здесь определялись константы Мурнагана. Результаты измерений приведены ниже:

$l\cdot10^{-10}$ *н/м²*	—29+6	—35	[3]
$m\cdot10^{-10}$ *н/м²*	—31+6	—37	[3]
$n\cdot10^{-10}$ *н/м²*	—26+5	—27	[3]

Значения плотности взяты из литературы. Константы упругости второго порядка измерялись по скорости упругих волн.

Видно, что константы упругости третьего порядка, определенные по модуляции звука звуком, в пределах ошибки измерения совпадают со средними значениями констант, приведенными в [3]. Необходимо учесть разброс констант упругости, зависящий от обработки материала.

Из приведенных результатов эксперимента была вычислена амплитуда давления в пучности модулирующего поля. Вычисленная по результатам измерения величины индекса модуляции упругих волн при частоте модулирующего поля 19.5 *кгц* амплитуда давления — $5\cdot10^6$ *дин/см*. Этот результат хорошо согласуется с результатом определения амплитуды давлений по величине пьезомодуля пьезопреобразователя и по величине электрического модулирующего сигнала. В данном случае при добротности стежня на частоте 19.5 *кгц*, равной 60, амплитуда давлений в пучности $5.8\cdot10^6$ *дин/см²*.

Поступила 4 IV 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гиц И. Д.*, *Конюхов Б. А.* Об оценке констант упругости третьего порядка изотропных твердых тел по модуляции звука звуком. Акуст. ж., 1973, т. 19, вып. 2.
2. *Конюхов Б. А.*, *Шалашов Г. М.* О нерезонансных параметрических взаимодействиях поверхностных волн в изотропных телах. ПМТФ, 1973, № 4.
3. *Савин Г. Н.*, *Лукашев А. А.*, *Лыско Е. М.*, *Веремеенко С.В.*, *Вожевская С. М.* Распространение упругих волн в твердом теле в случае нелинейно-упругой модели сплошной среды. Прикл. механ., 1970, т. 6, № 2.

УДК 539.3

ОБ ОДНОМ СЛУЧАЕ РАВНОВЕСИЯ СИСТЕМЫ РАДИАЛЬНЫХ ТРЕЩИН

Е. Н. Шер

(*Новосибирск*)

Рассматривается задача плоской теории упругости о равновесии системы равномерно распределенных трещин равной длины, пересекающихся в одной точке. Система нагружена сосредоточенными силами, приложенными к вершинам клиньев, вырезаемых трещинами, и действующими по биссектрисам этих клиньев.

Находится аналитическое выражение для коэффициента особенности поля напряжений в носике трещин.

1. В [1] рассматривалась задача плоской теории упругости о равновесии системы равномерно распределенных радиальных трещин равной длины, выходящих на круговую полость. Такая задача представляет интерес с точки зрения теории разрушения хрупких тел взрывом удлиненных цилиндрических зарядов. Возможны два способа нагружения: первый, когда постоянное давление приложено как к границе полости, так и к берегам трещин, и второй, когда постоянное давление приложено к границе полости, а берега трещин свободны от напряжения. В [1] приводится численное решение задачи для первого способа нагружения в случае одной и двух трещин.

Предельный случай задачи для бесконечно малого радиуса полости был рассмотрен в [2], где дано аналитическое решение задачи о равновесии системы равномерно распределенных трещин равной длины, пересекающихся в одной точке и нагруженных постоянным давлением, которое приложено к берегам трещин. Приближенное аналитическое решение этой задачи получено в [3].

В данной работе рассматривается задача о равновесии такой же системы трещин нагруженной сосредоточенными силами, которые приложены к вершинам клиньев вырезаемых трещинами, и направленных по биссектрисам этих клиньев. Такая постановка соответствует задаче [1] для второго способа нагружения при условии, что длина трещин много больше радиуса полости.

Методом Винера — Хопфа найдено решение парных интегральных уравнений, полученных в [2], но с иными граничными условиями. Приводится аналитическое выражение для коэффициента особенности поля напряжений в носике трещины.

