

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ТЕЧЕНИЯ КУЭТТА В ГРАНУЛИРОВАННЫХ СРЕДАХ

УДК 532.526

Ю. А. Березин, Л. А. Сподарева

Институт теоретической и прикладной механики СО РАН, 630090 Новосибирск

Введение. Гранулированными называются среды, состоящие из большого числа твердых частиц — гранул, пространство между которыми заполнено газом и/или жидкостью. Интерес к таким средам определяется их широкой распространенностью в природе и технологических процессах (снежные и каменные лавины, грязевые сели, транспортировка сыпучих материалов, разработка минерального сырья, химическая промышленность, порошковая металлургия).

Основы современных представлений о механике гранулированных сред изложены во многих работах (см., например, [1–3]). Развитие таких идей было начато в [1], где представлены результаты первых лабораторных экспериментов, даны оценки, объясняющие поведение не слишком плотных гранулированных течений со сдвигом, и показано, что давление и напряжение сдвига пропорциональны квадрату скорости сдвига, если угол динамического трения от нее не зависит. Эта квадратичная зависимость свидетельствует о том, что при определенных условиях гранулированная среда ведет себя как неньютоновская жидкость, так как в ньютоновских жидкостях напряжение и скорость сдвига связаны линейным соотношением.

В зависимости от плотности среды и скорости сдвига выделяются два режима течений сухого гранулированного материала:

1) квазистатический, соответствующий большим плотностям и малым скоростям сдвига, в котором гранулы находятся в постоянном тесном контакте друг с другом; поведение материала достаточно хорошо описывается законом Мора — Кулона;

2) инерционный, соответствующий меньшим плотностям и большим скоростям сдвига, в котором между гранулами в среднем существуют некоторые зазоры и взаимодействие гранул обусловлено их непрерывными столкновениями друг с другом. При этом принято считать, что средний свободный пробег гранул не превосходит их характерного размера. Предельный случай такого режима с большими пробегами называют иногда трансляционным.

Считается общепринятым, что для изучения гранулированных течений в инерционном режиме могут быть использованы законы сохранения массы, импульса и энергии, дополненные некоторыми замыкающими соотношениями. Соударения между гранулами играют очень важную роль, поэтому кроме энергии макроскопического движения необходимо учитывать энергию хаотического движения гранул. Ее по аналогии с газом можно назвать тепловой энергией и ввести температуру как меру интенсивности хаотического движения гранул. Столкновения в таких средах всегда неупругие, вследствие чего в балансе энергии нельзя не учитывать потерю энергии гранулированного материала.

Замыкающие соотношения связывают давление, вязкость, теплопроводность и уменьшение энергии хаотического движения с плотностью и температурой среды. Соответствующие выражения, выведенные по аналогии с кинетической теорией газа, представлены в [4–6]. Уравнения сплошной среды с такими дополнительными соотношениями были использованы для решения ряда задач, в том числе задач о линейной устойчивости гранулированных сред, макроскопически неподвижных либо движущихся в условиях постоянного сдвига скоростей [7–11]. Конечно, гранулированные среды во многих отношениях

отличаются от газов, например, размерами гранул по сравнению с размерами молекул, отсутствием дальнедействующих сил притяжения, в связи с чем, возможно, сложные построения, сопутствующие развитию указанных кинетических теорий, вряд ли полностью оправданы. Нам представляется поэтому весьма привлекательным феноменологический подход [12], основанный на анализе размерностей физических величин, входящих в замыкающие соотношения. Напомним вкратце суть этого подхода.

Давление есть изменение импульса в единицу времени на единицу площади. При каждом соударении импульс гранулы меняется на величину порядка mv_T , где v_T — среднеквадратичная (тепловая) скорость хаотического движения гранул. Умножив эту величину на среднюю частоту соударений v_T/s (s — средний свободный пробег гранул ($s \ll d$)) и разделив на квадрат характерного размера d , получим $p \simeq \rho v_T^2 d/s$ (ρ — плотность рассматриваемого материала). Коэффициент динамической вязкости — это плотность, умноженная на площадь и поделенная на время, т. е. $\mu \simeq \rho v_T d^2/s$. Коэффициент теплопроводности, связанный с процессом обмена средней энергией хаотического движения гранул при их соударениях, определяется по порядку величины так же, как и коэффициент динамической вязкости. Аналогично получается скорость уменьшения энергии хаотического движения. На основе такой модели в [12] решен ряд задач механики гранулированных сред: «остывание» однородной среды; определение стационарного состояния, возникающего при компенсации стока тепловой энергии вследствие неупругих столкновений притоком энергии извне; стационарное течение Куэтта с учетом и без учета силы тяжести.

