РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ

АВТОМЕТРИЯ

2003, том 39, № 4

УДК 681.5

Г. А. Французова

(Новосибирск)

СКОЛЬЗЯЩИЕ РЕЖИМЫ В ОДНОКАНАЛЬНЫХ СИСТЕМАХ ЭКСТРЕМАЛЬНОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ

Обсуждается возможность применения метода скользящего режима к синтезу автоматической системы поиска экстремума для динамических объектов со статической экстремальной характеристикой. Рекомендуется предварительно преобразовать модель объекта управления путем добавления новой переменной, в качестве которой предлагается использовать оценку градиента выходной характеристики. Показано, что подобное преобразование позволяет свести исходную задачу синтеза системы поиска экстремума к обычной для теории автоматического управления задаче стабилизации. Рассмотрены основные свойства замкнутой системы, даны некоторые рекомендации по реализации алгоритма управления.

Введение. Совершенствование технологии производства обусловливает появление новых специфических классов объектов управления, описание которых включает в себя динамическую часть и статическую характеристику с явно выраженным экстремумом. Эта функция, как правило, отражает обобщенный показатель качества работы системы. В случае, когда статическая экстремальная характеристика зависит от динамической части объекта и в процессе функционирования может изменяться непредвиденным образом, сохраняя при этом экстремальный вид, возникает необходимость создания специальной автоматической системы управления. Задача системы заключается в достижении минимума или максимума экстремальной характеристики при ее произвольном изменении, а также стабилизации относительно найденной точки при условии действия внешних возмущений [1, 2].

Примерами динамических объектов управления со статической экстремальной функцией качества могут служить паровой котел, реактивные двигатели, различные объекты химической промышленности, где в процессе работы один из показателей необходимо удерживать на его минимальном или максимальном значении.

Для организации поиска экстремума обычно используют градиентные алгоритмы управления [1–3], реализация которых предполагает добавление в систему специального устройства оценки частных производных выходной характеристики. Однако пропорциональные градиенту алгоритмы позволяют решить задачу синтеза только для простых динамических объектов, поведение которых с достаточной точностью описывают линейные дифференциальные уравнения невысокого порядка.

Цель данной работы – показать возможность синтеза автоматической системы поиска экстремума в условиях нелинейных характеристик и неопределенности параметров динамической части объекта.

Постановка задачи. Будем рассматривать одноканальный объект управления, динамическую часть которого можно описать следующими уравнениями состояния:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dots \\ \dot{x}_{n-1} = x_n, \\ \dot{x}_n = f(t,X) + b(t,X)u, \\ y = x_1, \end{cases} \tag{1}$$

где $X \in \Omega_X \in R^n$ – вектор состояния; Ω_X – рабочая область пространства состояний; $u \in R^1$ – управляющее воздействие, которое по условиям функционирования системы ограничено значением $|u| \le u_m$; $y \in R^1$ – выходная переменная динамической части объекта; $f(t,X)$ и $b(t,X)$ – нелинейные функции, зависимость которых от t отражает действие внешних возмущений. В процессе работы значения функций могут меняться произвольным образом в пределах ограниченного диапазона:

$$f_{\min} < f(t,X) < f_{\max}, \qquad b_{\min} < b(t,X) < b_{\max},$$

причем $b(t,X) \ne 0 \; \forall X \in \Omega_X$, $t \in [0,\infty)$.

Выходная переменная объекта Y представляет собой статическую экстремальную характеристику

$$Y = Y(y) + Y_0(t), \tag{2}$$

где $Y_0(t)$ – функция, отражающая произвольный «вертикальный» дрейф экстремума, причем его скорость на порядок меньше скорости протекания переходных процессов в динамической части объекта (1).

Необходимо сформировать такое управляющее воздействие $u(\cdot)$, которое обеспечивало бы автоматический поиск экстремума и удержание системы в найденной точке согласно условию

$$\operatorname*{extr}_{y} Y(t,y) = Y_0. \tag{3}$$

В ряде случаев задачу синтеза экстремальной системы удается свести к обычной для теории автоматического управления задаче стабилизации относительно предписанного значения Y_0 [2]. Рассмотрим один из возможных способов решения поставленной задачи синтеза.

