5. **Nakano Y., Tien C.** Creeping flow of power-law fluid over Newtonian fluid sphere // AIChE J.— 1968.— V. 14, N 15.
6. **Ривкинд В. Я.** Стационарное движение вязкой капли с учетом ее деформации // Зап. науч. семин. ЛОМИ им. В. А. Стеклова.— 1979.— Т. 84.
7. **Ривкинд В. Я.** Гидродинамика и тепломассообмен капель: Автореф. дис. ... д-ра физ.-мат. наук.— Л., 1986.
8. **Гонор А. Л., Ривкинд В. Я.** Динамика капли // Итоги науки и техники. Сер. МЖГ.— М.: ВИНИТИ, 1982.— Т. 17.
9. **Волков П. К.** Всплытие капель жидкости в вертикальных трубах с другой жидкостью // Моделирование в механике/АН СССР, Спб. отд-ние, ИТПМ.— 1990.— Т. 4(21), № 5.
10. **Christov C. I., Volkov P. K.** Numerical investigation of the steady viscous flow past a stationary deformable bubble // J. Fluid Mech.— 1985.— V. 158.
11. **Волков П. К., Чиннов Е. А.** Стационарное всплытие одиночного пузыря в неограниченном объеме жидкости // ПМТФ.— 1989.— № 1.
12. **Brabston D. C., Keller H. B.** Viscous flows past spherical gas bubbles // J. Fluid Mech.— 1975.— V. 69, N 1.
13. **Бэтчелор Дж.** Введение в динамику жидкости.— М.: Мир, 1973.
14. **Haberman W. L., Morton R. K.** An experimental study of bubbles moving in liquids// Proc. ASCE.— 1954.— V. 49, N 387.

г. Новосибирск *Поступила 12/VII 1990 г.*

УДК 532.529

Н. А. Гумеров

О РАСПРОСТРАНЕНИИ ДЛИННЫХ ВОЛН КОНЕЧНОЙ АМПЛИТУДЫ В ПОЛИДИСПЕРСНОЙ СМЕСИ ЖИДКОСТИ С ПУЗЫРЬКАМИ ГАЗА

Среди большого количества аналитических и численных исследований волновых процессов в пузырьковых жидкостях (обзор, основные результаты и библиографию см. в [1, 2]) относительно скромное место занимает изучение распространения волн в полидисперсных пузырьковых системах. В [3, 4] рассмотрено распространение акустических возмущений в полидисперсной пузырьковой среде. Некоторые результаты численных и аналитических исследований структуры ударных волн в полидисперсных смесях жидкости с конечным числом фракций пузырьков приведены в [5, 6].

В данной работе изучается вопрос о возможности описания распространения длинных волн конечной амплитуды в пузырьковой жидкости с непрерывным спектром размеров газовых пузырьков на основе модели монодисперсной среды. Показано, что в общем случае такое описание неправомерно. Однако в ситуации, когда поверхностное натяжение слабо влияет на давление в пузырьке и процессы близки к изотермическим или адиабатическим, в длинноволновой асимптотике возможно введение эффективных радиусов пузырьков, характеризующих средние периоды собственных колебаний пузырьков, теплообмен и поверхностное натяжение на межфазной границе. В плоском одномерном случае для волн умеренной амплитуды (слабых возмущений волн Римана) выведены эволюционные уравнения, обобщающие уравнения типа Бюргерса — Кортевега — де Вриза на более высокие амплитуды (ранее уравнение БКдВ было получено для слабонелинейных волн [1, 2, 7, 8]).

1. Исходные уравнения. Рассмотрим невозмущенное однородное по пространству состояние смеси несжимаемой жидкости с пузырьками нерастворимого газа, характеризуемое индексом 0. Будем считать, что в каждом элементарном объеме смеси сферические пузырьки распределены по радиусам a_0 с плотностью распределения $N_0(a_0)$ на отрезке $\Delta = [a_-, a_+]$ ($a_0 \in \Delta$) и $dn_0(a_0) = N_0(a_0)da_0$ — число пузырьков с размерами от a_0 до $a_0 + da_0$ в единице объема смеси. Пометим каждую квазимонодисперсную фракцию пузырьков в смеси с размерами от a_0 до $a_0 + da_0$ лагранжевым индексом ξ, который будем считать непрерывным и, например, равным по определению a_0, предполагая, что фракция ξ может быть описана как самостоятельная монодисперсная фаза многофазного континуума [9]. В возмущенном состоянии параметры смеси в целом и несущей фазы не зависят от ξ, в то время как текущие параметры пузырьков будут функциями от ξ (что в дальнейшем при необходимости помечается индексом ξ). Так, $dn_\xi(\mathbf{x}, t) = N_\xi(\mathbf{x}, t)d\xi$, $a_\xi(\mathbf{x}, t)$, $\rho_\xi^0(\mathbf{x}, t)$, $m_\xi(\mathbf{x}, t) = \frac{4}{3}\pi a_\xi^3\rho_\xi^0$, $p_\xi(\mathbf{x}, t)$ трактуются как текущие число пузырьков фракции ξ в единице объема смеси, их радиус, истинная плотность, масса и давление газа в пузырьках ($\mathbf{x}$,

