины и положения зоны смещения воды и воздуха. Обозначим предельное значение скорости V , при котором в (18) достигается равенство, через V_* . Тогда для левой x_l и правой x_r границ области эллиптичности имеем уравнение ($x > 0$)

$$8(V_*/V)^2(0,5x^2 + 1 + \mu a)^3 = 27(1 + \mu a)^2 x^2. \quad (19)$$

Удобно ввести следующие обозначения: $Y = x^2 + \lambda$, $\lambda = 2(1 + \mu a)$, $\varkappa = 27\lambda^2 V^2 / 4V_*^2$, с помощью которых (19) перепишем в виде $Y^3 - \varkappa Y + \varkappa \lambda = 0$. Это кубическое уравнение дает

$$\frac{x_l}{\sqrt{\lambda}} = \sqrt[3]{\frac{V}{V_*} \sin\left(\frac{\pi}{6} - \frac{1}{3} \arccos \frac{V_*}{V}\right)} - 1, \quad \frac{x_r}{\sqrt{\lambda}} = \sqrt[3]{\frac{V}{V_*} \sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{1}{3} \arccos \frac{V_*}{V}\right)} - 1. \quad (20)$$

В частности, при $0 < (V_*/V - 1) \ll 1$ получим

$$\frac{x_l}{\sqrt{\lambda}} = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2} \sqrt{3\left(\frac{V}{V_*} - 1\right)} + O\left(\left|\frac{V_*}{V} - 1\right|\right), \quad \frac{x_r}{\sqrt{\lambda}} = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2} \sqrt{3\left(\frac{V}{V_*} - 1\right)} + O\left(\left|\frac{V_*}{V} - 1\right|\right).$$

Следовательно, при $V < V_*$ начальные данные (11), (12) лежат в области гиперболичности. При $V = V_*$ это свойство нарушается в точке с координатой $x_* = \sqrt{\lambda/2} = \sqrt{1 + \mu a}$. При $V \geq V_*$ происходит взрывной рост области эллиптичности, причем при малых $(V - V_*)/V_*$ она расширяется симметрично относительно точки x_* . При $V/V_* \rightarrow \infty$

$$\frac{x_l}{\sqrt{\lambda}} \approx \frac{2}{3^{3/2}} \left(\frac{V_*}{V}\right), \quad \frac{x_r}{\sqrt{\lambda}} \approx \frac{3^{3/4}}{2^{1/2}} \left(\frac{V}{V_*}\right)^{1/2}.$$

При достаточно больших скоростях движения тела (порядка нескольких метров в секунду) область эллиптичности заполняет практически всю ось. Это указывает на то обстоятельство, что после окончания ударной стадии, на которой модель несжимаемой жидкости неприменима, формируется слой смещения, параметры которого должны входить в начальные условия для уравнения (8). Исходя из предположения, что толщина слоя смещения растет с увеличением скачка скорости $U^+(x, 0) - U^-(x, 0)$, можно утверждать, что эта толщина равна нулю на оси симметрии, где уравнение вырождается, затем растет с увеличением x , достигает своего максимального значения и медленно затухает при $x \rightarrow \infty$.

Невесомая жидкость. Важно отметить, что в случае невесомой жидкости ($\alpha = 0$), когда начальные условия лежат в области эллиптичности, деформацию границы раздела вблизи оси симметрии ($x = 0$) можно определить достаточно просто и независимо от течения во всей области. Рассмотрим (8) при $x = 0$. Для этого поделим обе части уравнения на h_t и перейдем к пределу при $x \rightarrow +0$. Получаем обыкновенное дифференциальное

