получим при $s \to -\infty$

$$\sigma_- \approx \frac{Q}{2\sin\pi/n}\,\frac{\Gamma^2(^3/_4)\,D_0(n)}{\Gamma(1+1/n)\,\Gamma(1-1/n)}\sqrt{\frac{1}{-sn}}$$

$$D_0(n) = \lim_{s\to\infty} D(s) = \sqrt{\frac{n}{2c(n)}}\,\frac{\Gamma(1+1/n)\,\Gamma(1-1/n)}{\Gamma^2(^3/_4)}$$

Для системы n трещин длины l получаем

$$N = Q(2\pi)^{-1/2}\,[(2\pi\,/\,n + \sin 2\pi\,/\,n)l]^{-1/2} \tag{2.9}$$

При $n = 2$ это выражение совпадает с значением коэффициента при особенности поля напряжений в случае плоской трещины длины $2l$, растягиваемой сосредоточенными силами Q, приложенными к средним точкам ее берегов и действующими по нормали к трещине [6]. Используя (2.9), получаем для системы n радиальных свободных трещин длиной l, выходящих на полость радиуса r_0, нагруженную давлением p, следующее приближенное выражение для коэффициента при особенности поля напряжений в носике трещины

$$N = pr_0\sqrt{2\pi}\,n^{-1}[(2\pi\,/\,n + \sin 2\pi\,/\,n)l]^{-1/2}, \qquad l \gg r_0 \tag{2.10}$$

Поступила 13 II 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. *Bowie O. L.* Analysis of an infinite plate containing radial cracks originating at the boundary of an internal circular hole. J. Math. and Phys., 1956, vol. 35, No. 1.
2. *Westmann R. A.* Pressurized star crack. J. Math. and Phys., 1964, vol. 43, No. 3.
3. *Сметанин Б. И.* Об одной смешанной задаче теории упругости для клина. ПММ, 1968, т. 32, № 4.
4. *Лурье А. И.* Теория упругости. М., «Наука», 1970.
5. *Нобл Б.* Применение метода Винера — Хопфа для решения дифференциальных уравнений в частных производных. М., Изд-во иностр. лит., 1962.
6. *Мусхелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. М., «Наука», 1966.

УДК 662.215.2:532.522

ПРИБЛИЖЕННЫЙ МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ ИМПУЛЬСА НА КЛИНООБРАЗНОЙ ВЫЕМКЕ ПРИ МГНОВЕННОМ РАЗЛЕТЕ ТОНКОГО СЛОЯ ВЕЩЕСТВА С ЕЕ ПОВЕРХНОСТИ

В. Г. Литвинов, А. Н. Ткаченко

(*Челябинск*)

Предлагается наглядный геометрический метод, основанный на суперпозиции элементарных импульсов при многократном отражении разлетающихся частиц от поверхности выемки.

Результаты расчета хорошо согласуются с экспериментом.

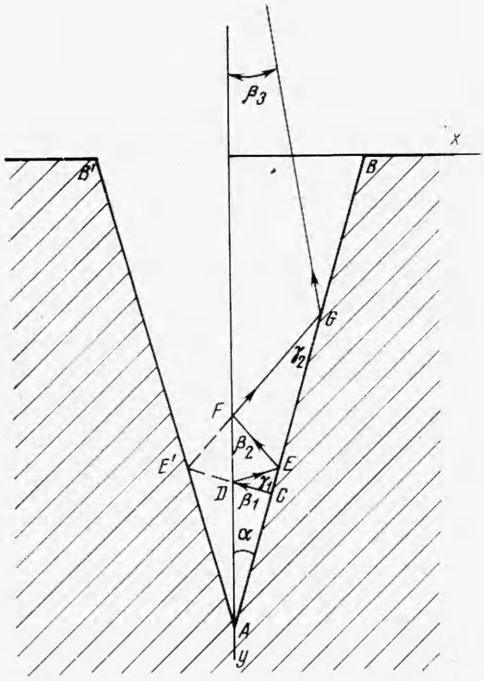
1. В ряде случаев необходимо определить действующий на некоторую поверхность импульс давления от разлетающегося с нее тонкого слоя вещества в виде осколков и в газообразном состоянии, например от взрывчатого вещества (ВВ) при штамповке взрывом. Обычно эта задача описывается уравнениями газодинамики, решение которых в двумерной области проводится на ЭВМ. Однако анализ имеющихся решений [1–3] показывает возможность существенного упрощения задачи, если целью решения является только определение импульса.

Предположим, что для плоской поверхности импульс известен. В аналогичных условиях для клинообразной выемки он может быть приближенно найден следующим образом.