t — радиус-вектор элементарного объема и время). Отмечая индексами 1 параметры несущей фазы и 2 интегральные, не зависящие от ξ параметры пузырьков, можно записать уравнения движения разреженного ($\alpha_2 \ll 1$) полидисперсного континуума в односкоростном приближении в форме [1, 3, 9]

$$
(1.1) \qquad d_t m_\xi = 0,\ d_t\rho_1 + \rho_1 \nabla \mathbf{v} = 0\ (d_t\rho + \rho\nabla\mathbf{v} = 0),
$$
$$
d_t N_\xi + N_\xi\ \nabla\mathbf{v} = 0,\ \rho d_t\mathbf{v} + \nabla p = 0\ (d_t = \partial_t + \mathbf{v}\nabla,\ \partial_t = \partial/\partial t),
$$
$$
\rho_1^0\left[a_\xi d_t^2 a_\xi + \frac{3}{2}(d_t a_\xi)^2 + \frac{4\nu_1}{a_\xi} d_t a_\xi\right] + \frac{2\sigma}{a_\xi} = p_\xi - p,
$$
$$
\alpha_2 = \int\limits_\Delta \frac{4}{3}\pi a_\xi^3 N_\xi\, d\xi,\ \rho_2 = \int\limits_\Delta m_\xi N_\xi\, d\xi,\ \alpha_1 = 1 - \alpha_2,\ \rho_1 = \rho_1^0\alpha_1,\ \rho = \rho_1 + \rho_2,
$$
$$
\rho_2^0 = \rho_2/\alpha_2.
$$

Здесь ρ, ρ^0 — средняя и истинная плотности; v — скорость смеси; α — объемное содержание; ν, σ — коэффициенты кинематической вязкости и поверхностного натяжения; величины без индексов (ρ, $\mathbf{v}$, p) относятся к смеси в целом.

Отметим, что в односкоростном приближении имеется интеграл

$$
(1.2) \qquad \rho_1/\rho_{10} = \rho/\rho_0 = N_\xi/N_{\xi 0}\quad (N_\xi = (\rho/\rho_0)N_{\xi 0}),
$$

позволяющий выразить текущее распределение размеров пузырьков через начальное.

Система (1.1) не замкнута, поскольку нет связи между p_ξ и a_ξ. Эта связь может быть найдена из решения задачи теплообмена одиночного пузырька, состоящего из совершенного газа, с окружающей жидкостью. В гомобарической постановке ($p_g = p_g(t)$) в системе координат, связанной с центром пробного сферического пузырька, она имеет вид [1] ($p_g = p_\xi$, $a = a_\xi$)

$$
(1.3) \qquad p_g(t) = R_2\rho_g(r, t)\,T_g(r, t),\ w_g(r, t) = \frac{\gamma_2 - 1}{\gamma_2 p_g}\lambda_2\partial_r T_g - \frac{r}{3\gamma_2 p_g}\partial_t p_g,
$$
$$
\rho_g c_2(\partial_t T_g + w_g\partial_r T_g) = \lambda_2 r^{-2}\partial_r(r^2\partial_r T_g) + \partial_t p_g,
$$
$$
a\partial_t p_g + 3\gamma_2 p_g\partial_t a + 3(\gamma_2 - 1)q_g = 0,\ q_g = -\lambda_2(\partial_r T_g)_{r=a},
$$
$$
T_g|_{r=a} = T_0 = \mathrm{const},\ \partial_r T_g|_{r=0} = 0\quad (\partial_t = \partial/\partial t,\ \partial_r = \partial/\partial r),
$$

где индекс g служит для обозначения «микрополей» в газе; r — радиальная координата; T, w, q — температура, радиальная скорость и тепловой поток на границе пузырька; R_2, γ_2, c_2, λ_2 — величины, считающиеся постоянными: газовая постоянная, показатель адиабаты, теплоемкость при постоянном давлении и теплопроводность газа.

Рассмотрим распространение волн с характерным периодом t_* ($t_* = L_*/C_*$, L_*, C_* — характерные длина и скорость волны). Введем следующие безразмерные переменные:

$$
(1.4) \qquad p_g' = \frac{p_g}{p_{g0}},\ p' = \frac{p}{p_0},\ \rho_g' = \frac{\rho_g}{\rho_{g0}},\ \rho' = \frac{\rho}{\rho_0},\ T_g' = \frac{T_g}{T_0},\ \mathbf{v}' = \frac{\mathbf{v}}{C_*},
$$
$$
\mathbf{x}' = \frac{\mathbf{x}}{L_*},\ t' = \frac{t}{t_*},\ a' = \frac{a}{a_0},\ \eta = \frac{r}{a(t)},\ w_g' = \frac{w_g t_*}{a_0},\ q_g' = \frac{q_g a(t)}{\lambda_2 T_0},
$$
$$
\sigma' = \frac{\sigma}{a_0 p_0}\left(p_{g0} = p_0 + \frac{2\sigma}{a_0} = R_2\rho_{g0}T_0,\ a_0 \equiv \xi,\ a_\xi' = a',\ p_\xi' = p_g'\right).
$$