Преобразование задачи управления. Поскольку аргумент экстремальной характеристики (2) изменяется во времени в соответствии с уравнениями (1), то на практике применять условие (3) при синтезе системы автоматического поиска экстремума не удается. Обычно в подобных системах используют информацию о градиенте выходной характеристики (частной производной в данной работе) [3], который в случае медленного дрейфа определяется соотношением

$$G(y) \cong \partial Y / \partial y. \tag{4}$$

В соответствии с необходимым условием экстремума в точке минимума (максимума) статической характеристики будет справедливо

$$G(y) = 0. \tag{5}$$

Таким образом, при синтезе систем поиска экстремума от алгоритма управления требуется организация движения к экстремуму, если градиент выходной характеристики не равен нулю, и стабилизация в точке, где выполняется условие (5).

В работе предлагается дополнить уравнения объекта (1) новой выходной переменной – градиентом (4)

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dots \\ \dot{x}_{n-1} = x_n, \\ \dot{x}_n = f(t, X) + b(t, X)u, \\ y = x_1, \\ G = G(y). \end{cases} \tag{6}$$

В этом случае можно переформулировать задачу синтеза автоматической системы поиска экстремума: для объекта (6) необходимо определить такое управляющее воздействие, которое обеспечит выполнение свойства

$$\lim_{t \to \infty} G(t) = 0 \tag{7}$$

с требуемой точностью $\Delta^0 \le \Delta_*^0$. К процессу выхода на экстремум могут предъявляться также дополнительные требования, сформулированные в виде оценок быстродействия ($t_n \le t_n^*$) и перерегулирования ($\sigma \le \sigma^*$).

Как видим, задача синтеза автоматической системы поиска экстремума сводится к обычной задаче стабилизации относительно значения, которое задает условие (6). При этом можно использовать все известные подходы к синтезу систем управления для нелинейных нестационарных динамических объектов. Адекватным методом проектирования в такой ситуации является метод скользящих режимов [2]. Обсуждение особенностей его применения в системах поиска экстремума и составляет содержание данной работы.

Описание преобразованного объекта. Предварительно исследуем собственные свойства объекта управления (6), которые позволяют сделать вывод относительно реализуемости поставленной задачи синтеза. Определим сначала относительную старшую производную [4] для новой выходной переменной G. С этой целью дифференцируем ее по времени в соответствии с (6):

$$\dot{G} = \frac{\partial G}{\partial y}\dot{y} = \frac{\partial G}{\partial y} x_2. \tag{8}$$

Как видим, эта производная не зависит от управления, т. е. относительный порядок объекта выше первого. Введем обозначение $C = \partial G / \partial y$ и, последовательно дифференцируя выражение (8), получим

$$G^{(n)} = Cf(t, X) + Cb(t, X)u. \tag{9}$$

Таким образом, поведение преобразованного объекта описывает дифференциальное уравнение (9), порядок которого (n) равен порядку динамической части исходного объекта (1), что и следует учитывать при формировании закона управления. Представим описание (9) в следующей канонической форме:

$$\begin{cases} \dot{g}_1 = g_2, \\ \dot{g}_2 = g_3, \\ \ldots \\ \dot{g}_n = Cf(t, X) + Cb(t, X)u, \\ G = g_1, \end{cases} \tag{10}$$

где $g \in R^n$ – вектор состояния преобразованного объекта; $g_i = G^{(i-1)}$, $i = \overline{1, n}$,– отдельная его компонента.

Формирование алгоритма управления. На первом этапе будем полагать, что функцию G и вектор состояния g можно оценить точно.

В соответствии с методом скользящих режимов [5] сформируем разрывный закон управления

$$u = u_m \operatorname{sign} S(g) = \begin{cases} +u_m, & S(g) > 0, \\ \\ -u_m, & S(g) < 0, \end{cases} \tag{11}$$

где u_m – размах реле, равный ограничению на ресурс управления объекта; $S(g) = 0$ – уравнение поверхности переключения. Его можно разрешить относительно одной из переменных состояния (g_n) и представить в виде

$$S(g) = F(g_1, \ldots, g_{n-1}) - g_n = 0. \tag{12}$$

Специфика автоматической системы поиска экстремума отражена в этом уравнении, которое предлагается задавать на основе оценок качества процесса выхода на экстремум (t_n^* и σ^*). Как правило, функция $F(\cdot)$ является линейной, и (12) принимает форму

$$S(g) = \alpha_1 g_1 + \ldots + \alpha_{n-1} g_{n-1} - g_n = 0, \tag{13}$$

где α_j, $j = \overline{1, n-1}$,– постоянные коэффициенты.