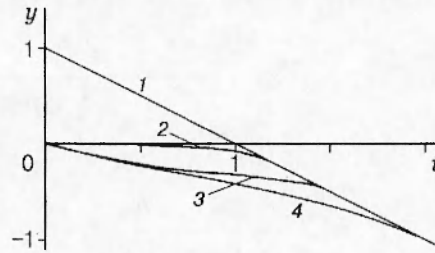


Рис. 2

уравнение относительно новой искомой функции $z(t) = \zeta(0, t)$:

$$g_1(z, t)z'' - 2g_2(z, t)(z')^2 + g_3(z)z' = g_4(z). \quad (21)$$

Здесь $g_1(z, t) = (1 - z - t)(z + a)(1 - t + a\mu - z(1 - \mu))$; $g_2(z, t) = (1 - z - t)^2 - \mu(z + a)^2$; $g_3(z) = 4\mu(z + a)^2$; $g_4(z) = -2\mu(z + a)^2$.

Начальные условия для (21) следуют из (11) и имеют вид

$$z(0) = 0, \quad z'(0) = -a\mu/(1 + a\mu).$$

Изменение зазора между границей раздела и вершиной приближающегося к ней тела $1 - t - z(t)$ при $\alpha = 0$, $\mu = 0,8$ показано на рис. 2 кривой 4, которая зависит от соотношения плотностей жидкостей и не зависит от скорости движения тела. При малых значениях μ соответствующая кривая практически совпадает с осью Ox до момента $t = 1$.

Модель с учетом обмена импульсом между слоями. Если с ростом времени тип уравнения (8) меняется, то на некоторых участках оси x задача становится неэволюционной и продолжить численный счет на основе этого уравнения нельзя. Структура течения меняется так, что уравнение (8) теряет силу. Модель, позволяющая описать такие течения, была предложена в [4]. Чтобы использовать эту модель, определим число Ричардсона

$$\text{Ri}(x, t) = \frac{\alpha(1 - \mu)}{\mu} \frac{H_+ + \mu H_-}{(U^+ - U^-)^2}$$

и дополним постановку задачи (8)–(12) ограничением

$$\text{Ri}(x, t) \geq N, \quad (22)$$

где N — параметр процесса ($N > 1$). Формула (16) дает $\Delta(x, t) = \mu(H_+H_-)^5(U^+ - U^-)^2(\text{Ri} - 1)$. Следовательно, с учетом (22) имеем $\Delta > 0$ при всех значениях x и t вплоть до момента контакта твердой поверхности с границей раздела слоев, когда $H_+ = 0$. Если начальные данные (11) лежат в области гиперболичности ($\Delta(x, 0) > 0$), то решение задачи (8)–(12) может быть построено численно вплоть до момента времени t_1 , при котором $\text{Ri}(x_1, t_1) = N$ в некоторой точке x_1 . Тогда $\text{Ri}(x, t) > N$ при $t < t_1$ и $\text{Ri}(x, t_1) > N$ при $x \neq x_1$. При $t > t_1$ существует интервал $x \in [x_l(t), x_r(t)]$, внутри которого $\text{Ri}(x, t) \equiv N$, причем $x_l(t_1) = x_r(t_1) = x_1$. Вне этого интервала $\text{Ri} > N$, и расчет производится по исходной модели (8)–(12). Такой подход имеет смысл только в том случае, когда $dx_l/dt < 0$, $dx_r/dt > 0$, что заведомо выполняется на начальной стадии формирования указанного интервала.

Внутри особой зоны полагается $\text{Ri}(x, t) = N$, что приводит к уравнению с частными производными первого порядка:

$$N \left(\frac{x - h_t}{f(x) - t + 1 + h_x} - \frac{h_t}{a - h_x} \right)^2 = \frac{\alpha(1 - \mu)}{\mu} [f(x) - t + 1 + h_x(1 - \mu) + \mu a]. \quad (23)$$