Уравнения (1.1), (1.3) показывают, что поведение пузырька определяется тремя собственными временами

$$
(1.5) \qquad \tau_i = a_0\left(\frac{\rho_1^0}{p_0}\right)^{1/2},\ \tau_\lambda = \frac{a_0^2}{\varkappa_2},\ \tau_\mu = \frac{\mu_1}{p_0}\quad \left(\varkappa_2 = \frac{\lambda_2}{\rho_{g0}c_2},\ \mu_1 = \rho_1^0\nu_1\right),
$$
$$
\delta_j = \tau_j/t_*,\ j = \lambda, i, \mu\quad (\delta_i = \delta_i(\xi),\ \delta_\lambda = \delta_\lambda(\xi),\ a_0 \equiv \xi),
$$

характеризующими проявление инерционных, тепловых и вязких эффектов при взаимодействии пузырька с жидкостью. Безразмерные параметры δ_j показывают сопоставимость указанных времен с характерным временем внешнего воздействия t_*. Под длинноволновым приближением будем понимать ситуацию, когда $\delta_i \ll 1$, $\delta_\mu \ll 1$ (см. также [10]), и выделим случаи $\delta_\lambda \ll 1$ и $\delta_\lambda \gg 1$ (поведение газа в пузырьке близко соответственно к изотермическому и адиабатическому).

Введем линейный оператор осреднения

$$\langle g\rangle = \left(\int\limits_\Delta gN_{\xi 0}\xi^3\,d\xi\right)\Big/\left(\int\limits_\Delta N_{\xi 0}\xi^3\,d\xi\right) \tag{1.6}$$

(если g от ξ не зависит, то $\langle g\rangle = g$) и средние радиусы [9]

$$a_{m,n} = \left[\left(\int\limits_\Delta N_{\xi 0}\xi^m\,d\xi\right)\Big/\left(\int\limits_\Delta N_{\xi 0}\xi^n\,d\xi\right)\right]^{1/(m-n)}, \quad m \neq n. \tag{1.7}$$

В дальнейшем будем, как правило, пользоваться безразмерными величинами (1.4), (1.5) и для сокращения записи штрих у них опустим.

2. Нулевое (равновесное) приближение. Полагая $\delta_i = 0$, $\delta_\mu = 0$ и $\delta_\lambda = 0$ ($T_g = 1$, $p_g = \rho_g$) или $\delta_\lambda = \infty$ $\left(p_g = \rho_g^{\gamma_2}\right)$, имеем

$$2[a(\xi)]^{-1}\sigma(\xi) = [a(\xi)]^{-3\varkappa}(1 + 2\sigma(\xi)) - p \quad (a = f_\sigma(\xi, p)). \tag{2.1}$$

Здесь и далее $\varkappa$ — показатель политропы, равный 1 в изотермическом и γ_2 в адиабатическом случае; f_σ — единственный положительный корень уравнения (2.1). Пользуясь (1.1), (1.2), (1.6), получим уравнение состояния полидисперсной смеси

$$\rho = \left[\alpha_{10} + \alpha_{20}\left\langle f_\sigma^3(\xi, p)\right\rangle\right]^{-1}, \tag{2.2}$$

которое, вообще говоря, отличается от уравнения состояния для монодисперсиой пузырьковой среды [1], поскольку пузырьки разных размеров деформируются по-разному. Если радиусы пузырьков или давления в среде велики настолько, что поверхностным натяжением можно пренебречь, то дисперсный состав смеси не влияет на уравнение состояния $\left(\lim\limits_{\sigma\to 0} f_\sigma^3 = f_0^3 = p^{-1/\varkappa}\right)$ и

$$p = [\alpha_{20}\rho/(1 - \alpha_{10}\rho)]^\varkappa. \tag{2.3}$$

Можно учесть первую поправку к этому уравнению, связанную с поверхностным натяжением. Разлагая (2.1) в ряд по малым σ и удерживая в дальнейших выкладках лишь линейные по σ члены, находим

$$p = \left(\frac{\alpha_{20}\rho}{1 - \alpha_{10}\rho}\right)^\varkappa \left\{1 + 2\sigma_{3,2}\left[1 - \left(\frac{\alpha_{20}\rho}{1 - \alpha_{10}\rho}\right)^{-\varkappa+1/3}\right]\right\}, \tag{2.4}$$

где $\sigma_{3,2} = \sigma/(p_0 a_{3,2})$ (σ — размерный коэффициент поверхностного натяжения, $a_{3,2}$ определено соотношением (1.7)). Тем самым показано, что распространение длинных волн в полидисперсной смеси в равновесном приближении при учете малой поправки за счет поверхностного натяжения будет таким же, как в монодисперсной смеси с эффективным радиусом пузырьков $a_{3,2}$ (переход к случаю монодисперсной среды осуществляется, если положить $N_{\xi 0} = n_0\delta(\xi - a_*)$, $\delta(\xi)$ — дельта-функция Дирака, a_* — невозмущенный размер пузырьков, при этом $a_{m,n} = a_*$ для любых m и n (1.7)). В дальнейшем для упрощения выкладок поверхностным натяжением будем пренебрегать.

