

Все полученные выше пересчетные формулы выведены в предположении, что упруго-вязкое тело не имеет стационарной вязкости, учитываемой в реологических моделях путем последовательного включения в схему вязкого элемента. Однако и в этом случае полученные формулы остаются справедливыми. Действительно, исходные уравнения теперь имеют вид [9, 11]

$$\sigma = M^\circ \varepsilon + \eta \dot{\varepsilon} + \chi * \dot{\varepsilon}, \quad \varepsilon = J^\circ \sigma + \frac{1}{\eta'} \sigma * 1 - \varphi * \dot{\sigma} \quad (20)$$

где χ и φ — функции памяти, и начало действия возмущения на систему принято за нуль. Отсюда находим

$$M_v = M^\circ + \frac{1}{t} (\eta + \chi * 1), \quad M_\varepsilon = M^\circ + \eta \delta + \chi \quad (21)$$

$$J_u = J^\circ + \frac{t}{2\eta'} - \frac{\varphi * 1}{t}, \quad J = J^\circ + \frac{t}{\eta'} - \varphi \quad (22)$$

Свертывая вторые формулы (21) и (22) с единицей, а первые формулы (21) и (22) умножая на t , убеждаемся, что и в этом случае выполняются соотношения 5), (6) и (15), (16). Формулы (9), (11) и (18) также остаются справедливыми для (сех $t \neq 0$, поскольку для области $t \geq 0$ учет стационарной вязкости дает

$$\zeta = \eta \cdot 1 + \chi (* 1 - t), \quad \bar{\alpha} = \eta \delta + \dot{\chi} \quad (23)$$

$$\xi = -\frac{t^2}{2\eta'} - \varphi (* 1 - t), \quad \bar{\beta} = \frac{1}{\eta'} - \dot{\varphi}. \quad (24)$$

Поступила
3.V.1960

ЛИТЕРАТУРА

1. Леонтович М. А. Введение в термодинамику. ГИТТЛ, М.—Л., 1950.
2. Шермергор Т. Д. К термодинамическому описанию неравновесных процессов. Научн. доклады Высшей школы, физ.-мат. науки, 1958, № 5, стр. 147.
3. Шермергор Т. Д. Вычисление функций распределения времен релаксаций для упругого последствия. Физика металлов и металловедение, 1960, т. 9, вып. 2, стр. 161.
4. Шермергор Т. Д. К термодинамической теории упруго-вязких тел. Научн. доклады Высшей школы, физ.-мат. науки, 1959 г. (в печати).
5. Зинер К. Сборник Упругость и неупругость металлов. ИЛ, М., 1954.
6. Кольский Г. Волны напряжения в твердых телах. ИЛ, М., 1955.
7. Шермергор Т. Д. О зависимости напряжения от скорости деформации. Изв. вузов, физика, 1958, № 2, стр. 125.
8. Одинг И. А., Иванова В. С., Бурдукский В. В., Геминев В. Н. Теория ползучести и длительной прочности металлов. Metallurgizdat, М., 1959.
9. Gross V. Mathematical Structure of the Theories of Viscoelasticity. Hermann & Co., Paris, 1953.
10. Работнов Ю. Н. Расчет деталей машин на ползучесть. Изв. АН СССР, ОТН, 1948, вып. 6, стр. 789.
11. Bland D. R. On the Foundations of Linear Isotropic Visco-elasticity. Proc. Roy. Soc., 1959, vol. 250, № 1263, p. 524.

ПЕРЕРАСПРЕДЕЛЕНИЕ НАПРЯЖЕНИЙ В СПЛОШНОМ ВРАЩАЮЩЕМСЯ ДИСКЕ В ПЕРВОЙ СТАДИИ ПОЛЗУЧЕСТИ

О. В. Соснин

(Новосибирск)

В последнее время были предложены некоторые методы расчета неустановившихся режимов ползучести в дисках на основе гипотезы упрочнения.

Предлагается способ расчета неустановившейся ползучести в сплошном равномерно прогретом диске постоянного профиля на основе гипотезы упрочнения и, как предельное состояние, рассмотрено распределение напряжений в условиях установившейся ползучести.