Начальные условия для (23) следуют из требования согласования решений в каждой из зон. После решения этой задачи найдем форму границы раздела в особой зоне и скорости в каждом из слоев по формулам (6). Однако теперь уравнение импульса (3) в каждом из слоев заведомо не выполняется, так как происходит обмен импульсом между слоями [4]. Поэтому для определения давления следует привлекать более общие соотношения: считаем, что интегральный закон сохранения импульса выполняется в каждом объеме $\Omega(\tilde{x}, t) = \{x, y : \tilde{x} < x < x_r(t), -a < y < f(x) + 1 - t\}$, где $x_l(t) \leq \tilde{x} \leq x_r(t)$. Давление изменяется по глубине в соответствии с гидростатическим законом и непрерывно на границе раздела, откуда $p^+(x, y, t) = -\alpha y + \Gamma(x, t)$, $p^-(x, y, t) = -\alpha y + \mu\Gamma(x, t) + \alpha(1 - \mu)\zeta(x, t)$. Для определения функции $\Gamma(x, t)$, используя интегральный закон сохранения импульса для объема $\Omega(\tilde{x}, t)$, получим формулу

$$\Gamma(\tilde{x}, t) = \Gamma(x_r, t) + \frac{1}{\mu} (H_+(\tilde{x}, t) - H_-(x_r, t))^{-1} \left\{ (1 - \mu) \int_{\tilde{x}}^{x_r(t)} h_{tt}(x, t) dx + \frac{Q_-^2(x_r, t)}{H_-(x_r, t)} - \frac{Q_-^2(\tilde{x}, t)}{H_-(\tilde{x}, t)} + \mu \left[\frac{Q_+^2(x_r, t)}{H_+(x_r, t)} - \frac{Q_+^2(\tilde{x}, t)}{H_+(\tilde{x}, t)} \right] + \mu \frac{\alpha}{2} (y_b^2(\tilde{x}, t) - y_b^2(x_r, t)) - \frac{\alpha}{2} (1 - \mu)(\zeta^2(\tilde{x}, t) - \zeta^2(x_r, t)) + \alpha a(1 - \mu)(\zeta(x_r, t) - \zeta(\tilde{x}, t)) \right\},$$

где $\Gamma(x_r(t), t)$ находится из уравнения импульса в полуполосе $x > x_r(t)$.

Рождение особой зоны. Сформулированная задача (8)–(12), (23) с выделением зон обмена импульсом между слоями является достаточно сложной, так как положения границ особых зон заранее неизвестны и должны быть определены вместе с решением всей задачи из некоторых дополнительных условий. Чтобы сформулировать эти условия, рассмотрим частный случай движения клина ($f(x) = |x|, L = h_+/k, k \ll 1$) к границе двух сред. Скорость клина постоянна и такова, что $Ri = 1$ только в двух точках $x = \pm x_*$ оси Ox в начальный момент $t = 0$. Вычисления, аналогичные тем, что производились при выводе уравнения (19), дают $x_* = \lambda, \lambda = 2(1 + \mu a)$. Скорость клина \dot{V}_* должна быть такова, что $\alpha = 8\mu(1 - \mu)/(27\lambda)$. Начальные условия (11), (12) и определение числа Ричардсона показывают, что $Ri(x, 0) = (2x + \lambda)^3 x^{-2} (27\lambda)^{-1}, Ri(x_*, 0) = 1, (\partial Ri / \partial x)(x_*, 0) = 0, (\partial^2 Ri / \partial x^2)(x_*, 0) = 2/(3\lambda^2)$. При $\mu = 0,8$ и $a = 1$ график функции $Ri(x, 0) - 1$ приведен на рис. 3. Уравнение (8) позволяет определить

$$h_{tt}(x_*, 0) = \frac{8\mu}{31\lambda^2} [a(5\lambda + 2) - (\lambda - 2)(\lambda + 1)],$$

откуда

$$\frac{\partial Ri}{\partial t}(x_*, 0) = -\frac{R}{3\lambda^2}, \quad R = \frac{1}{9} [10(1 - \mu) + \lambda(22 - \mu)].$$