Из (2.4) видно, что при малых α_{20} возмущение давления p на величину $\sim \varepsilon$ приводит к возмущению плотности ρ на $\sim \varepsilon\alpha_{20}$. Уравнения сохранения массы и импульса (1.1) показывают, что скорость $\mathbf{v}$ при этом возмущается на величину $\sim \varepsilon\alpha_{20}$. Вводя характерные величины и пренебрегая членами $O(\alpha_{20})$, из (1.1), (1.4), (2.4) получим

$$\partial_t r + \nabla \mathbf{u} = 0,\ \partial_t \mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{0},\ p = \pi(r) \equiv (1 - r)^{-\varkappa} \tag{2.5}$$

$$(r = \alpha_{20}^{-1}(\rho - 1),\ \mathbf{u} = \alpha_{20}^{-1}\mathbf{v},\ C_* = [p_0/(\alpha_{20}\rho_0)]^{1/2}).$$

Система (2.5) описывает движение баротронного газа и в плоском одномерном случае допускает решение в виде простой волны Римана. Так, для волны, бегущей вправо, имеем

$$\partial_t r + c(r)\partial_x r = 0,\ c(r) = [\pi'(r)]^{1/2} = [\varkappa(1 - r)^{-\varkappa-1}]^{1/2} = U'(r), \tag{2.6}$$

$$u = U(r),\ U|_{\varkappa=1} = -\ln(1 - r),\ U|_{\varkappa\neq 1} = 2\varkappa^{1/2}(\varkappa - 1)^{-1}(1 - r)^{-(\varkappa-1)/2}.$$

Здесь штрих обозначает дифференцирование; $c(r)$ — скорость распространения постоянных значений плотности, которая, как нетрудно видеть, подчиняется уравнению

$$\partial_t c + c\partial_x c = 0. \tag{2.7}$$

Отметим, что при $\varkappa = 1$ давление в пузырьковой среде $p = \pi(r) = c(r)$ удовлетворяет (2.7).

3. Межфазный теплообмен. В переменных (1.4) ($\partial_r = a^{-1}\partial_\eta$, $\partial_t = \partial_t - a^{-1}(\partial_t a)\eta\partial_\eta$) тепловая задача (1.3) сводится к

$$a^2\left(p_g\partial_t T_g - \gamma_2^{-1}(\gamma_2 - 1)\, T_g\partial_t p_g\right) = \delta_\lambda^{-1}\left[T_g\eta^{-2}\partial_\eta(\eta^2\partial_\eta T_g) - \right. \tag{3.1}$$

$$\left. - (\partial_\eta T_g + \eta q_g)\,\partial_\eta T_g\right],$$

$$3\gamma_2 p_g a\,\partial_t a + a^2\,\partial_t p_g + 3\gamma_2\delta_\lambda^{-1} q_g = 0,\ q_g = -\,\partial_\eta T_g|_{\eta=1},\ T_g|_{\eta=1} = 1.$$

Рассмотрим отдельно случаи толстого ($\delta_\lambda \ll 1$) и тонкого ($\delta_\lambda \gg 1$) теплового пограничного слоя в пузырьке.

А. $\delta_\lambda \ll 1$. Разложим T_g и q_g в асимптотические ряды по малому параметру δ_λ:

$$T_g = T_{g0} + \delta_\lambda T_{g1} + \ldots,\ q_g = q_{g0} + \delta_\lambda q_{g1} + \ldots,\ q_{gj} = -\partial_\eta T_{gj}|_{\eta=1}, \tag{3.2}$$

$$j = 0, 1 \ldots$$

Подставляя (3.2) в (3.1), получим $T_{g0} \equiv 1$, $q_{g0} \equiv 0$ и

$$\eta^{-2}\partial_\eta(\eta^2\partial_\eta T_{g1}) = -\left(1 - \gamma_2^{-1}\right)a^2\partial_t p_g,\ \eta^{-2}\partial_\eta(\eta^2\partial_\eta T_{g2}) = \tag{3.3}$$

$$= -\,T_{g1}\eta^{-2}\partial_\eta(\eta^2\partial_\eta T_{g1}) + (\partial_\eta T_{g1} + \eta q_{g1})\,\partial_\eta T_{g1} + a^2\left(p_g\partial_t T_{g1} - \right.$$

$$\left. - \left(1 - \gamma_2^{-1}\right)T_{g1}\partial_t p_g\right),\ T_{gj}|_{\eta=1} = 0,\quad j = 1, 2, \ldots$$

Решая последовательно уравнения (3.3), находим

$$T_{g1} = \frac{1}{6}\left(1 - \gamma_2^{-1}\right)(1 - \eta^2)\,a^2\,\partial_t p_g,\ q_{g1} = \frac{1}{3}\left(1 - \gamma_2^{-1}\right)a^2\,\partial_t p_g,$$

$$q_{g2} = -\frac{1}{15}\,a^2 p_g\,\partial_t q_{g1}.$$

Подставляя выражения для q_{g1} и q_{g2} в (3.2) и в интеграл энергии (3.1), после интегрирования по t в линейном по δ_λ приближении имеем

$$p_g = a^{-3}\left[1 - \frac{1}{5}\left(1 - \gamma_2^{-1}\right)\delta_\lambda a^{-2}\,\partial_t a\right] = a^{-3}\,[1 - \delta_\lambda F(a, t)]. \tag{3.4}$$

Соотношение (3.4) представляет собой искомую связь между p_g и a, когда поведение пузырька близко к изотермическому. Отметим, что (3.4) можно получить и другим способом, вводя число Нуссельта для внутренней задачи $\mathrm{Nu}_g = 10$ [1]. Однако в [1] значение $\mathrm{Nu}_g = 10$ найдено из решения линейной задачи о малых гармонических колебаниях пузырька при частоте, стремящейся к нулю.