Свойства замкнутой системы. Обсудим теперь свойства системы, состоящей из преобразованного объекта (10) и регулятора (11). Как известно [5], при выполнении условия $S(g) = 0$ происходит постоянное переключение управления, что соответствует режиму скольжения. В этом случае справедливо условие

$$\dot{S}(g) = \alpha_1 \dot{g}_1 + \ldots + \alpha_{n-1} \dot{g}_{n-1} - \dot{g}_n = 0, \tag{14}$$

которое с учетом (10) принимает вид

$$\dot{S}(g) = \alpha_1 g_2 + \ldots + \alpha_{n-1} g_n - Cf(t, X) - Cb(t, X) u_э = 0.$$

При $\det[Cb(t, X)] \neq 0$ из него можно найти эквивалентное управление

$$u_э = [Cb(t, X)]^{-1} [\alpha_1 g_2 + \ldots + \alpha_{n-1} g_n - Cf(t, X)]$$

и доопределить уравнения системы в режиме скольжения:

$$\begin{cases} \dot{g}_1 = g_2, \\ \dot{g}_2 = g_3, \\ \ldots \\ \dot{g}_n = Cf(t, X) + Cb(t, X)[Cb(t, X)]^{-1} [\alpha_1 g_2 + \ldots + \alpha_{n-1} g_n - Cf(t, X)], \\ S(g) = 0, \\ G = g_1. \end{cases} \tag{15}$$

Выразив из уравнения (13) переменную g_n и подставив в (15), после несложных преобразований получим

$$\begin{cases} \dot{g}_1 = g_2, \\ \dot{g}_2 = g_3, \\ \ldots \\ \dot{g}_{n-1} = \alpha_1 g_1 + \ldots + \alpha_{n-1} g_{n-1}, \\ G = g_1. \end{cases} \tag{16}$$

Следовательно, в режиме скольжения поведение замкнутой системы описывают линейные уравнения состояния (16), т. е. парируется влияние нелинейных и нестационарных характеристик динамической части объекта (1).

Рассмотрим теперь для системы (16) статический режим, который характеризуют уравнения

$$\begin{cases} \alpha_1 g_1 = 0, \\ G = g_1. \end{cases} \tag{17}$$

Поскольку $\alpha_1 \neq 0$, уравнения (17) эквивалентны $G = 0$, т. е. необходимому условию экстремума (5).

Таким образом, экстремальному значению функции качества $Y(t, y)$ соответствует равновесный режим системы, состоящей из преобразованного объекта (10) и регулятора (11). Выбирая определенным образом коэффициенты α_j уравнения (13), можно обеспечить требуемое качество процесса выхода на экстремум.

Оценка градиента и реальное преобразование объекта. На практике для преобразования исходного объекта управления (1) к виду (10) необходимо предусмотреть возможность измерения градиента. С этой целью предлагается использовать специальную динамическую подсистему, которая включает в себя дифференцирующий фильтр [6] с постоянной времени μ_1:

$$\mu_1 \dot{\hat{y}} = (y - \hat{y}) \tag{18}$$

и фильтр оценки частной производной (ФОЧП) [2, 7] с малым параметром μ_2:

$$\begin{gathered} \mu_2 \dot{\hat{Y}} = (Y - \hat{Y})|\dot{\hat{y}}|, \\ \hat{G} = \mu_2^{-1}(Y - \hat{Y})\operatorname{sign}(\dot{\hat{y}}). \end{gathered} \tag{19}$$

Здесь $\hat{G}$ – оценка частной производной, а $\dot{\hat{y}}$ – оценка производной выходной переменной динамической части объекта (1).