Пусть в тонкой бесконечной упругой пластине имеется n радиальных трещин единичной длины. Углы между соседними трещинами равны $2\pi / n$. Берега трещин свободны от нагружения. К вершинам клиньев, вырезаемых трещинами, приложены сосредоточенные силы Q, действующие по биссектрисам углов этих клиньев.

Симметрия задачи позволяет рассмотреть один такой клин. Введем полярную систему координат (r, θ). Пусть клин занимает область $0 < r < \infty$, $|\theta| \leqslant \pi / n$.

Из симметрии задачи следует:

$$\begin{aligned} &\sigma_{r\theta} = 0 \quad \text{при} \quad |\theta| = \pi / n, \quad 0 < r < \infty \\ &v = 0 \quad \text{при} \quad |\theta| = \pi / r, \quad 1 < r < \infty \end{aligned} \tag{1.1}$$

Здесь $\sigma_{r\theta}$ — компонента тензора напряжения, v — тангенциальная компонента вектора смещения.

Для описания воздействия сосредоточенной силы, приложенной к вершине клина, рассмотрим задачу о действии такой силы на свободный бесконечный клин, на границах которого выполняются условия $\sigma_{\theta\theta} = 0$, $\sigma_{r\theta} = 0$ при $|\theta| = \pi / n$. Сила Q действует по оси $\theta = 0$. Решение такой задачи [4] описывается функцией Эри

$$\Psi = -[Q\theta\, r \sin\theta][2\pi / n + \sin 2\pi / n]^{-1} \tag{1.2}$$

Значения тангенциального смещения при $\theta = \pi / n$ выражаются формулами

$$\begin{aligned} &Ev = A \ln r + B \\ &A = 2Q (\sin \pi / n) \ [2\pi / n + \sin 2\pi / n]^{-1} \\ &B = Q\,[2\pi/n + \sin 2\pi/n] \Big[(1+\nu)\sin 2\pi/n - \\ &- (1-\nu)\frac{\pi}{n}\cos 2\pi/n\Big] - U_0 \sin \pi/n \end{aligned} \tag{1.3}$$

Здесь U_0 — произвольная константа, E — модуль Юнга, ν — коэффициент Пуассона. Вычтем (1.2) из формул, описывающих рассматриваемую задачу. Граничные условия разностной задачи, используя (1.1), (1.3), можно представить в виде

$$\begin{aligned} &\sigma_{r\theta} = 0 \quad \text{при } |\theta| = \pi / n, \quad 0 < r < \infty \\ &\sigma_{\theta\theta} = 0 \quad \text{при } |\theta| = \pi / n, \quad 0 < r < 1 \\ &v = \pm (A \ln r + B) \quad \text{при } \theta = \pm \pi / n, \quad 1 < r < \infty \\ &Q = 2 \sin \pi/n \int_1^\infty \sigma_{\theta\theta} dr \end{aligned} \tag{1.4}$$

2. Рассмотрим решение задачи (1.4). В [2] с применением преобразования Меллина к бигармоническому уравнению для функции Эри Ψ с учетом симметрии и условия (1.1) для образа $\overline{\Psi}$ получено выражение

$$\begin{aligned} &\overline{\Psi}(\theta, s) = \int_0^\infty \Psi(r, \theta)\, r^{s-2} dr = F(\theta, s)\,\Psi(s) \\ &F(\theta, s) = \frac{1}{4}\left\{\frac{(s+1)\cos[(s-1)\theta]}{(s-1)\sin[(s-1)\pi/n]} - \frac{\cos[(s+1)\theta]}{\sin[(s+1)\pi/n]}\right\} \end{aligned} \tag{2.1}$$

Для $\overline{\sigma}_{\theta\theta}$ и $\overline{u}$ на границах клина при $\theta = \pi / n$ получаются выражения

$$\begin{aligned} &\overline{\sigma}_{\theta\theta}(s) = \int_0^\infty \sigma_{\theta\theta}(r)\, r^{s} dr = k(s)\,\psi(s) \\ &E\overline{v}(s) = E\int_0^\infty v(r)\, r^{s-1} dr = \psi(s) \\ &k(s) = \frac{s}{4}\left\{\frac{\sin(2s\pi/n) + s\sin 2\pi/n}{\sin[(s-1)\pi/n]\sin[(s+1)\pi/n]}\right\} \end{aligned} \tag{2.2}$$