Б. $\delta_\lambda \gg 1$. В основной массе пузырька температура ведет себя по адиабатическому закону $T_g = p_g^{1-1/\gamma_2}$ и ее изменения по пространству происходят в узкой зоне толщины $\sim \delta_\lambda^{-1/2}$ вблизи границы. Вводя для пограничного слоя переменную $\zeta = \delta_\lambda^{1/2}(1-\eta)$ и обозначая $\chi = p_g^{-1+1/\gamma_2} T_g$, в нулевом приближении из (3.1) получим задачу

$$(3.5)\qquad a^2 p_g^{1/\gamma_2}\,\partial_t\chi = \chi\,\partial_\zeta^2\chi + (q - \partial_\zeta\chi)\,\partial_\zeta\chi,\ \ \chi|_{\zeta=0} = p_g^{-1+1/\gamma_2},\ \ \chi|_{\zeta=\infty} = 1,$$

$$q = \partial_\zeta\chi|_{\zeta=0} = \delta_\lambda^{-1/2} p_g^{-1+1/\gamma_2} q_g,$$

$$p_g^{-1}\partial_t p_g + 3\gamma_2 a^{-1}\partial_t a = -\,3\gamma_2\delta_\lambda^{-1/2} p_g^{-1/\gamma_2} a^{-2} q.$$

Отсюда видно, что величина q имеет порядок единицы и зависит от a, p_g и t. Поэтому из интеграла энергии находим $p_g = a^{-3\gamma_2}\left(1 + O\left(\delta_\lambda^{-1/2}\right)\right)$ (следующие отсюда соотношения $a^2 p_g^{1/\gamma_2} = a^{-1} + O\left(\delta_\lambda^{-1/2}\right)$ и $p_g^{-1+1/\gamma_2} = a^{3(\gamma_2-1)} + O\left(\delta_\lambda^{-1/2}\right)$ можно использовать в качестве коэффициента при $\partial_t\chi$ и граничного условия при $\zeta = 0$ в (3.5)) и

$$(3.6)\qquad p_g = a^{-3\gamma_2}\left(1 - \delta_\lambda^{-1/2} F(a, t)\right),\ \ F = 3\gamma_2 \int_0^t a(t)\,q(a(t), t)\,dt.$$

Явное выражение для F получить весьма сложно. В случае, когда температура в пузырьке изменяется не очень сильно (величина p_g^{-1+1/γ_2} близка к 1, что имеет место при относительно малых амплитудах или показателе адиабаты γ_2, близком к 1 («тяжелый» газ)), заменой времени $t \to \theta$ и линеаризацией по χ можно свести (3.5) к линейному уравнению теплопроводности в координатах (θ, ζ) и вычислить F:

$$(3.7)\qquad F = -\frac{3\gamma_2}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{\left[a^{3(\gamma_2-1)}(\tau) - 1\right] a(\tau)\,d\tau}{[\theta(t) - \theta(\tau)]^{1/2}},\ \ \theta(t) = \int_0^t a(t)\,dt.$$

Если, кроме того, амплитуда возмущения a мала, $|a-1| \ll 1$, то

$$(3.8)\qquad F = -\frac{9\gamma_2(\gamma_2-1)}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{[a(\tau) - 1]\,d\tau}{(t-\tau)^{1/2}}.$$

Помимо описанных выше в литературе встречаются другие схемы приближенного учета межфазного теплообмена в пузырьковой среде, например, с помощью «эффективной вязкости» [1]. В этой схеме используется решение линейной задачи теплообмена пузырька и на основе декремента затухания собственных колебаний пузырька искусственно вводится «вязкость» в уравнение Рэлея — Ламба [1]

$$(3.9)\qquad \nu_{\text{eff}} = \nu_1 + \frac{3(\gamma_2-1)}{4\sqrt{2}}\, a_0^{1/2}\varkappa_2^{1/2}\left(\frac{3\varkappa p_0}{\rho_1^0}\right)^{1/4}.$$

При применении схемы с ν_{eff} τ_μ в (1.5) будет зависеть от ξ $(a_0 = \xi)$ (величины в (3.9) размерные).

4. Первое приближение. Запишем безразмерное уравнение Рэлея — Ламба с использованием (3.4), (3.6) в виде

$$(4.1)\quad p = a_\xi^{-3\varkappa}\left\{1 - a_\xi^{3\varkappa}\left[\delta_i^2\left(a_\xi d_t^2 a_\xi + \frac{3}{2}(d_t a_\xi)^2\right) + 4\delta_\mu a_\xi^{-1} d_t a_\xi + \delta_T a_\xi^{-3\varkappa} F(a_\xi, t)\right]\right\}.$$

Здесь $\delta_T = \delta_\lambda^{-1/2}$ при $\delta_\lambda \gg 1$ и $\delta_T = \delta_\lambda$ при $\delta_\lambda \ll 1$, причем $F(a_\xi, t)$ отвечает F из (3.6) в первом случае и F из (3.4) во втором.