В модели, представленной в [12], гранулы предполагаются абсолютно жесткими и время их контакта при соударениях бесконечно малым. Обобщение этой модели приведено в [13], где учитываются сжимаемость среды и деформация гранул при столкновениях, что делает время контакта гранул друг с другом конечным. Иными словами, в модель вводятся переменная плотность $\rho(d/(d+s))^3$ и время контакта гранул при соударениях $t_c = \alpha d/c$, где $c = (E/\rho)^{1/2}$, E — модуль Юнга, α — безразмерный параметр порядка единицы. Указанное время контакта есть время, которое необходимо плоской волне деформации, чтобы пересечь диаметр гранулы туда и обратно. Полное время между соударениями определяется тогда как $t_e = t_f + t_c$ ($t_f = s/v_T$ — время свободного пробега гранул), и в [13] давление, коэффициенты переноса и сток тепловой энергии получаются из соответствующих величин [12] заменой t_f на t_e . Показано, что учет конечного времени контактов замедляет процессы релаксации.

В настоящей работе изучаются дисперсионные свойства гранулированной среды, описываемой моделью [13].

1. Исходные уравнения. Рассматривая гранулированную среду как континуум, запишем уравнения для плотности, макроскопической скорости и энергии хаотического движения или температуры гранул:

$$\frac{d\rho}{dt} = -\rho \frac{\partial u_i}{\partial x_i}, \quad \rho \frac{du_i}{dt} = -\frac{\partial P_{ij}}{\partial x_j}, \quad \frac{3}{2} \rho \frac{dT}{dt} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\kappa \frac{\partial T}{\partial x_i} \right) - \bar{F}_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - I. \quad (1.1)$$

Тензор напряжений имеет вид

$$P_{ij} = \left[p - \left(\zeta - \frac{2\mu}{3} \right) \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right] \delta_{ij} - \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \quad (1.2)$$

где $d/dt = \partial/\partial t + u_i \partial/\partial x_i$; $\mathbf{u} = (u, v, w)$ — макроскопическая скорость; p — давление; $T \equiv v_T^2$ — температура гранул; ζ — коэффициент объемной или второй вязкости; κ — коэффициент теплопроводности; I — потери тепловой энергии при неупругих соударениях гранул в единице объема за единицу времени. Как обычно, по дважды повторяющимся индексам подразумевается суммирование.

Уравнения (1.1) необходимо дополнить замыкающими соотношениями, которые свя-

зывают давление, коэффициенты переноса, потери тепловой энергии с плотностью, температурой и, возможно, другими функциями, характеризующими состояние среды. Именно замыкающие соотношения конкретизируют модель, принимаемую для изучения процессов в гранулированных средах.

Как отмечено во введении, будем использовать феноменологические соотношения для давления, коэффициентов вязкости и диффузии, а также скорости уменьшения тепловой энергии гранул, основанные на анализе размерностей входящих в исходные уравнения физических величин. Если, как это сделано в [13], считать плотность зависящей от средней длины свободного пробега и предполагать время контактов гранул при столкновениях конечным, то нужные формулы с точностью до безразмерных коэффициентов порядка единицы имеют вид

$$\begin{aligned} \rho &= m(d+s)^{-3}, & p &= mv_T(d+s)^{-2}t_e^{-1}, \\ \mu, \zeta, \varkappa &= m(d+s)^{-1}t_e^{-1}, & I &= m(1-e^2)v_T^2(d+s)^{-3}t_e^{-1}. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Здесь $m = \rho_p d^3$; $t_e = t_f + t_c$; $t_f = s/v_T$; $t_c = \alpha d/c$; e — коэффициент восстановления скорости гранул при неупругих столкновениях. В случае абсолютно твердых гранул ($E, c \rightarrow \infty$) формулы (1.3) переходят в формулы [12]. Таким образом, давление, коэффициенты переноса импульса и тепла, а также убывание энергии хаотического движения гранул являются функциями средней длины свободного пробега и температуры; физические свойства вещества входят в указанные характеристики среды через модуль Юнга и коэффициент восстановления. Функции $p, \mu, \zeta, \varkappa, I$ убывают с увеличением длины свободного пробега, а зависимость от температуры более сложная.