В результате описание объекта (6) с учетом реальной оценки градиента (18), (19) принимает вид

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dots \\ \dot{x}_{n-1} = x_n, \\ \dot{x}_n = f(t, X) + b(t, X)u, \\ y = x_1, \\ Y = Y(t, y), \\ \mu_1 \dot{\hat{y}} = (y - \hat{y}), \\ \mu_2 \dot{\hat{Y}} = (Y - \hat{Y})|\dot{\hat{y}}|, \\ \hat{G} = \mu_2^{-1}(Y - \hat{Y})\operatorname{sign}(\dot{\hat{y}}). \end{cases} \tag{20}$$

Как видим, модель (20) содержит малые по отношению к основным инерционностям (6) параметры μ_1 и μ_2, которые могут приводить к возникновению разнотемповых движений в преобразованном объекте. Для их выделения и исследования используем метод разделения движений [8], представив описание (20) в стандартном виде аналогично [7]. Можно показать, что при $\mu_1 \ll \mu_2$ в объекте возникают три вида движений. Сверхбыстрые процессы обусловлены дифференцирующим фильтром, быстрые порождены фильтром оценки градиента, а медленные движения соответствуют объекту с точной оценкой градиента и описываются уравнениями (10).

На рис. 1 приведена схема преобразованного объекта управления с выделенным фильтром оценки частной производной.

Реализация алгоритма управления. Реализация алгоритма управления (11) предполагает формирование поверхности переключения в соответ-

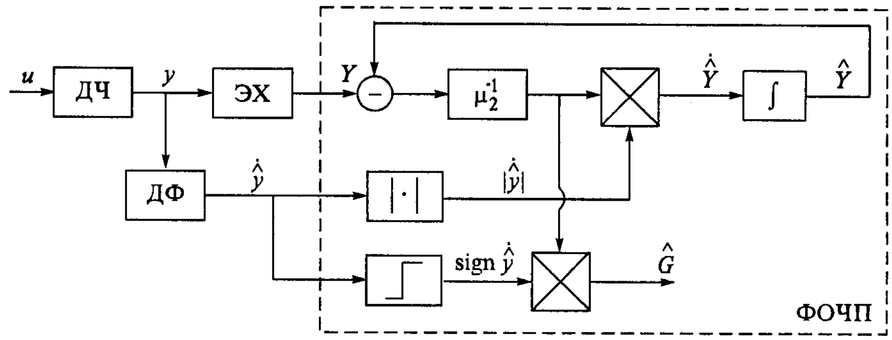

Рис. 1. Структурная схема преобразованного объекта: ДЧ – динамическая часть объекта, описываемая (1); ЭХ – соответствующая (2) экстремальная характеристика; ДФ – дифференцирующий фильтр (18)

ствии с (12) на основе выходной переменной преобразованного объекта (20), т. е. формирование реальной линии переключения в виде

$$S(\hat{g}) = F(\hat{g}_1, \ldots, \hat{g}_{n-1}) - \hat{g}_n = 0, \tag{21}$$

где $\hat{g}_1 = \hat{G}$ – оценка градиента; $\hat{g}_i = \dot{\hat{g}}_{i-1}$, $i = \overline{2, n}$.

С целью оценки соответствующих производных по времени $\hat{g}_i$ в систему следует добавить дополнительный дифференцирующий фильтр (ДДФ) $(n-1)$-го порядка, поведение которого описывают уравнения

$$\begin{cases} \mu_3 \dot{\hat{g}}_1 = \hat{g}_2, \\ \mu_3 \dot{\hat{g}}_2 = \hat{g}_3, \\ \ldots \\ \mu_3 \dot{\hat{g}}_{n-1} = \hat{G} - \hat{g}_1 - d_2 \hat{g}_2 - \ldots - d_{n-1} \hat{g}_{n-1}, \end{cases} \tag{22}$$

где μ_3 – малый параметр, отражающий инерционность процессов в фильтре; параметры d_j, $j = \overline{2, n-1}$, вычисляются из условия заданного распределения корней характеристического уравнения ДДФ.

Поскольку при реализации алгоритма управления используется оценка градиента, которая является выходной переменной преобразованного объекта, процессы в нем должны заканчиваться на порядок быстрее, чем в системе управления. Отсюда следует рекомендация по выбору параметров дифференцирующих устройств

$$\mu_1 = D\mu_2, \qquad \mu_2 = D\mu_3, \tag{23}$$

где D – коэффициент, характеризующий степень разделения движений. Обычно на практике достаточно задать $D = 0{,}1$. Понятно, что наличие трех малых параметров в системе будет приводить к возникновению в ней нескольких типов разнотемповых процессов, выделить и исследовать которые можно с помощью метода разделения движений [8].