Разложение $Ri(x, t)$ по целым степеням $x - \lambda$ и t вблизи точки рождения особой зоны ($x = \lambda, t = 0$) представляется в виде

$$Ri(x, t) = 1 + \frac{1}{3\lambda^2} [(x - \lambda)^2 - 2Rt] + \dots$$

Следовательно, кривая, на которой $Ri = 1$, имеет в окрестности точки $x = \lambda, t = 0$ форму параболы

$$t = \frac{1}{2R} (x - \lambda)^2, \tag{24}$$

где R — радиус кривизны в вершине параболы. Интересно отметить, что R стремится к

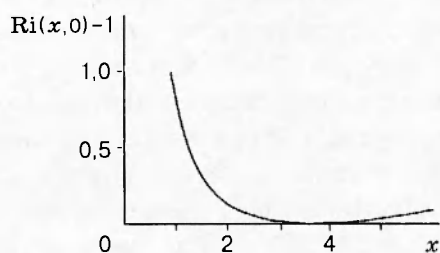


Рис. 3

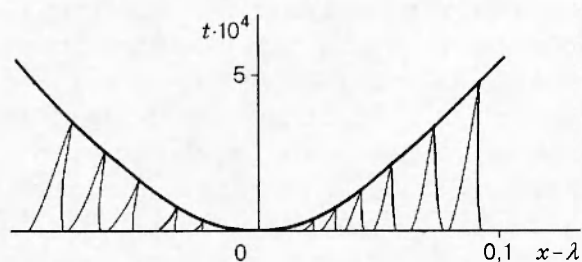


Рис. 4

конечному пределу, равному 6, при $\mu \rightarrow 0$.

В узком зазоре между параболой (24) и осью Ox при $|x - \lambda| \ll 1$ уравнение (8) имеет гиперболический тип. Соответствующее уравнение характеристик запишем в виде

$$\frac{dx}{dt} = U^- + \frac{U^+ - U^-}{H^+ + \mu H^-} \left\{ \mu H^- \pm \sqrt{\mu H^+ H^- \sqrt{Ri} - 1} \right\}. \quad (25)$$

В каждую точку границы особой зоны приходят две характеристики. На границе области гиперболичности они имеют одинаковый наклон

$$\left(\frac{dx}{dt} \right) \Big|_{Ri=1} = \frac{U^- H^+ + \mu U^+ H^-}{H^+ + \mu H^-} > 0, \quad (26)$$

как это следует из (25). В общем случае производная функции $Ri(x, t)$ по нормали к кривой, на которой $Ri = 1$, отлична от нуля. Поэтому при удалении от границы в область гиперболичности зазор между характеристиками растет пропорционально расстоянию до границы в степени $3/2$. Вблизи точки $x = \lambda$, $t = 0$ уравнение (25) можно заменить приближенным

$$\frac{dx}{dt} = b_1 - b_2(x - \lambda) \pm b_3 \sqrt{(x - \lambda)^2 - Rt} + \dots \quad (27)$$

$$\left(b_1 = \frac{2}{9\lambda} [2\mu(1 + \lambda) + \lambda - 2], \quad b_2 = \frac{4\mu}{27\lambda^2} (a + 3), \quad b_3 = \frac{4(1 - \mu)}{9\sqrt{3}\lambda^2} \sqrt{\mu a(1 + \lambda)} \right).$$

Качественное поведение характеристик, определяемых уравнением (27), при $\mu = 0,8$, $a = 1$, $|x - \lambda| < 0,1$, $0 < t < 6 \cdot 10^{-4}$ показано на рис. 4.

С учетом проведенного анализа эволюция процесса приближения клина к границе раздела слоев может быть описана следующим образом. Особые зоны появляются в начальный момент в точках $x = \pm\lambda$ и расширяются очень быстро. Для внешних границ зон ($x = \pm x_r(t)$) можно указать такой момент времени t_r , что в области $|x| > x_r(t)$, $0 < t < t_r$ течение жидкости не зависит от процессов, протекающих в особых зонах. При $t < t_r$ характеристики с оси Ox приходят на кривые $x = \pm x_r(t)$ и определяют решения на них.