2. Постановка задачи о дисперсионных свойствах среды. Следуя обычной процедуре, для изучения дисперсионных свойств любой среды исходные уравнения линейризируются относительно некоторого равновесного состояния, возмущенного малыми изменениями искоемых функций. Если представить решение линейризованной системы уравнений для возмущений в виде суперпозиции плоских волн, то условие существования нетривиального решения приводит к дисперсионному уравнению $\omega = \omega(k)$, определяющему зависимость частоты плоских волн от их волнового числа. Анализ корней этого уравнения позволяет делать выводы об устойчивости или неустойчивости исходного равновесного состояния. Если при вещественных волновых числах частота комплексная, то $\exp i(\mathbf{kr} - \omega t) = \exp(\text{Im}\omega t) \exp i(\mathbf{kr} - \text{Re}\omega t)$ и легко видеть, что положительный знак величины $\text{Im}\omega \equiv \gamma$ означает рост амплитуды возмущений, а отрицательный — уменьшение амплитуды. В первом случае равновесное состояние среды неустойчиво, во втором устойчиво.

Соударения гранул являются неупругими, поэтому состояние, соответствующее макроскопически неподвижной среде, не будет равновесным. Действительно, в простейшем случае однородной среды третье уравнение из (1.1) сводится к уравнению $dT/dt = -2I/3\rho$. Так как величина I положительная, то температура уменьшается с течением времени, асимптотически приближаясь к нулю; при этом к нулю стремятся и все коэффициенты переноса. Следовательно, нетривиальная ситуация возможна лишь тогда, когда имеется механизм восполнения энергии хаотического движения гранул. Он возникает, в частности, в сдвиговых течениях типа Куэтта, где диссипация тепловой энергии гранул компенсируется работой внешних сил, которые обеспечивают существование течения со сдвигом.

Рассмотрим течение гранулированной среды с постоянным сдвигом между двумя пластинами, движущимися параллельно друг другу с разными скоростями. В стационарном случае макроскопическая скорость имеет одну компоненту, которая зависит от координаты y , т. е. $\mathbf{u}_0 = (u_0(y), 0, 0)$. Уравнение непрерывности и z -компонента уравнения движения удовлетворяются тождественно, а x -, y -компоненты уравнения движения и уравнение для

температуры дают

$$\frac{dp_0}{dy} = 0, \quad \frac{d}{dy} \left(\mu_0 \frac{du_0}{dy} \right) = 0, \quad \frac{d}{dy} \left(\varepsilon_0 \frac{dT_0}{dy} \right) + \mu_0 \left(\frac{du_0}{dy} \right)^2 = I_0. \quad (2.1)$$

Простейшее решение уравнений (2.1), соответствующее течению с постоянным сдвигом, имеет вид

$$\rho_0 = \text{const}, \quad \frac{du_0}{dy} = \Gamma = \text{const}, \quad p_0 = mv_T(d + s_0)^{-2} t_e^{-1}, \quad \mu_0, \zeta_0, \varepsilon_0 = m(d + s_0)^{-1} t_e^{-1}, \quad (2.2)$$

$$v_T^2 = T_0 = (1 - e^2)^{-1} (d + s_0)^2 \Gamma^2, \quad I_0 = m(1 - e^2) v_T^2 (d + s_0)^{-3} t_e^{-1}.$$

Здесь сдвиг Γ — постоянная величина. Поскольку $\rho = m(d + s_0)^{-3}$, то однородность плотности означает постоянство длины свободного пробега.