Из (4.1) видно, что $a_\xi = A\left[1 + O\left(\delta_i^2, \delta_\mu, \delta_T\right)\right]$, $A = p^{-1/(3\varkappa)}$. Положим $\delta_i^2 \sim \delta_\mu \sim \delta_T \sim \delta$ и подставим это выражение для a_ξ в члены $\sim \delta$ из (4.1), тогда, пренебрегая величинами $\sim \delta^2$, получим

$$(4.2)\qquad a_\xi^3 = p^{-1/\varkappa}\left\{1 - \frac{1}{\varkappa} p^{-1}\left[\delta_i^2\left(A d_t^2 A + \frac{3}{2}(d_t A)^2\right) + 4\delta_\mu A^{-1} d_t A + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \delta_T A^{-3\varkappa} F(A, t)\right]\right\}.$$

Применим теперь к обеим частям (4.2) оператор $\langle\,\rangle$ (1.6) и заметим, что в левой части, согласно (1.1), (1.2), $\alpha_2/(\alpha_{20}\rho)$, а правая часть в силу линейности $\langle\,\rangle$ и независимости p и A от ξ сохранится, только вместо соответствующих δ будут фигурировать величины $\langle\delta_i^2\rangle$, $\langle\delta_\mu\rangle$ и $\langle\delta_T\rangle$, их можно выразить через средние радиусы (1.7). Действительно, из (1.5), (3.4), (3.6), (3.9) находим

$$(4.3)\qquad \delta_j^* = \tau_j^*/t_*,\ j = i,\ \mu,\ T,\ \langle\tau_i^2\rangle = (\tau_i^*)^2,\ \tau_i^* = a_{5,3}(\rho_1^0/p_0)^{1/2},$$

$$1)\ \langle\tau_\mu\rangle = \tau_\mu^* = \tau_\mu,\ \langle\tau_T\rangle = \tau_\lambda^*,\ \tau_\lambda^* = a_{5,3}^2/\varkappa_2,$$

$$2)\ \langle\tau_\mu\rangle = \tau_\mu^* = \tau_\mu,\ \langle\tau_T\rangle = t_*^{3/2}(\tau_\lambda^*)^{-1/2},\ \tau_\lambda^* = a_{3,2}^2/\varkappa_2,$$

$$3)\ \tau_T \equiv 0,\ \langle\tau_\mu\rangle = \tau_\mu^* = \nu_{\mathrm{eff}}^*\rho_1^0/p_0,\ \nu_{\mathrm{eff}}^* = \nu_1 + \frac{3(\gamma_2 - 1)}{4\sqrt{2}}\, a_{\frac{7}{2},3}^{1/2}\, \varkappa_2^{1/2}\left(\frac{3\varkappa p_0}{\rho_1^0}\right)^{1/4},$$

где случаи 1—3 отвечают режимам теплообмена с толстым ($\delta_\lambda \ll 1$, $\varkappa = 1$), тонким ($\delta_\lambda \gg 1$, $\varkappa = \gamma_2$) тепловым пограничным слоем и учету теплообмена в схеме с эффективной вязкостью.

Таким образом, с точностью до $O(\delta^2)$ (4.2) можно переписать в виде уравнения состояния

$$(4.4)\quad p = A^{-3\varkappa} - \left[(\delta_i^*)^2\left(Ad_t^2A + \frac{3}{2}(d_tA)^2\right) + 4\delta_\mu^*A^{-1}\,d_tA + \delta_T^*A^{-3\varkappa}F(A, t)\right],$$

$$A = [(1 - \alpha_{10}\rho)/(\alpha_{20}\rho)]^{1/3} \approx (1 - r)^{1/3},$$

которое вместе с уравнениями сохранения массы и импульса смеси (например, первыми двумя уравнениями (2.5), $d_t \approx \partial_t$) образует замкнутую систему. Иными словами, если влияние поверхностного натяжения пренебрежимо мало, то в первом приближении по малому параметру δ: 1) при $\delta_\lambda \ll 1$ распространение длинных волн в полидисперсной смеси аналогично распространению волн в монодисперсных системах с теми же теплофизическими параметрами фаз, их объемной долей в смеси и радиусом пузырьков $a_{5,3}$ (эффективный радиус); 2) при $\delta_\lambda \gg 1$ и в схеме с эффективной вязкостью такой прямой аналогии нет — теплообмен определяется меньшим эффективным радиусом пузырьков, чем инерционные эффекты ($a_{3.2} \leqslant a_{7/2.3} \leqslant a_{5.3}$ — это доказывается с помощью неравенства Гельдера [9]). Тем не менее распространение волн в полидисперсной смеси можно описывать в рамках модели монодисперсной среды с использованием поправок на полидисперсность в соответствующих коэффициентах. В том и другом случае роль радиуса пузырька в модели монодисперсной среды играет функция от плотности (A, см. (4.4)).

5. Возмущения волн Римана. Рассмотрим уравнения, описывающие распространение плоских одномерных волн (2.5), (4.4):

$$(5.1)\quad \partial_t r + \partial_x u = 0,\ \partial_t u + \partial_x p = 0,\ p = \pi(r) - \delta\varphi\left(t, r, \partial_t r, \partial_t^2 r\right),\ \delta \ll 1.$$