Элемент площади ВВ можно рассматривать как частицу с количеством движения

(1.1) $$dr = i\,ds$$

в направлении внешней нормали к поверхности выемки, где i — известная интенсивность импульса. Если выемка симметрична (фиг. 1), то движение каждой частицы ограничено плоскостью симметрии yz и исходной поверхностью, при соударении с которыми вектор количества движения частицы может изменяться по величине и направлению, а преграда также получает соответствующий импульс. Будем считать процесс соударения упругим и, пренебрегая нелинейностью задачи, допустим возможность суммирования элементарных импульсов. В такой постановке задача решается чисто геометрически.



Фиг. 1

Вылетающая с поверхности AB в точке C частица подходит к плоскости симметрии под углом $\beta_1 = \pi / 2 - \alpha$. Поскольку при упругом соударении угол отражения от плоскости симметрии и от граней выемки равен углу падения (масса тела, имеющего выемку, считается бесконечно большой, значительно больше массы ВВ), частица ударяется об исходную поверхность в точке E под углом $\gamma_1 = \pi / 2 - 2\alpha$, а затем попадает в точку F под углом $\beta_2 = \pi / 2 - 3\alpha$ и в точку G под углом $\gamma_2 = \pi / 2 - 4\alpha$. Очевидно, при k-м соударении с исходной поверхностью она подходит к ней и отражается под углом $\gamma_k = \pi / 2 - 2k\alpha$. Максимально возможное количество соударений определится из условия $\gamma_m = \pi / 2 - 2m\alpha \geqslant 0$, откуда

(1.2) $$m = [\pi / 4\alpha]$$

(квадратные скобки означают здесь целую часть заключенного в них числа).

Отметим, что соударения частиц с исходной поверхностью возможны, если $2\alpha < \pi / 2$, в противном случае частица от плоскости симметрии yz сразу уходит на бесконечность и взаимное влияние граней выемки исключается.

После каждого соударения нормальная составляющая вектора количества движения частицы изменяет знак, следовательно, преграда получает импульс $2 \cos 2k\alpha dr$.

Полный импульс от частицы, отражающейся m раз

(1.3) $$(dr)_m = \left(1 + 2 \sum_{k=1}^{m} \cos 2k\alpha\right) dr$$

Известно [4], что

(1.4) $$\sum_{k=1}^{m} \cos 2k\alpha = \frac{\sin(2m+1)\alpha}{2\sin\alpha} - \frac{1}{2}$$

поэтому

(1.5) $$(dr)_m = i\,\frac{\sin(2m+1)\alpha}{\sin\alpha}\,ds$$

Проекция импульса (1.5) на вертикальное направление (по оси y)

(1.6) $$(dq)_m = i \sin(2m+1)\alpha\; ds$$

Этот результат можно было получить иначе, если учесть, что угол, образуемый вектором количества движения частицы с плоскостью yz при последнем отражении от грани, $\beta^{m+1} = \pi / 2 - (2m+1)\alpha$.

Положим $2\alpha < \pi / 2$ и найдем предельное расстояние AC от вершины выемки, при котором вылетающая из точки C частица попадает на исходную поверхность m раз. Из Δ $AСД$, $AЕД$ и AEF находим

$$AD = AC / \cos\alpha \tag{1.7}$$

$$AE = AD \frac{\sin(\pi/2 + \alpha)}{\sin(\pi/2 - 2\alpha)} = AC / \cos 2\alpha$$

$$AF = AE \frac{\sin(\pi/2 + 2\alpha)}{\sin(\pi/2 - 3\alpha)} = AC / \cos 3\alpha$$

Обозначая расстояние k-й точки соударения частицы с гранью через b_k, получим

$$b_k = AC / \cos 2k\alpha \tag{1.8}$$

Поскольку b_k не должно превышать ширину грани l, предельное расстояние AC, при котором частица отражается k раз

$$c_k = l \cos 2k\alpha \tag{1.9}$$

Практически наиболее интересен случай, когда слой ВВ имеет постоянную толщину по всей выемке. При этом $i = \text{const}$ и суммарный вертикальный импульс частиц, отражающихся m раз, будет (на единицу длины выемки)

$$Q_m = 2 \int_0^{c_m} (dq)_m = 2il \sin(2m + 1)\alpha \cos 2m\alpha \tag{1.10}$$

Суммарный импульс частиц, отражающихся k раз

$$Q_k = 2 \int_{c_{k+1}}^{c_k} (dq)_k = 4il \sin^2 (2k + 1)\alpha \sin\alpha \tag{1.11}$$

$$k = 0, 1, 2, \ldots, m - 1$$

Полный импульс от всех частиц

$$Q = 2il \left[2 \sin\alpha \sum_{k=0}^{m=1} \sin^2 (2k + 1)\alpha + \sin(2m + 1)\alpha \cos 2m\alpha \right] \tag{1.12}$$

Переходя от тригонометрических функций к показательным и пользуясь формулой суммы геометрической прогрессии, после преобразований получим

$$Q = il \sin\alpha \left[2m + 1 + \frac{\sin(2m + 1)2\alpha}{\sin 2\alpha} \right] \tag{1.13}$$

Отношение Q к импульсу на плоской поверхности от слоя ВВ шириной $2l$

$$\Phi = \frac{\sin\alpha}{2} \left[2m + 1 + \frac{\sin(2m + 1)2\alpha}{\sin 2\alpha} \right] \tag{1.14}$$

характеризует влияние профиля выемки.