Введем функции

(2.3) $$\sigma_+(s) = \int_0^1 \sigma_{\theta\theta}(r)\, r^s dr, \quad \sigma_-(s) = \int_1^\infty \sigma_{\theta\theta}(r)\, r^s dr$$

$$v_+(s) = \int_0^1 v(r)\, r^{s-1} dr, \quad v_-(s) = \int_1^\infty v(r)\, r^{s-1} dr$$

Из условий (2.2), (2.3) следует:

(2.4) $$\sigma_+(s) = 0, \qquad v_-(s) = A / s^2 - B / s$$

Если предположить, что $v(r) \sim r^\varepsilon$ при $r \to 0$, где $\varepsilon > 0$ (постоянную часть $v(r)$ можно уничтожить выбором U_0), $\sigma_{\theta\theta} \sim r^{-1}$ при $r \to \infty$, то относительно функций σ_- v_+ можно заключить [5], что $\sigma_-(s)$ является регулярной функцией комплексной переменной s при $\operatorname{Re} s < 0$, а $v_+(s)$ регулярна при $\operatorname{Re} s > -\varepsilon$. Исключая $\psi(s)$ из (2.2), получаем для $v_+(s)$, $\sigma_-(s)$ функциональное уравнение

(2.5) $$\sigma_- = -k(s) E (v_+ + v_-)$$

Пользуясь факторизацией функции $k(s)$, проведенной в [2], представим $k(s)$ в виде

(2.6) $$k(s) = K_+ K_-$$

$$K_+ = \frac{s^2 F_+}{1+s}, \qquad K_- = \frac{-c(n) F_-}{1-s}$$

$$c(n) = \frac{2\pi/n + \sin 2\pi/n}{4 \sin^2 \pi/n}$$

$$F_+(s) = F_-(s) = \prod_{m=1}^\infty \frac{(1 + s/a_m)(1 + s/\bar{a}_m)}{[1 + s/(mn+1)][1 + s/(mn-1)]}$$

Здесь a_m — корни уравнения $\sin(2s\pi / n) + s[\sin(2\pi / n)] = 0$ в первом квадрате плоскости s. Функция K_+ регулярна при $\operatorname{Re} s > -1$, K_- регулярна при $\operatorname{Re} s < 1$ и не имеет там нулей. Разделим равенство (2.5) на K_-

(2.7) $$\sigma_- / K_- = -K_+ E v_+ - K_+ E v_-$$

Левая часть этого равенства регулярна при $\operatorname{Re} s < 0$, правая регулярна при $\operatorname{Re} s > -\varepsilon$.

Установим характер поведения рассматриваемых функций на бесконечности

$$\sigma_- \sim |s|^{-1/2}, \qquad K_- \sim |s|^{-1/2} \quad \text{при } s \to -\infty$$
$$v_+ \sim s^{-3/2}, \qquad K_+ \sim s^{3/2} \quad \text{при } s \to +\infty$$

(Для σ_- и v_+ порядок на бесконечности определяется известным поведением решения в носике трещины при $r = 1$). Из теоремы Лиувилля и условия (2.4) следует:

(2.8) $$\sigma_- / K_- = \sigma_-(0) / K_-(0) = Q / 2c(n) \sin \pi / n$$

Равенства (2.8), (2.6), (2.2) определяют вид функций σ_- и $\psi(s)$, через которые можно выразить все параметры напряженного состояния в виде контурных интегралов обратного преобразования Меллина.