При $\delta = 0$ здесь имеется решение в виде простой волны (2.6), которое можно представить как $\psi = \Psi(x - c(r)t)$ (ψ — любая искомая функция). Будем считать, что поправка $\sim \delta$ в уравнении состояния возмущает решение на величину $\sim \delta$ ($u = U(r) + \delta u_1(x, t)$, $u_1(x, t) \sim 1$), при этом можно ожидать, что возмущенная система приводит к эволюции в «медленном» времени δt решения Римана в сопутствующей системе координат $\psi = \Psi(x - c(r)t, \delta t)$, т. е. u_1 удовлетворяет уравнению $\partial_t u_1 + c(r)\partial_x u_1 = O(\delta)$. Отсюда, подставляя выражение для u в первое уравнение (5.1) и складывая его со вторым, поделенным на $c(r)$, из (2.6), (5.1) имеем

$$(5.2)\qquad \partial_t r + c(r)\,\partial_x r - \frac{1}{2}\,\delta\,[c(r)]^{-1}\,\partial_x\varphi\left(t, r, \partial_t r, \partial_t^2 r\right) = 0.$$

Производные по времени, входящие в φ, можно заменить на производные по пространственной переменной x:

$$\partial_t r = -c(r)\,\partial_x r + O(\delta),\ \partial_t^2 r = c^2(r)\,\partial_x^2 r + 2c(r)\,c'(r)\,(\partial_x r)^2 + O(\delta).$$

Остаточный член здесь не имеет значения, так как (5.2) получено в линейном по δ приближении. Кроме того, в (5.2) можно произвести замены, соответствующие римановской волне $u = U(r)$, $p = \pi(r)$, и найти волновые уравнения для u и p. Например, учитывая (4.4), для p имеем

$$(5.3)\quad \partial_t p + \varkappa^{1/2} p^{(\varkappa+1)/(2\varkappa)} \partial_x \Big\{ p + \frac{1}{6} (\delta_i^*)^2 p^{-1+1/(3\varkappa)} \Big[p \partial_x^2 p + \frac{1}{6\varkappa} (\partial_x p)^2 \Big] - \\ - \frac{2}{3} \varkappa^{-1/2} \delta_\mu^* p^{-(\varkappa-1)/(2\varkappa)} \partial_x p - \frac{1}{2} \delta_T^* p F \left(p^{-1/(3\varkappa)}, t \right) \Big\} = 0.$$

В общем случае уравнение (5.3) является интегродифференциальным (из-за F), оно становится дифференциальным, если принята схема с эффективной вязкостью $(\delta_T^* = 0)$ или же поведение пузырьков близко к изотермическому $(\varkappa = 1,\ \delta_T^* = \delta_\lambda^*,\ \delta_\mu^* = \delta_\mu)$. В последнем случае

$$(5.4)\quad \partial_t p + p \partial_x \Big\{ p + \frac{1}{6} (\delta_i^*)^2 p^{-2/3} \Big[p \partial_x^2 p + \frac{1}{6} (\partial_x p)^2 \Big] - \frac{2}{3} \delta_\mu \partial_x p - \\ - \frac{1}{30} \delta_\lambda^* \left(1 - \gamma_2^{-1}\right) p^{4/3} \partial_x p \Big\} = 0.$$

Особо простой вид (5.4) приобретает при $(\delta_i^*)^2 \ll \delta_\mu$, $\delta_\lambda^* \ll \delta_\mu$ (такая ситуация реализуется для смесей очень вязких жидкостей с достаточно мелкими пузырьками):

$$(5.5)\quad \partial_t p + p \partial_x p - \frac{2}{3} \delta_\mu p \partial_x^2 p = 0.$$

6. $\varepsilon\delta$-приближение. Предположим, что относительная амплитуда возмущения давления мала ($|p - 1| \sim \varepsilon \ll 1$) и $\delta \sim \varepsilon^n$, $n > 0$. Пренебрегая членами $\sim \varepsilon\delta$ ($\sim \varepsilon^{n+1}$) по сравнению с единицей (линеаризуя диссипативно-дисперсионные члены в уравнениях типа (5.2)), можно записать (5.3) в виде

$$(6.1)\quad \partial_t p + \varkappa^{1/2} p^\beta \partial_x p - \frac{1}{2} \varkappa^{1/2} \delta_T^* \partial_x F \left(1 - \frac{1}{3\varkappa} (p - 1), t \right) - \frac{2}{3} \delta_\mu^* \partial_x^2 p + \\ + \frac{1}{6} \varkappa^{1/2} (\delta_i^*)^2 \partial_x^3 p = 0$$

$$(\beta(\varkappa) = (\varkappa + 1)/(2\varkappa)).$$

При $\varkappa = 1$, $\delta_\lambda^* \ll 1$ из (5.4), (6.1) имеем уравнение БКдВ

$$(6.2)\quad \partial_t p + p \partial_x p - \frac{2}{3} \delta_{\mu\lambda}^* \partial_x^2 p + \frac{1}{6} (\delta_i^*)^2 \partial_x^3 p = 0,$$

$$\delta_{\mu\lambda}^* = \delta_\mu + \frac{1}{20} \left(1 - \gamma_2^{-1}\right) \delta_\lambda^* \quad \left(\delta_T^* = 0,\ \nu_{\text{eff}}^* = \nu_1 + \frac{1}{20} \left(1 - \gamma_2^{-1}\right) p_0 a_{5,3}^2 / (\rho_1^0 \varkappa_2)\right),$$

которое может быть получено и в схеме с эффективной вязкостью $(\delta_T^* = 0,\ \nu = \nu_{\text{eff}}^*)$, но с ν_{eff}^*, отличным от введенного в (4.3).