На внутренние границы особых зон ($x = x_l(t)$) характеристики приходят всегда. Важно отметить, что положение внутренних границ особых зон при $t > 0$ не зависит от процессов, протекающих в этих зонах. Поэтому течение жидкости (но не давление) во внутренней области ($|x| < x_l(t)$) может быть определено независимо.

Характеристики уравнения (23) при $N = 1$, $\alpha = 8\mu(1 - \mu)/(27\lambda)$, $\lambda = 2(1 + \mu a)$ имеют положительный наклон

$$\frac{dx}{dt} = \frac{U^+ H^- + U^- H^+}{H^+ + H^-} + \frac{1}{2} (1 - \mu) \frac{H^+ H^- (U^+ - U^-)}{(H^+ + H^-)(H^+ + \mu H^-)}. \quad (28)$$

Из уравнения (28) видно, что, по крайней мере на начальной стадии рождения особых зон, решения при $x > x_r(t)$ и $x_l(t) < x < x_r(t)$ гладко сопрягаются. При $H^+ \rightarrow 0$ характеристики (25) и (28) имеют одинаковый наклон, равный $U^+(x, t)$.

Численные результаты. Начально-краевая задача (8)–(12) с ограничением (22) не является классической. Поэтому вначале было проведено ее численное исследование и выявлены основные особенности процесса приближения пологого тела к границе раздела сред. Были рассмотрены два случая: 1) система вода — несжимаемый газ с соотношением плотностей $\mu = 0,01$ (плотность газа в 10 раз больше плотности воздуха); 2) система вода — керосин с $\mu = 0,8$. В первом случае скорость тела принималась равной 5 см/с, а во втором — 5 мм/с. Во всех расчетах $h_- = 2$ см, $h_+ = 1$ см, тело представляет собой параболический контур с радиусом кривизны в вершине 100 м. При этом $L = 1$ м, $a = 2$, $\varepsilon = 0,01$. Отметим, что при таком значении параметров условие (14) не выполнено, следовательно, силы поверхностного натяжения можно не учитывать и в уравнении (8) положить $\beta = 0$. Результаты расчетов представлены в безразмерных переменных, которые были введены выше. Расстояние по вертикали от 0 до 1 соответствует 1 см, а по горизонтали — 1 м.

Для решения задачи (8)–(12) в области гиперболичности плоскости x, t для функций $h_x(x, t)$, $h_l(x, t)$ применялся метод характеристик. На характеристиках с наклоном

$$\frac{dt_{1,2}}{dx} = \frac{B \pm \sqrt{\Delta(x, t)}}{C}$$

выполнены условия

$$A \frac{\partial h_l}{\partial \tau} + \frac{dt_{1,2}}{dx} C \frac{\partial h_x}{\partial \tau} = D,$$

определяющие $h_x(x, t)$ и $h_l(x, t)$ в точке пересечения характеристик.

В начале движения тела значение Ri , а следовательно, и значение $\Delta(x, t)$ велики, и семейства характеристик имеют различный наклон. По мере приближения к особой зоне $\Delta(x, t)$ уменьшается, и наклоны характеристик сближаются. На границе особой зоны ($\Delta(x, t) = 0$) характеристики параллельны, что не позволяет продолжить счет при значениях Ri , близких к 1. Как только в некоторой точке значение Ri становится равным выбранному N , то из этой точки строится одна характеристика дифференциального уравнения первого порядка (23) (см., например, [9, разд. 10.2]), по которой переносятся значения h_x и h_l . Легко показать, что при больших скоростях в верхнем слое наклоны характеристик уравнений (8) и (23) на границе особой зоны совпадают.

На рис. 2 показано взаимное расположение вершины тела (линия 1) и центральной точки границы раздела при $\mu = 0,01$ (линия 2) и $\mu = 0,8$ (линии 3, 4), где линия 3 соответствует невесомой жидкости, а 2, 4 — жидкости, находящейся в поле тяжести.