Выведем среду из стационарного состояния (2.2), добавив ко всем функциям малые возмущения, т. е. положим $f(\mathbf{r}, t) = f_0 + f'(\mathbf{r}, t)$, $f' \ll f_0$, подставим эти выражения в уравнения (1.1)–(1.3) и оставим величины только первого порядка малости. Далее штрихи будут опущены. Коэффициент u_0 в полученной системе есть функция координаты y , что усложняет анализ, поэтому рассмотрим возмущения, распространяющиеся перпендикулярно плоскости сдвига x, y . Иными словами, ограничимся случаем возмущений с волновым вектором $\mathbf{k} = (0, 0, k)$, представив их в виде $\sum A_k \exp i(kz - \omega t)$. Тогда, поскольку $\partial f / \partial x = 0$, $\partial f / \partial y = 0$, упомянутая система линейных уравнений сводится к двум подсистемам, одна из которых содержит функции u, v , другая — функции ρ, w, T :

$$\rho_0(u_t + \Gamma v) = \mu_0 u_{zz}, \quad \rho_0 v_t = \mu_0 v_{zz}; \quad (2.3)$$

$$\rho_t = -\rho_0 w_z, \quad \rho_0 w_t = -p_z + (\zeta_0 + 4\mu_0/3) w_{zz}, \quad (3/2)\rho_0 T_t = \varepsilon_0 T_{zz} - p_0 w_z + \Gamma^2 \mu - I. \quad (2.4)$$

Решение ищем в виде плоских волн, поэтому в уравнениях (2.3), (2.4) полагаем $\partial / \partial t = -i\omega$, $\partial / \partial z = ik$.

Из системы (2.3) получим $v = 0$, $\omega = -i(\mu_0/\rho_0)k^2$, что соответствует затухающей нераспространяющейся гармонике с декрементом $\gamma = -\mu_0 k^2 / \rho_0$, в которой имеется только компонента скорости u , параллельная скорости стационарного течения.

Система (2.4) описывает продольные волны (по отношению к волновому вектору возмущений), в которых меняются плотность, компонента скорости вдоль волнового вектора и температура. Из уравнения непрерывности следует соотношение между возмущениями скорости и плотности (или средней длины свободного пробега): $\rho = k\rho_0 w / \omega$, $w = -3\omega s(d + s_0)^{-1} k^{-1}$. Давление, коэффициенты переноса и скорость уменьшения энергии хаотического движения гранул (1.3) являются функциями средней длины свободного пробега и температуры, поэтому запишем возмущения в виде

$$p, \mu, I = (p_1, \mu_1, I_1)s + (p_2, \mu_2, I_2)T, \quad p_1, \mu_1, I_1 = \frac{\partial(p, \mu, I)}{\partial s}, \quad p_2, \mu_2, I_2 = \frac{\partial(p, \mu, I)}{\partial T}.$$

Подставляя эти выражения в систему (2.4) и приравнявая определитель к нулю, получим кубическое уравнение

$$\gamma^3 + (ak^2 - b)\gamma^2 + k^2(c_1 k^2 - d_1)\gamma - k^2(e_1 k^2 + f_1) = 0, \quad (2.5)$$

где

$$\gamma = -i\omega, \quad a = (2/3\rho_0)(3\rho_0\nu_0 + \varepsilon_0), \quad \nu_0 = (4\mu_0/3 + \zeta_0)/\rho_0, \quad c_1 = 2\varepsilon_0\nu_0/3\rho_0,$$

$$b = (2/3\rho_0)(\mu_2\Gamma^2 - I_2), \quad d_1 = (2/3\rho_0)(p_1(d + s_0)/2 - p_0 p_2/\rho_0 + 3\rho_0\nu_0 b), \quad (2.6)$$

$$e_1 = 2\varepsilon_0 p_1(d + s_0)/9\rho_0^2, \quad f_1 = 2(d + s_0)(p_2(\mu_1\Gamma^2 - I_1) - p_1(\mu_2\Gamma^2 - I_2))/9\rho_0^2;$$

$$\begin{aligned}
p_1 &= -m(d + 3s_0 + 2v_T t_c)(d + s_0)^{-3}, & p_2 &= m(t_f + t_c/2)v_T^{-1}t_e^{-2}(d + s_0)^{-2}, \\
\mu_1 &= -m(d + 2s_0 + v_T t_c)v_T^{-1}t_e^{-2}(d + s_0)^{-2}, & \mu_2 &= (1/2)ms_0v_T^{-3}t_e^{-2}(d + s_0)^{-1}, \\
I_1 &= -m(1 - e^2)v_T(d + 4s_0 + 3v_T t_c)(d + s_0)^{-4}t_e^{-2}, \\
I_2 &= (1/2)m(1 - e^2)(3t_f + 2t_c)(d + s_0)^{-3}t_e^{-2}.
\end{aligned} \tag{2.7}$$

В дисперсионном уравнении (2.5) вещественные части корней γ соответствуют инкременту ($\gamma > 0$) или декременту ($\gamma < 0$) изменения амплитуды возмущений с течением времени, а мнимые — их частоте. Решение этого уравнения позволяет установить области устойчивости или неустойчивости рассматриваемого гранулированного течения в зависимости от параметров среды и волновых чисел или длин волн возмущений.