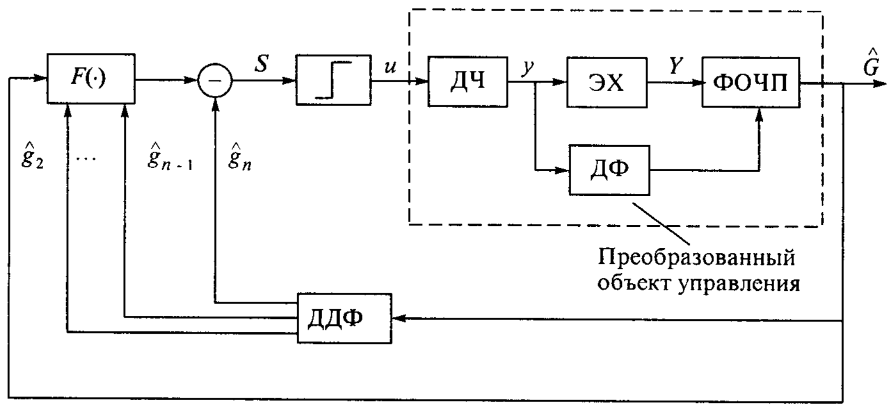

Рис. 2. Структурная схема системы управления

В зависимости от соотношения между μ_1, μ_2 и μ_3 эти процессы могут быть различными, однако медленные движения всегда будут описываться уравнениями (16), т. е. соответствовать желаемому движению к экстремуму. Сверхбыстрые процессы будут протекать в преобразованном объекте управления; по сравнению с остальными ими можно пренебречь и считать, что градиент оценивается точно, а выходной переменной является $\hat{G} = G$.

Структурная схема системы с преобразованным объектом и алгоритмом управления (21) приведена на рис. 2.

Пример синтеза системы. В качестве иллюстрации описанного подхода рассмотрим объект с экстремальной характеристикой

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = x_3, \\ \dot{x}_3 = f(t, X) + bu, \\ y = x_1, \\ Y = y^2, \end{cases}$$

где относительные значения параметров следующие: $b = 5$, $-1 \le f(\cdot) \le 10$; ресурс управления ограничен, $|u| \le 2$.

Требуется организовать автоматический поиск экстремума с заданным качеством ($t_n \le 4$ с, $\sigma \le 30\,\%$) и ошибкой определения экстремума (не более 5 %).

Перейдем к описанию преобразованного объекта вида (10)

$$\begin{cases} \dot{g}_1 = g_2, \\ \dot{g}_2 = g_3, \\ \dot{g}_3 = 2f(t, X) + 10u, \\ G = g_1, \end{cases}$$

для которого сформируем поверхность переключения (13)

$$S(g) = -2g_1 - 2g_2 - g_3 = 0$$

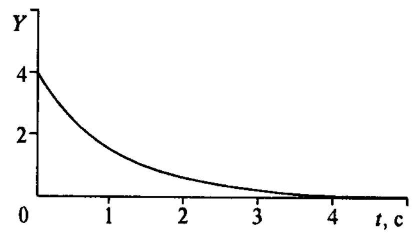

Рис. 3. График изменения $Y(t)$

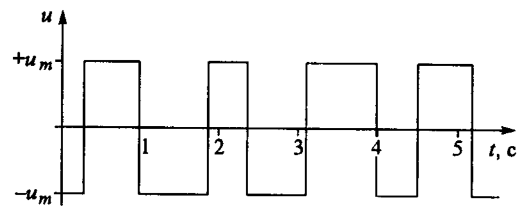

Рис. 4. График изменения управления

и закон управления (11)

$$u = u_m \operatorname{sign} S(g).$$

Для его реализации в систему добавим фильтр оценки градиента, дифференцирующий фильтр и ДДФ второго порядка с передаточной функцией

$$W_ф(p) = \frac{1}{\mu_3^2 p^2 + 2d\mu_3 p + 1}.$$

В соответствии с рекомендациями (23) выбраны следующие параметры фильтров: $d = 0{,}5$; $\mu_1 = 0{,}001$; $\mu_2 = 0{,}01$; $\mu_3 = 0{,}1$.