Найдем коэффициент при особенности для напряжений в носике трещины. Согласно [5], если $\sigma_{\theta\theta} \sim N(r-1)^{1/2}$ при $r \to 1+0$, то $\sigma_- \sim N\Gamma(1/2)\, |s|^{1/2}$ при $s \to -\infty$. Таким образом, для нахождения N достаточно определить поведение σ_- при $s \to -\infty$. Используя равенство [2]

$$F_-(s) = \frac{\Gamma^2(3/4)\, \Gamma(1 + 1/n - s/n)\, \Gamma(1 - 1/n - s/n)}{\Gamma^2(3/4 - s/n)\, \Gamma(1 + 1/n)\, \Gamma(1 - 1/n)} D(s)$$

$$D(s) = \prod_{m=1}^\infty \frac{(1 - s/a_m)(1 - s/\bar{a}_m)}{[1 - s/(mn - n/4)]}$$

получим при $s \to -\infty$

$$\sigma_- \approx \frac{Q}{2\sin\pi/n}\,\frac{\Gamma^2(3/4)\,D_0(n)}{\Gamma(1+1/n)\,\Gamma(1-1/n)}\sqrt{\frac{1}{-sn}}$$

$$D_0(n) = \lim_{s\to\infty} D(s) = \sqrt{\frac{n}{2c(n)}}\,\frac{\Gamma(1+1/n)\,\Gamma(1-1/n)}{\Gamma^2(3/4)}$$

Для системы n трещин длины l получаем

$$N = Q(2\pi)^{-1/2}\,[(2\pi/n + \sin 2\pi/n)l]^{-1/2} \tag{2.9}$$

При $n = 2$ это выражение совпадает с значением коэффициента при особенности поля напряжений в случае плоской трещины длины $2l$, растягиваемой сосредоточенными силами Q, приложенными к средним точкам ее берегов и действующими по нормали к трещине [6]. Используя (2.9), получаем для системы n радиальных свободных трещин длиной l, выходящих на полость радиуса r_0, нагруженную давлением p, следующее приближенное выражение для коэффициента при особенности поля напряжений в носике трещины

$$N = pr_0\sqrt{2\pi}\,n^{-1}[(2\pi/n + \sin 2\pi/n)l]^{-1/2}, \qquad l \gg r_0 \tag{2.10}$$

Поступила 13 II 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. *Bowie O. L.* Analysis of an infinite plate containing radial cracks originating at the boundary of an internal circular hole. J. Math. and Phys., 1956, vol. 35, No. 1.
2. *Westmann R. A.* Pressurized star crack. J. Math. and Phys., 1964, vol. 43, No. 3.
3. *Сметанин Б. И.* Об одной смешанной задаче теории упругости для клина. ПММ, 1968, т. 32, № 4.
4. *Лурье А. И.* Теория упругости. М., «Наука», 1970.
5. *Нобл Б.* Применение метода Винера — Хопфа для решения дифференциальных уравнений в частных производных. М., Изд-во иностр. лит., 1962.
6. *Мусхелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. М., «Наука», 1966.

УДК 662.215.2:532.522

ПРИБЛИЖЕННЫЙ МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ ИМПУЛЬСА НА КЛИНООБРАЗНОЙ ВЫЕМКЕ ПРИ МГНОВЕННОМ РАЗЛЕТЕ ТОНКОГО СЛОЯ ВЕЩЕСТВА С ЕЕ ПОВЕРХНОСТИ

В. Г. Литвинов, А. Н. Ткаченко

(*Челябинск*)

Предлагается наглядный геометрический метод, основанный на суперпозиции элементарных импульсов при многократном отражении разлетающихся частиц от поверхности выемки.

Результаты расчета хорошо согласуются с экспериментом.

1. В ряде случаев необходимо определить действующий на некоторую поверхность импульс давления от разлетающегося с нее тонкого слоя вещества в виде осколков и в газообразном состоянии, например от взрывчатого вещества (ВВ) при штамповке взрывом. Обычно эта задача описывается уравнениями газодинамики, решение которых в двумерной области проводится на ЭВМ. Однако анализ имеющихся решений [1–3] показывает возможность существенного упрощения задачи, если целью решения является только определение импульса.

Предположим, что для плоской поверхности импульс известен. В аналогичных условиях для клинообразной выемки он может быть приближенно найден следующим образом.