3. Анализ решений дисперсионного уравнения. Поскольку исследуется задача об устойчивости гранулированного течения в рамках механики сплошных сред, то минимальная длина волны рассматриваемых возмущений должна быть значительно больше диаметра гранул или, более точно, характерного размера, равного сумме диаметра гранул и средней длины свободного пробега. Поэтому $\lambda_{\min} = A(d + s_0)$ ($A \gg 1$) и максимальное волновое число, не нарушающее пределов применимости модели сплошной среды, есть $k_{\max} = 2\pi A^{-1}(d + s_0)^{-1}$.

Так как дисперсионное уравнение кубическое, то оно имеет три корня для трех гармоник, которые могут существовать в рассматриваемой среде. Изучим прежде всего поведение длинноволновых возмущений с малыми волновыми числами ($k \ll 1$), когда решение можно получить аналитически. Для этого представим инкремент в виде $\gamma = \gamma_0 + k\gamma_1 + k^2\gamma_2 + \dots$. Ограничиваясь величинами до второго порядка малости включительно и подставив разложения для γ в дисперсионное уравнение (2.6), соберем отдельно слагаемые нулевого, первого и второго порядков. В нулевом порядке $\gamma_0^3 - b\gamma_0^2 = 0$, откуда $\gamma_0^{(1)} = b$, $\gamma_0^{(2,3)} = 0$, где верхние индексы обозначают номер гармоники возмущения. В первом порядке по волновому числу $\gamma_0\gamma_1(\gamma_0 - 2b/3) = 0$. Подставляя сюда $\gamma_0^{(1)}$, находим $\gamma_1^{(1)} = 0$, а для определения двух других корней $\gamma_1^{(2,3)}$ необходимо обратиться ко второму приближению. Во втором порядке по волновому числу имеем уравнение

$$3\gamma_0(\gamma_1^2 + \gamma_0\gamma_2) + a\gamma_0^2 - b(\gamma_1^2 + 2\gamma_0\gamma_1) - d_1\gamma_0 - f_1 = 0,$$

подставляя в которое $\gamma_0^{(2,3)} = 0$, $\gamma_0^{(1)} = b$, получим

$$\gamma_1^{(2,3)} = \pm i\sqrt{f_1/b}, \quad \gamma_1^{(1)} = (d_1b + f_1 - ab^2)/b^2.$$

Возвращаясь к обозначениям (2.6), (2.7), запишем найденные корни дисперсионного уравнения в длинноволновой области. Для первой гармоники запишем

$$\gamma^{(1)} = -2(1 - e^2)/3t_e + O(k^3), \tag{3.1}$$

откуда следует, что первая гармоника является нераспространяющейся ($\omega = 0$) и затухающей ($\gamma < 0$). Если среднее время контакта гранул при столкновениях t_c значительно меньше времени среднего пробега t_f , то модуль декремента растет с уменьшением коэффициента восстановления как $(1 - e^2)^{1/2}$; декремент первой гармоники прямо пропорционален тепловой скорости движения гранул и обратно пропорционален среднему свободному пробегу.

Для второй и третьей гармоник имеем

$$\gamma^{(2,3)} = \pm ik(d + s_0)^{1/2}(d + s_0 + v_T t_c)^{1/2}/(\sqrt{3}t_e) + O(k^2).$$

Из этой формулы следует, что в длинноволновой области инкременты второй и третьей