На рис. 5 приведены результаты расчетов для первого случая. Видно, что присутствие верхнего слоя не оказывает существенного влияния на деформацию границы раздела. До момента времени $t_1 = 0,97$ уравнение (8) имеет гиперболический тип. В момент $t_1 = 0,97$ впервые $\Delta(x_1, t_1) = 0$ при $x_1 = 0,35$ и тип уравнения (8) меняется в этой точке.

Во втором случае уравнение (8) имеет гиперболический тип при $t < 1,58$. Форма границы и положение контура в моменты $t = 0,8$ и $1,55$ показаны на рис. 6, а и б соответственно. Рис. 6, б демонстрирует, что при $0,75 < x < 0,95$ и $t = 1,55$ происходит сужение верхнего слоя, что ведет к увеличению скорости течения в нем на этом участке и, как следствие, к смене типа уравнения (8). Гиперболичность уравнения впервые нарушается при $x = 0,93$.

Для второго случая на рис. 7 в плоскости (x, t) изображены кривые 1–3, на которых $Ri = 5; 10; 15$. При $x = 0$ и $x \rightarrow \infty$ разность скоростей в слоях равна нулю, и, следовательно, $Ri = \infty$. Вблизи оси $x = 0$ при $t > 1,8$ изменение Ri при малых изменениях x или t велико. Ниже кривой $Ri = 1$ уравнение (8) имеет гиперболический тип, выше —

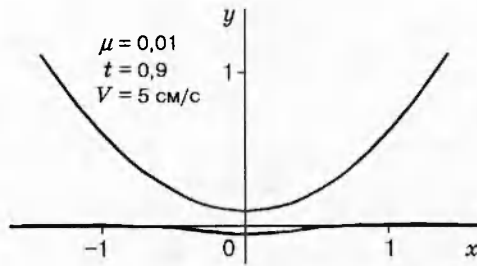


Рис. 5

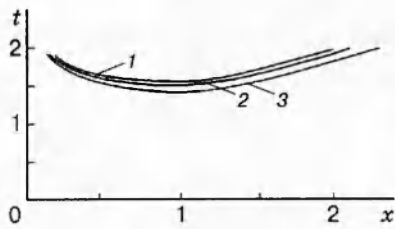


Рис. 7

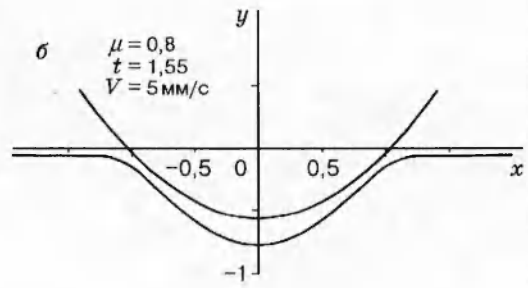
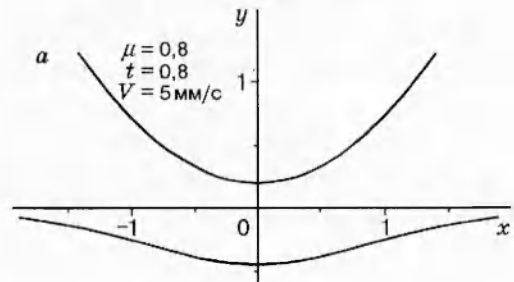