В заключении приведены результаты расчета неустановившейся ползучести в сплошном диске под действием центробежных сил из стали 40Н при 400° С.

1. Гипотеза упрочнения представляется более оправданной физически, чем общеизвестная теория старения. В решении задач о вращающемся диске существенное упрощение получается за счет того, что основные уравнения теории ползучести берутся по аналогии с теорией пластичности Сен-Венана, использующей ассоциированный закон течения: если $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ — главные напряжения p_1, p_2, p_3 — соответствующие

скорости ползучести, то считается $\dot{p}_1 = -\dot{p}_3 = \dot{p}$, $\dot{p}_2 = 0$. Величина p связана с наибольшим касательным напряжением $1/2 S = 1/2 (\sigma_1 - \sigma_3)$ так же, как связана деформация ползучести с напряжением при одноосном нагружении, например:

$$\dot{p}p^\alpha = k \exp (S / A) \tag{1.1}$$

Для установившейся ползучести аналогичные уравнения на основе теории старения были использованы Валя [1, 2] с приложением к дискам с центральным отверстием. В работе [3] были даны формулы, пригодные для расчета неустановившихся режимов ползучести в дисках с центральным отверстием, на основе которых была разработана методика и проведены расчеты. В работе [4] даны формулы, пригодные для расчета сплошного диска в условиях пластичности. В работе [5] даны формулы для определения установившейся ползучести в сплошном диске на основе теории старения.

2. Расчет упругого состояния сплошного диска, нагруженного центробежными силами, показывает, что в центре $\sigma_r = \sigma_\theta$, в остальной части диска $\sigma_\theta > \sigma_r > 0$. Предположим, что вследствие ползучести напряжения в диске перераспределяются так, что центральная точечная область, где $\sigma_r = \sigma_\theta$, растет во времени до конечных размеров. Таким образом, для любого момента t в диске имеются две области:

- (1) Область $0 \leq r \leq r_{12}$, где $\sigma_r = \sigma_\theta$
- (2) Область $r_{12} \leq r \leq r_a$, где $\sigma_\theta > \sigma_r > 0$

Во второй области согласно закону текучести по Сен-Венану пластические составляющие деформации будут

$$\epsilon_r^p = 0, \quad \epsilon_\theta^p = p, \quad \epsilon_z^p = -p$$

В первой области $\epsilon_z^p = -p$ и из условия несжимаемости по диску в пластической области

$$\epsilon_r^p + \epsilon_\theta^p = p, \text{ или } \epsilon_r^p = \beta p, \quad \epsilon_\theta^p = (1 - \beta) p \quad (0 \leq \beta \leq 1)$$

Получим следующие результаты.

Область (1). Уравнение равновесия элемента диска

$$\frac{\partial \sigma}{\partial \xi} + M \xi = 0, \quad M = \frac{\gamma}{g} \omega^2 r_a^2, \quad \xi = \frac{r}{r_a} \tag{2.1}$$

Радиальная и окружная деформации соответственно

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} = r_a \left[\frac{1 - \nu}{E} \sigma + \beta p \right], \quad \frac{u}{\xi} = r_a \left[\frac{1 - \nu}{E} \sigma + (1 - \beta) p \right] \tag{2.2}$$

Отсюда

$$\sigma = \frac{E}{2(1 - \nu)} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{u}{\xi} \right) \frac{1}{r_a} - p \right] \tag{2.3}$$

Подставляя в уравнение равновесия и интегрируя, получим:

$$u_1 = C_1 \xi + \frac{C_2}{\xi} - \frac{r_a P(0)}{2} \xi + \frac{r_a}{\xi} \int_0^\xi \xi p d\xi - \frac{r_a (1 - \nu)}{4E} M \xi^3$$

Условия ограниченности перемещений в центре дает $C_2 = 0$. Из (2.3) находим

$$\sigma = \frac{E}{2(1 - \nu)} \left[\frac{2}{r_a} C_1 - \frac{1 - \nu}{E} M \xi^2 - p(0) \right] \tag{2.4}$$