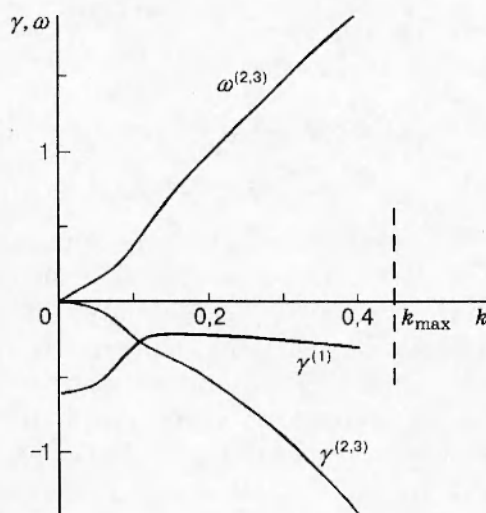


Рис. 1

гармоник чисто мнимые. Так как по определению $\gamma = -i\omega$, то частоты вещественные, поэтому упомянутые гармоники являются незатухающими плоскими волнами, распространяющимися в противоположные стороны с фазовой скоростью

$$v_{\text{ф}} = \omega^{(2,3)} / k = 3^{-1/2} v_T (d + s_0) s_0^{-1} (1 + t_c / t_f)^{-1} (1 + s_0 t_c / t_f (d + s_0))^{1/2}.$$

Если отношение t_c / t_f задано, то фазовая скорость растет при увеличении тепловой скорости гранул и убывает при уменьшении коэффициента восстановления как $v_{\text{ф}} \sim (1 - e^2)^{-1/2}$, так как $v_T = (1 - e^2)^{-1/2} (d + s_0) \Gamma$.

Итак, рассматриваемое гранулированное течение Куэтта нейтрально-устойчиво по отношению к длинноволновым возмущениям, распространяющимся перпендикулярно плоскости сдвига.

Для изучения устойчивости гранулированного течения во всей области изменения волновых чисел ($0 \leq k \leq k_{\text{max}}$) найдены корни уравнения (2.6) по формулам Кардано при различных параметрах среды. На рис. 1 представлена зависимость декрементов и частоты нераспространяющейся и распространяющихся гармоник от волнового числа при среднем свободном пробеге $s_0 = 0,05d$, $e = 0,9$, $t_c = 0$. Первая гармоника затухает сильнее всего в длинноволновой области $kd < 0,05$. При увеличении волнового числа модуль декремента уменьшается, достигая минимума при $kd \approx 0,17$ ($\lambda = 37d$). Дальнейший рост волнового числа приводит к почти линейному увеличению модуля декремента примерно в 1,5 раза (при k_{max}) по сравнению с его минимальным значением. Частота распространяющихся гармоник при $0 \leq kd \leq 0,06$ ($\lambda \geq 100d$) увеличивается линейно с ростом волнового числа, и фазовая скорость в этой длинноволновой области не зависит от волновых чисел, т. е. волны не обладают дисперсией. При $kd > 0,06$ зависимость $\omega^{(2,3)} = \omega(k)$ отклоняется от линейной, соответствуя положительной дисперсии, при которой фазовая скорость увеличивается с ростом волновых чисел. Это означает, что более короткие волны распространяются быстрее более длинных. Согласно общей теории дисперсионных волн, в данной области возможно существование волн разрежения конечной амплитуды. С дальнейшим увеличением волновых чисел частота растет, но увеличение скорости распространяющихся гармоник замедляется, и в области $0,2 \leq kd \leq 0,35$ значение фазовой скорости почти постоянное, примерно в 1,7 раза больше, чем при $k \rightarrow 0$.

Распространяющиеся гармоники с течением времени затухают; модуль их декремента, будучи очень малым в длинноволновой области, монотонно увеличивается вплоть до