При $\varkappa = \gamma_2$, $\delta_\lambda^* \gg 1$ можно в (6.1) для F использовать линейное решение (3.8). Если заменить дифференцирование по x на соответствующее по t и считать, что процесс разворачивается по времени из $-\infty$, то (6.1) примет вид

$$(6.3)\quad \partial_t p + \gamma_2^{1/2} p^\beta \partial_x p + \frac{3(\gamma_2 - 1)}{2\sqrt{\pi \delta_\lambda^*}} \int_{-\infty}^{t} \frac{\partial p}{\partial \tau} \frac{d\tau}{\sqrt{t - \tau}} - \frac{2}{3} \delta_\mu \partial_x^2 p + \\ + \frac{1}{6} \gamma_2^{1/2} (\delta_i^*)^2 \partial_x^3 p = 0, \quad \beta = \beta(\gamma_2).$$

Если считать $\delta \sim \varepsilon$ ($n = 1$), то нелинейность можно учитывать в квадратичном приближении, как это делается при обычном методе вывода слабонелинейных длинноволновых уравнений [11]. Отметим, что (6.3) при этом похоже на интегродифференциальное уравнение [2], однако в

[2] ядро интеграла экспоненциальное, что по сути отвечает случаю $\delta_\lambda^* \ll \ll 1$. В схеме с эффективной вязкостью следует в (6.3) положить $\gamma_2 = \varkappa$, $\delta_\lambda^* = \infty$ и $\delta_\mu = \delta_\mu^*$ (4.3); тогда при учете нелинейности в квадратичном приближении (6.3) совпадает с известными уравнениями БКдВ [1, 2].

7. Обсуждение. Процедура получения асимптотических при $\delta \to 0$ уравнений (пп. 4—6) подразумевает ограниченность производных $\left(\partial_t^n a = O(1),\ \partial_\lambda^n p = O(1)\right)$, что выполняется для всех x и t, когда спектр волны не содержит высокочастотных гармоник (например, в системах с сильной диссипацией для волн разрежения, слабых длинных волн, длинных волн на начальной стадии эволюции и др.). В то же время нельзя ожидать адекватного описания структур волн сжатия с амплитудой $\varepsilon \gtrsim 1$, поскольку масштабы структур, собственно, и определяются дисперсионными и диссипативными эффектами, которые по смыслу используемых разложений должны быть малыми (фактически области структур являются областями неравномерности асимптотических разложений). Тем не менее эффективные размеры пузырьков, найденные выше, позволяют оценить размеры указанных областей волн сжатия умеренной амплитуды для полидисперсной смеси по известным результатам для монодисперсной смеси [1].

Интерес представляют уравнения $\varepsilon\delta$-приближения, занимающие промежуточное положение между уравнениями квадратичного по ε приближения и уравнениями для простой волны. В них полностью учитывается гидродинамическая нелинейность и нелинейность равновесного уравнения состояния, поэтому они применимы даже для волн большой амплитуды, когда допустимо равновесное приближение ($\delta = 0$). С другой стороны, уравнения $\varepsilon\delta$-приближения не менее обоснованы, чем уравнения ε^2-приближения, и могут использоваться для описания слабонелинейных волн с дисперсией и диссипацией. Отметим, что в ε^2- и $\varepsilon\delta$-приближениях уравнения для c (см. (2.7)) совпадают (например, (6.2)).

ЛИТЕРАТУРА

1. **Нигматулин Р. И.** Динамика многофазных сред.— М.: Наука, 1987.— Ч. II.
2. **Накоряков В. Е., Покусаев Б. Г., Шрейбер И. Р.** Распространение волн в газо- и парожидкостных средах.— Новосибирск: ИТ СО АН СССР, 1983.
3. **Кедринский В. К.** Распространение возмущений в жидкости, содержащей пузырьки газа // ПМТФ.— 1968.— № 4.
4. **Шаганов В. Ш.** Распространение малых возмущений в жидкости с пузырьками // ПМТФ.— 1977.— № 1.
5. **Шаганов В. Ш.** Структура ударных волн в полидисперсной смеси жидкость — пузырьки газа // Изв. АН СССР. МЖГ.— 1976.— № 6.
6. **Гаврилюк С. Л.** Существование, единственность и устойчивость по Лаксу бегущих волн в полидисперсной пузырьковой среде с диссипацией // Дифференциальные уравнения с частными производными.— Новосибирск: ИМ СО АН СССР, 1989.
7. **Wijngaarden** L. van. One-dimensional flow of liquids containing small gas bubbles // Ann. Rev. Fluid Mech.— 1972.— V. 4. Рус. пер. // Реология суспензий.— М.: Мир, 1975.
8. **Накоряков В. Е., Соболев В. В., Шрейбер И. Р.** Длинноволновые возмущения в газожидкостной смеси // Изв. АН СССР. МЖГ.— 1972.— № 5.
9. **Гумеров Н. А., Ивандаев А. И.** Распространение звука в полидисперсных газовзвесях // ПМТФ.— 1988.— № 5.
10. **Гумеров Н. А.** Длинные волны конечной амплитуды в полидисперсных газовзвесях // ПМТФ.— 1990.— № 4.
11. **Руденко О. В., Солуян С. И.** Теоретические основы нелинейной акустики.— М.: Наука, 1975.

г. Тюмень *Поступила 26/II 1991 г.*