Область (2). Уравнение равновесия

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial \xi} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{\xi} + M \xi = 0 \tag{2.5}$$

Радиальная и окружная деформация соответственно:

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} = \frac{r_a}{E} \left[\sigma_r - \nu \sigma_\theta \right], \quad \frac{u}{\xi} = \frac{r_a}{E} \left[\sigma_\theta - \nu \sigma_r \right] + r_a p \tag{2.6}$$

Отсюда

$$\sigma_r = \frac{E}{1 - \nu^2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial \xi} + \nu \frac{u}{\xi} \right) \frac{1}{r_a} - \nu p \right], \quad \sigma_\theta = \frac{E}{1 - \nu^2} \left[\left(\nu \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{u}{\xi} \right) \frac{1}{r_a} - p \right] \tag{2.7}$$

Подставляя в уравнение равновесия и интегрируя, найдем:

$$u_2 = C_3 \xi + \frac{C_4}{\xi} + r_a \left[\frac{\nu}{2} p(\xi_{12}) \frac{\xi_{12}^2 - \xi^2}{\xi} - \frac{1 - \nu}{2} \frac{p}{\xi} \int_{\xi_{12}}^\xi d\xi + \frac{1 + \nu}{2\xi} \int_{\xi_{12}}^\xi \xi p d\xi - \frac{1 - \nu^2}{8E} M \frac{(\xi_{12}^2 - \xi^2)^2}{\xi} \right] \tag{2.8}$$

Из (2.7) находим:

$$\begin{aligned} \sigma_r = \frac{E}{1-\nu^2} & \left[\frac{1+\nu}{r_a} C_3 - \frac{1-\nu}{r_a} \frac{C_4}{\xi^2} - \left(\frac{\nu+\nu^2}{2} + \frac{\nu-\nu^2}{2} \frac{\xi_{12}^2}{\xi^2} \right) p(\xi_{12}) - \right. \\ & - \frac{1-\nu^2}{2} \int_{\xi_{12}}^{\xi} \frac{p}{\xi} d\xi - \frac{1-\nu^2}{2\xi^2} \int_{\xi_{12}}^{\xi} \xi p d\xi - \frac{(1+\nu)(1-\nu^2)}{4E} M(\xi^2 - \xi_{12}^2) - \\ & \left. - \frac{(1-\nu)(1-\nu^2)}{8E} M \frac{\xi^4 - \xi_{12}^4}{\xi^2} \right] \quad (2.9) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_\theta = \frac{E}{1-\nu^2} & \left[\frac{1+\nu}{r_a} C_3 + \frac{1-\nu}{r_a} \frac{C_4}{\xi^2} - \left(\frac{\nu+\nu^2}{2} - \frac{\nu-\nu^2}{2} \frac{\xi_{12}^2}{\xi^2} \right) p(\xi_{12}) - (1-\nu^2) p(\xi) - \right. \\ & - \frac{1-\nu^2}{2} \int_{\xi_{12}}^{\xi} \frac{p}{\xi} d\xi + \frac{1-\nu^2}{2\xi^2} \int_{\xi_{12}}^{\xi} \xi p d\xi - \frac{(1+\nu)(1-\nu^2)}{4E} M(\xi^2 - \xi_{12}^2) + \\ & \left. + \frac{(1-\nu)(1-\nu^2)}{8E} M \frac{\xi^4 - \xi_{12}^4}{\xi^2} \right] \end{aligned}$$

Функции времени C_1, C_2, C_3 определяются из условий:

- (1) $u_1 = u_2$ при $\xi = \xi_{12}$ — равенство перемещений на границе раздела областей.
- (2) $\sigma = \sigma_r$ при $\xi = \xi_{12}$ — равенство радиальных напряжений на этой границе.
- (3) $\sigma_r = \sigma_r^0$ при $\xi = 1$ — задано граничное условие (переменное или постоянное во времени).