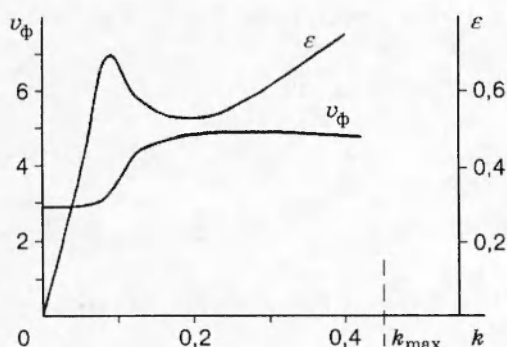


Рис. 2

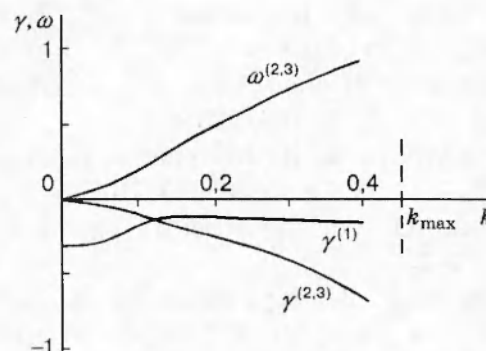


Рис. 3

границы k_{\max} , а коэффициент ослабления волн $\varepsilon = \gamma/\omega$ возрастает линейно, когда волновые числа изменяются от $kd \geq 0$ до $kd \approx 0,06$, и достигает локального максимума ($\varepsilon = 0,69$) при $kd \approx 0,09$. При увеличении волновых чисел коэффициент ослабления проходит через минимум ($\varepsilon_{\min} \approx 0,53$) при $kd \approx 0,18$, а затем монотонно возрастает до значения 0,83 при $kd = (kd)_{\max} = 0,45$. Фазовая скорость и коэффициент ослабления распространяющихся гармоник как функция волнового числа приведены на рис. 2.

Учет конечного времени контакта t_c не приводит к качественному изменению характера эволюции возмущений. На рис. 3 представлена зависимость $\gamma^{(1)}$, $\gamma^{(2,3)}$, $\omega^{(2,3)}$ от волнового числа при $t_c = t_f$. Видно, что модуль декремента первой гармоники в длинноволновой области вдвое меньше, чем в случае абсолютно жестких соударений ($t_c = 0$). Такое же уменьшение имеет место для декремента и частоты распространяющихся мод.

Увеличение среднего пробега s_0 при $t_c = 0$ в качественном отношении аналогично увеличению степени деформации гранул при столкновениях: декременты, частоты и фазовые скорости гармоник уменьшаются. Так, при $s_0 = 0,5d$, $t_c = 0$ фазовая скорость v_ϕ изменяется от 0,6 при $k \rightarrow 0$ до $\approx 1,1$ в среднем диапазоне волновых чисел ($0,15 \leq kd \leq 0,30$), а затем убывает до 0,95 при $k = k_{\max}$.

Таким образом, гранулированное течение с постоянным сдвигом, описываемое моделью [13], устойчиво относительно малых возмущений во всем диапазоне длин волн, распространяющихся поперек плоскости сдвига.

ЛИТЕРАТУРА

1. Bagnold R. A. Experiments on a gravity free dispersion of large solid spheres in a Newtonian fluid under shear // Proc. Roy. Soc. London. 1954. Ser. 225. P. 49–63.
2. Savage S. B. Gravity flow of cohesionless granular materials in chutes and channels // J. Fluid Mech. 1979. V. 92. P. 53–96.
3. Hutter K., Rajagopal K. R. On flows of granular materials // Cont. Mech. Thermodyn. 1994. V. 4, N 2. P. 82–141.
4. Jenkins J. T., Savage S. B. A theory for the rapid flow of identical, smooth, nearly elastic spherical particles // J. Fluid Mech. 1983. V. 130. P. 187–202.
5. Lun C. K., Savage S. B., Jeffrey D. J., Chepurniy N. Kinetic theories for granular flow: inelastic particles in Couette flow and slightly inelastic particles in a general flow field // J. Fluid Mech. 1984. V. 140. P. 223–256.
6. Jenkins J. T., Richman V. W. Kinetic theory of plane flows of a dense gas of disks // Phys. Fluids. 1985. V. 28. P. 3485–3494.

7. **Mello T. M., Diamond P. H., Levine H.** Hydrodynamic modes of a granular shear flow // Phys. Fluids A. 1993. V. 3, N 9. P. 2067–2075.
8. **Savage S. B.** Instability of unbounded uniform granular shear flow // J. Fluid Mech. 1992. V. 141. P. 109–123.
9. **McNamara S.** Hydrodynamic modes of a uniform granular medium // Phys. Fluids A. 1993. V. 5, N 12. P. 3056–3070.
10. **Babic M.** On the stability of rapid granular flows // J. Fluid Mech. 1993. V. 254. P. 127–150.
11. **Schmid P. J., Kytomaa H. K.** Transient and asymptotic stability of granular shear flow // J. Fluid Mech. 1994. V. 264. P. 255–276.
12. **Haff P. K.** Grain flow as a fluid-mechanical phenomenon // J. Fluid Mech. 1983. V. 134. P. 401–430.
13. **Hwang H., Hutter K.** A new kinetic model for rapid granular flow // Cont. Mech. Thermodyn. 1995. V. 7, N 3. P. 357–384.

Поступила в редакцию 14/VI 1996 г.