Рис. 6

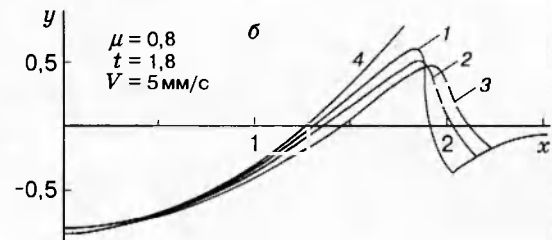
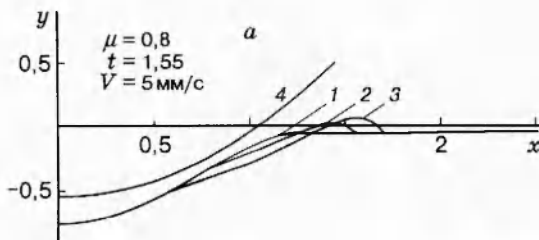


Рис. 8

эллиптический. Кривые $Ri(x, t) = N (N \leq 1)$ являются пространственно-подобными. Из области гиперболичности в каждую точку этих кривых приходят две характеристики уравнения (8), полностью определяющие решение. В особую зону из каждой точки кривых $Ri = N$ выходит одна характеристика уравнения (23), которая остается в пределах зоны на рассматриваемом интервале времени.

На рис. 8 представлены результаты расчетов для системы вода — керосин по модели [4], внутри которой выполняется уравнение (23) с $Ri = 5; 10; 15$ (линии 1–3, линия 4 соответствует положению тела). Видно, что при уменьшении предельного значения Ri толщина слоя верхней жидкости в особой зоне уменьшается, возвышение границы раздела слоев увеличивается, а затем более резко падает. Предельная форма границы раздела при $Ri \rightarrow 1$, по-видимому, имеет почти вертикальный наклон вблизи $x = x_\tau(t)$.

Капиллярные силы ($\beta \neq 0$) приводят к сглаживанию формы границы раздела. При малых β этими силами можно пренебречь в первом приближении почти всюду, за исключением зон, в которых кривизна границы раздела велика. Такие зоны следует выделять в ходе численного решения задачи и строить внутри них «внутренние» асимптотики решения. В частности, рис. 8 показывает, что на внешней границе особых зон наклоны границы раздела не согласованы между собой. Поэтому вблизи границ области обмена импульсом капиллярные силы необходимо принимать во внимание независимо от параметра β . Малое значение β определяет размер окрестности границы особой зоны, в которой силы поверхностного натяжения важны. Если β имеет порядок единицы, то капиллярные силы являются определяющими во всей области течения. Уравнение (8) при этом параболическое

и напоминает уравнение изгиба балки при наличии растягивающих усилий на ее концах. Такой случай представляет значительный интерес и требует отдельного рассмотрения.

Течение в узком слое под телом. Исследуемый процесс заканчивается в момент контакта поверхности тела с границей раздела слоев, если такой контакт имеет место, или в момент удара тела по дну, если верхний слой имеет ненулевую толщину при $t < 1 + a$. В проведенных расчетах для параболического контура верхний слой существует при всех временах. В процессе движения он утоньшается, следуя форме тела. Это позволяет использовать приближенную схему описания течения: на участке $|x| < \hat{x}$, где $H_+ \ll H_-$, для расчета параметров потока в нижнем слое в первом приближении пренебрегаем наличием верхнего слоя. Отсюда

$$U_-(x, t) \approx \frac{x}{a - t + 1 + f(x)}, \quad H_-(x, t) \approx a + 1 + f(x) - t, \quad h_{xx}(x, t) \approx -f'(x).$$

Динамическое условие на границе раздела слоев (7) приводит к уравнению относительно $U_+(x, t)$ в области гиперболичности $|x| < x_l(t)$:

$$U_t^+ + U^+ U_x^+ = \frac{1}{\mu} F(x, t) \tag{29}$$

$$\left(F(x, t) = \frac{2}{x} U_-^2(x, t) - \frac{1}{x} f'(x) U_-^3(x, t) + \alpha(1 - \mu) f'(x) \right).$$

Для параболического контура ($f(x) = x^2/2$) непосредственно проверяется, что $F(x, t) \geq 0$. Жидкие частицы верхнего слоя движутся по траекториям $dx/dt = U_+(x, t)$, скорость их движения изменяется по закону

$$\frac{dU_+}{dt} = \frac{F(x, t)}{\mu}.$$

Здесь d/dt — оператор дифференцирования вдоль траектории. Следовательно, при удалении от оси симметрии жидкие частицы ускоряются.