Граница раздела областей ξ_{12} определяется из условий

$$p_r = 0, \quad p_\theta = p \quad \text{при} \quad \xi \geq \xi_{12} \quad \text{или} \quad \sigma = \sigma_\theta \quad \text{при} \quad \xi = \xi_{12}$$

Оба условия дают один и тот же результат

$$p(\xi_{12}) \xi_{12}^2 - \frac{1-\nu}{4E} M \xi_{12}^4 = \int_0^{\xi_{12}} \xi p d\xi \quad (2.10)$$

Расчет удобнее проводить в безразмерных величинах

Область (1)

$$\bar{\sigma} = \frac{\sigma}{A}, \quad \bar{p}_1 = \frac{pE}{2A(1-\nu)}, \quad \bar{M} = \frac{M}{A}, \quad \tau_1 = \left[\frac{E}{2A(1-\nu)} \right]^{\alpha+1} kt, \quad \bar{C}_i = \frac{C_i E}{2A(1-\nu)r_a} \quad (i = 1, 3, 4)$$

Область (2)

$$\bar{\sigma}_r = \frac{\sigma_r}{A}, \quad \bar{\sigma}_\theta = \frac{\sigma_\theta}{A}, \quad \bar{p}_{11} = \frac{pE}{A}, \quad \tau_{11} = \left[\frac{E}{A} \right]^{\alpha+1} kt$$

Опуская в дальнейшем черточки, уравнения (2.4) и (2.9) представим так:

$$\sigma = 2C_1 - \frac{M}{2} \xi^2 - p_1(0) \quad (2.11)$$

$$\begin{aligned} \sigma_r = 2C_3 - 2 \frac{1-\nu}{1+\nu} \frac{C_4}{\xi^2} - \left[\frac{\nu}{2(1-\nu)} + \frac{\nu}{2(1+\nu)} \frac{\xi_{12}^2}{\xi^2} \right] p_{11}(\xi_{12}) - \\ - \frac{1}{2\xi^2} \int_{\xi_{12}}^{\xi} \xi p_{11} d\xi - \frac{1}{2} \int_{\xi_{12}}^{\xi} \frac{p_{11}}{\xi} d\xi - \frac{1+\nu}{\nu} M(\xi^2 - \xi_{12}^2) - \frac{1-\nu}{8} M \left(\frac{\xi^4 - \xi_{12}^4}{\xi^2} \right) \end{aligned} \quad (2.12)$$

$$\begin{aligned} \sigma_\theta = 2C_3 + 2 \frac{1-\nu}{1+\nu} \frac{C_4}{\xi^2} - \left[\frac{\nu}{2(1-\nu)} - \frac{\nu}{2(1+\nu)} \frac{\xi_{12}^2}{\xi^2} \right] p_{11}(\xi_{12}) + \\ + \frac{1}{2\xi^2} \int_{\xi_{12}}^{\xi} \xi p_{11} d\xi - \frac{1}{2} \int_{\xi_{12}}^{\xi} \frac{p_{11}}{\xi} d\xi - \frac{1+\nu}{4} M(\xi^2 - \xi_{12}^2) + \frac{1-\nu}{8} M \left(\frac{\xi^4 - \xi_{12}^4}{\xi^2} \right) - p_{11}(\xi) \end{aligned} \quad (2.13)$$

Условия для определения C_1, C_3, C_4 и границы представляются следующим образом:

$$\begin{aligned}
 C_1 - C_3 - \frac{C_4}{\xi_{12}^2} &= \frac{M}{8} \xi_{12}^2 + \frac{p_1(0)}{2} - \frac{1}{\xi_{12}^2} \int_0^{\xi_{12}} \xi p_1 d\xi \\
 C_1 - C_3 + \frac{1-\nu}{1+\nu} \frac{C_4}{\xi_{12}^2} &= \frac{M}{4} \xi_{12}^2 + \frac{p_1(0)}{2} - \frac{\nu}{1+\nu} p_1(\xi_{12}) \\
 C_3 - \frac{1-\nu}{1+\nu} C_4 &= \frac{\sigma_r^0}{2} + \frac{\nu}{4} \left[\frac{1}{1-\nu} + \frac{1}{1+\nu} \xi_{12}^2 \right] p_{11}(\xi_{12}) + \\
 + \frac{1}{4} \int_{\xi_{12}}^1 \xi p_{11} d\xi + \frac{1}{4} \int_{\xi_{12}}^1 \frac{p_{11}}{\xi} d\xi + \frac{M}{8} (1 - \xi_{12}^2) \left[1 + \nu + \frac{1-\nu}{2} (1 + \xi_{12}^2) \right] \\
 p_1(\xi_{12}) \xi_{12}^2 - \frac{M}{8} \xi_{12}^4 &= \int_0^{\xi_{12}} \xi p_1 d\xi
 \end{aligned} \tag{2.14}$$