На рис. 3 представлен график изменения выходной переменной, иллюстрирующий процесс движения из начальных условий $Y(0) = 4$ к экстремуму $Y = 0$. Как видим, процесс соответствует требуемому качеству, экстремальное значение Y достигается за время $t \approx 3{,}5$ с. График изменения управляющего воздействия при движении к экстремуму приведен на рис. 4.

Изменение выхода динамической части объекта $y(t)$ иллюстрирует рис. 5. На рис. 6 приведен график изменения оценки градиента в процессе движения к экстремуму. Функция $\hat{G}$ (см. рис. 6) является выходной переменной преобразованного объекта, относительно которой формируются поверхность переключения и закон управления.

Следует отметить, что процесс движения к экстремуму инвариантен к изменению параметров объекта, функции $f(\cdot)$ выбирались произвольным образом из представленного диапазона.

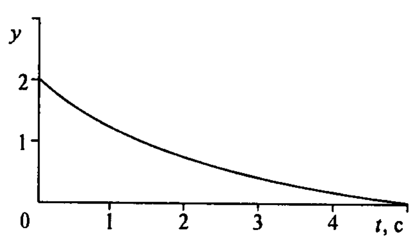

Рис. 5. График изменения $y(t)$

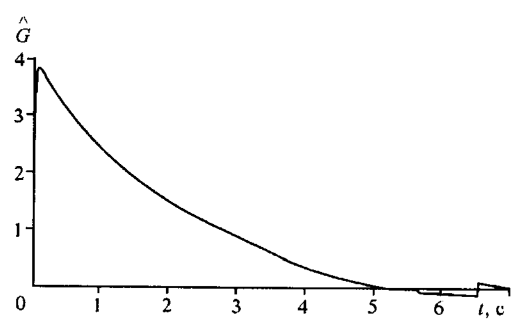

Рис. 6. График изменения $\hat{G}(t)$

Заключение. В работе рассмотрены основные свойства систем автоматического поиска экстремума со скользящими режимами. Предварительно преобразовав объект управления с помощью новой выходной переменной, которой является градиент экстремальной характеристики, можно свести проблему синтеза экстремальной системы к задаче стабилизации нелинейной нестационарной динамической системы. Это позволяет применить известные подходы для ее проектирования, в частности метод скользящих режимов.

Показано, что в режиме скольжения свойства замкнутой системы не зависят от влияния объекта и внешних возмущений, а выход в точку экстремума обеспечивается с заданным динамическим качеством.

Практическая реализация алгоритма управления предполагает использование специальных дифференцирующих устройств, влияние которых на процесс движения к экстремуму обсуждается в работе. Даны также некоторые рекомендации по выбору их параметров. Основные свойства рассмотренного класса систем иллюстрирует приведенный пример.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Чураков Е. П.** Оптимальные и адаптивные системы. М.: Энергоатомиздат, 1987.
2. **Востриков А. С., Французова Г. А.** Экстремальные и оптимальные системы автоматического управления. Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2001.
3. **Растригин Л. А.** Системы экстремального управления. М.: Наука, 1974.
4. **Французова Г. А.** Об условиях разрешимости задачи синтеза автоматической системы экстремального управления // Научн. вест. НГТУ. 2001. № 2. С. 3.
5. **Уткин В. И.** Скользящие режимы в задачах оптимизации и управления. М.: Наука, 1981.
6. **Востриков А. С.** Синтез нелинейных систем методом локализации: Учебное пособие. Новосибирск: Изд-во НГУ, 1990.
7. **Frantsuzova G. A.** Localization principle in the synthesis problem of extremal control system // Proc. of the IASTED International Conference "Automation, Control and Information Technology (ACIT-2002)", 2002. P. 322.
8. **Геращенко Е. И., Геращенко С. М.** Метод разделения движений и оптимизация нелинейных систем. М.: Наука, 1975.

Новосибирский государственный технический университет,
E-mail: frants@ac.cs.nstu.ru

Поступила в редакцию 23 января 2003 г.