В зоне обмена импульсом между слоями ($x_l(t) < |x| < x_r(t)$) условие (7) заменяется равенством $Ri(x, t) = N$, которое дает

$$U^+(x, t) = U^-(x, t) + \sqrt{\alpha(1 - \mu)H_-/N}, \tag{30}$$

где знак $+$ выбран из физических соображений: скорость в верхнем слое выше, чем в нижнем. Положение внутренней границы особой зоны ($x = x_l(t)$) определяется из условий равенства на этой границе скоростей, определяемых по формулам (29) и (30). Расчеты, проведенные по полной модели (рис. 8), показывают, что $\hat{x}(t) < x_r(t)$. Поэтому на рассматриваемом этапе внешняя граница особой зоны ($x = x_r(t)$) вычисляется по модели (8)–(12).

В модели [4] с обменом импульсом между слоями массоперенос и перемешивание не учитываются, поэтому для толщины верхнего слоя H^+ имеет место приближенное уравнение:

$$H_t^+ + (U^+ H^+)_x = 0. \tag{31}$$

В частности, (29) и (31) дают $H^+(0, t) \approx C_1(a + 1 - t)^q + \dots$ при $t \rightarrow a + 1$ с константой C_1 , которая определяется из условия согласования с численным решением, $q = \sqrt{1/4 + 2/\mu} - 1/2$.

Итак, рассмотренная модель может быть рекомендована для расчетов движения полых тел вблизи границ раздела сред. В ней верхний слой существует при всех временах, но можно выделить такую область вблизи вершины тела, где он очень тонкий. Размер этой

области слабо зависит от предельного числа Ричардсона (рис. 8). Наличие тонкого верхнего слоя слабо влияет на течение жидкости в нижнем слое и на распределение давления вдоль поверхности тела [10].

Авторы искренне признательны В. Ю. Ляпидевскому за многочисленные консультации и полезные обсуждения.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Международного научного фонда и Правительства России (грант NJHX100).

ЛИТЕРАТУРА

1. **Chuang S. L.** Experiments on flat-bottom slamming // J. Ship Research. 1966. V. 10, N 1. P. 10–17.
2. **Григолюк Э. И., Горшков А. Г.** Взаимодействие упругих конструкций с жидкостью. Л.: Судостроение, 1976.
3. **Iwanowski B., Yao T.** Numerical simulation of air flow beneath a rigid body falling on a deformable surface // J. Soc. Naval Arch. Japan. 1992. V. 172. P. 465–475.
4. **Ляпидевский В. Ю.** Параметризация процессов перемешивания в неоднородной жидкости // Нелинейные проблемы теории поверхностных и внутренних волн. Новосибирск: Наука, 1985. С. 127–164.
5. **Miyamoto T., Tanizawa K.** A study of the impact on ship bow (2nd Report) // J. Soc. Naval Arch. Japan. 1985. V. 158. P. 270–279.
6. **Овсянников Л. В.** Лагранжевы приближения в теории волн // Нелинейные проблемы теории поверхностных и внутренних волн. Новосибирск: Наука, 1985. С. 10–77.
7. **Макаренко Н. И.** Обоснование трехмерной и двухслойной плоской моделей мелкой воды // Там же. С. 78–97.
8. **Седов Л. И.** Механика сплошной среды. М.: Наука, 1970. Т. 1, 2.
9. **Корн Г., Корн Т.** Справочник по математике. М.: Наука, 1968.
10. **Korobkin A.** Impact of two bodies one of which is covered by a thin layer of liquid // J. Fluid Mech. 1995. V. 300. P. 43–58.

Поступила в редакцию 10/IV 1996 г.