$$\tag{2.15}$$

Пластическая деформация p определяется из уравнения (1.1), которое в безразмерных величинах будет иметь вид

$$p_1^\sigma d p_1 = e^\sigma d \tau_1 \quad \text{для области (1)}, \quad p_{11}^\alpha d p_{11} = e^{\sigma_\theta} d \tau_{11} \quad \text{для области (2)} \tag{2.16}$$

Отсюда, подставив выражения σ и σ_θ , получим

для области (1)

$$e^{p_1(0)} p_1^\alpha d p_1 = \exp \left[2C_1 - \frac{M}{2} \xi^2 \right] d \tau_1 \tag{2.17}$$

для области (2)

$$\begin{aligned}
 e^{p_{11}^\alpha} p_{11}^\alpha d p_{11} &= \exp \left[2C_3 + 2 \frac{1-\nu}{1+\nu} \frac{C_4}{\xi^2} - \left[\frac{\nu}{2(1-\nu)} - \frac{\nu}{2(1+\nu)} \frac{\xi_{12}^2}{\xi^2} \right] p_{11}(\xi_{12}) + \right. \\
 + \frac{1}{2\xi^2} \int_{\xi_{12}}^{\xi} \xi p_{11} d\xi - \frac{1}{2} \int_{\xi_{12}}^{\xi} \frac{p_{11}}{\xi} d\xi - \frac{1-\nu}{4} M (\xi^2 - \xi_{12}^2) + \\
 \left. + \frac{1-\nu}{8} M \left(\frac{\xi^4 - \xi_{12}^4}{\xi^2} \right) \right] d \tau_{11}
 \end{aligned} \tag{2.18}$$

Расчет можно провести численным интегрированием уравнений (2.17) и (2.18), задаваясь отрезками времени Δt_m и разбивая радиус ξ на участки ξ_n . Пусть для некоторого времени $t_{(n-1)}$ нам известно распределение напряжений и пластической деформации p . Фиксируя это напряжение на период следующего $\Delta t_n = t_n - t_{n-1}$, мы можем из (2.18) определить p для всех точек ξ_n . Зная распределение $p(\xi)$ к времени t_n , из (2.15) найдем границу раздела областей, из (2.14) — величины C_1, C_3, C_4 и из (2.11), (2.12) и (2.13) — распределение напряжений. Далее процесс повторяется.

3. Анализ установившейся ползучести позволяет определить предельную величину радиуса границы раздела областей и окончательное распределение напряжений, не меняющееся во времени.

Для области (1), пренебрегая упругими деформациями, имеем

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{u}{\xi} = p \tag{3.1}$$

Напряжение выражается следующим образом:

$$\sigma = \sigma_{12} + \frac{1}{2} M (\xi_{12}^2 - \xi^2) \tag{3.2}$$

и из уравнения (2.17) найдем

$$p = \left(\frac{1}{\kappa} \right)^\kappa \exp \left[\kappa \left(C - \frac{1}{2} M \xi^2 \right) \right] \tau^\kappa, \quad \kappa = \frac{1}{1+\alpha}, \quad C = \sigma_{12} + \frac{M}{2} \xi_{12}^2 \tag{3.3}$$

Подставляя в уравнение (3.1) и интегрируя, найдем:

$$u_1 = \lambda \left[1 - \exp \left(- \frac{\kappa M}{2} \xi^2 \right) \right] \frac{1}{\xi} \quad \left(\lambda = \left[\frac{1}{\kappa} \right]^\kappa e^{\kappa C} \tau^\kappa \frac{1}{\kappa M} \right) \tag{3.4}$$

Граница области определится условием $du/d\xi = 0$ при $\xi = \xi_{12}$, что дает:

$$\exp\left(\frac{\kappa M}{2} \xi_{12}^2\right) - 1 = \kappa M \xi_{12}^2 \quad (3.5)$$

Отсюда следует:

$$\xi_{12} = \sqrt{\frac{2.514}{\kappa M}} \quad (3.6)$$

Для области (2) имеем $du/d\xi = 0$, т. е.

$$u = u(t), \quad \varepsilon_\theta \equiv p = \frac{u(t)}{\xi}$$

При $\xi = \xi_{12}$, имеем $\sigma_\theta = \sigma_{12}$ и из (2.18) для $\xi = \xi_{12}$ найдем

$$p(\xi_{12}) = \frac{u(t)}{\xi_{12}} = \left(\frac{1}{\kappa}\right)^\alpha e^{\kappa \sigma_{12} t} \tau^\alpha$$

Отсюда для области (2) получим

$$p(\xi) = \left(\frac{1}{\kappa}\right)^\alpha e^{\kappa \sigma_{12} t} \tau^\alpha \frac{\xi_{12}}{\xi} \quad (3.8)$$

Подставляя (3.8) в уравнение (2.16) найдем

$$\sigma_\theta = (\alpha + 1) \ln \frac{\xi_{12}}{\xi} + \sigma_{12} \quad (3.9)$$

Из уравнения равновесия (2.5) получим

$$\sigma_r = (\alpha + 1) \ln \frac{\xi_{12}}{\xi} - \frac{M \xi^2}{3} + \frac{D}{\xi} + \alpha + 1 + \sigma_{12} \quad (3.10)$$

Постоянные σ_{12} и D находятся из условий $\sigma_r = \sigma_{12}$ при $\xi = \xi_{12}$ и $\sigma_r = \sigma_r^\circ$ при $\xi = 1$. Вычисления дают

$$D = \frac{M \xi_{12}^3}{3} - \xi_{12} (\alpha + 1)$$

$$\sigma_{12} = \sigma_r^\circ + \frac{M}{3} (1 - \xi_{12}^3) - (\alpha + 1) (\ln \xi_{12} + 1 - \xi_{12})$$

На фиг. 1 даны результаты расчета диска диаметром 900 мм из стали 40Н при $n = 3000$ об/мин и $T = 400^\circ\text{C}$ с характеристиками ползучести

$$\alpha = 2.7, \quad A = 1.301 \text{ кг/мм}^2, \quad k = 1.03 \cdot 10^{-17} \text{ 1/час.}, \quad \nu = 0.3.$$

Кривые 0, 1, 2, ..., 7 показывают напряженное состояние соответственно начально упругое, а также для значений времени 10^{-3} , 10^{-2} , 10^{-1} , 1, 10^2 часа и предельное.

Поступила
10 VI 1960

ЛИТЕРАТУРА

1. W a h l A. M. Analysis of Creep in Rotating Disks Based on the Tresca Criterion and Associated Flow. Rule. J. Appl. Mech., Trans. ASME, 1956, vol. 78.
2. W a h l A. M. Stress Distribution in Rotating Disks Subjected to Creep Including Effects of Variable Thickness and Temperature. J. Appl. Mech., Trans. ASME, 1957, vol. 79.
3. Работнов Ю. Н. О некоторых возможностях описания неустановившейся ползучести с приложением теории к исследованию ползучести роторов. Изв. АН СССР. ОН, 1957, № 5.
4. Работнов Ю. Н. Упруго-пластическое состояние вращающегося диска при наличии упрочнения. Изв. АН СССР. ОН, 1959, № 5.
5. W a h l A. M. Stress Distribution in Rotating Disks and Cylinder, J. Appl. Mech., Trans. ASME, 1958, vol. 25.