График функции Φ показан на фиг. 2 (*1* — расчетная кривая, *2* — экспериментальная).

В точках, где $\pi / 4\alpha$ — целое число, Φ непрерывна вместе со своей производной, причем в интервалах между этими точками Φ имеет два экстремума: max и min. Наименьшее значение Φ принимает при $\alpha = 0.707$, оно равно 0.681. Когда α уменьшается до нуля, Φ стремится к асимптотическому значению $\pi / 4$.

2. Допустим, тонкий слой ВВ находится только на одной из граней выемки. Тогда частица из точки C попадает в точку E' противоположной грани, симметричную относительно E, а затем отражается опять в точку G исходной поверхности (фиг. 1). Обе грани получат такой же вертикальный импульс, как одна грань при симметричном расположении ВВ, т. е. $Q / 2$.

Кроме вертикального импульса появляется еще и горизонтальный (по оси x).

Частица, отражающаяся m раз от обеих граней, дает в горизонтальном направлении импульс

$$(dt)_m = i \cos(2m + 1)\alpha \, ds \tag{2.1}$$

Суммарный импульс частиц, отражающихся m раз

$$T_m = \int\limits_0^{c_m} (dt)_m = il \cos(2m+1)\alpha \cos 2m\alpha \tag{2.2}$$

k раз

$$T_k = \int\limits_{c_{k+1}}^{c_k} (dt)_k = il \sin(2k+1) 2\alpha \sin\alpha \tag{2.3}$$

$$k = 0, 1, 2, \ldots, m-1$$

Полный горизонтальный импульс

$$T = il \sin\alpha \left[\sum_{k=0}^{m-1} \sin(2k+1) 2\alpha + \frac{\cos(2m+1)\alpha \cos 2m\alpha}{\sin\alpha} \right] \tag{2.4}$$

После преобразований аналогично (1.13) найдем

$$T = il \sin\alpha \left[\frac{1}{2\,\mathrm{tg}\,\alpha} + \frac{\cos^2(2m+1)\alpha}{\sin 2\alpha} \right] \tag{2.5}$$

Слой ВВ шириной l на наклонной поверхности, совпадающей с гранью выемки, дает в горизонтальном направлении импульс

$$T = il \cos\alpha \tag{2.6}$$

Отношение (2.5) и (2.6)

$$\Psi = \frac{1}{2} \left\{ 1 + \left[\frac{\cos(2m+1)\alpha}{\cos\alpha} \right]^2 \right\} \tag{2.7}$$

характеризует влияние профиля выемки на величину горизонтального импульса.

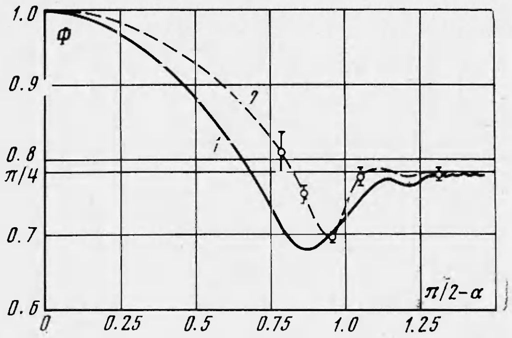
При $m = 0$, $\Psi = 1$ (взаимное влияние граней отсутствует); когда α уменьшается до нуля, Ψ стремится к минимальному значению, равному 0.5.

3. Пусть ширина слоя σ меньше ширины граней выемки, например

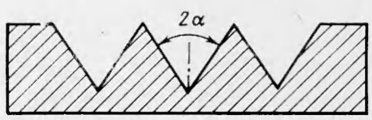
$$c_n \leqslant \sigma < c_{n-1} \quad (n \leqslant m+1)$$

т. е.

$$\cos 2n\alpha \leqslant \sigma / l < \cos 2(n-1)\alpha \tag{3.1}$$



Фиг. 2



Фиг. 3

Это возможно при условии

$$n = 1 + \left[\frac{1}{2\alpha} \arccos \frac{\sigma}{l} \right] \tag{3.2}$$

В таком случае полностью отсутствуют частицы, имеющие $n-2$ отражения или меньше, и неполностью — имеющие $n-1$ отражение. Следовательно, соответствующие импульсы необходимо вычесть из полного вертикального и горизонтального.

4. Экспериментальные исследования проводились на образцах с ребристой поверхностью из различных материалов (фиг. 3). На поверхность образца равномерно наносился тонкий слой бризантного ВВ. Образец с инициирующим устройством закреплялся на баллистическом маятнике, по отклонению которого определялась величина импульса. Импульс от инициирующего устройства определялся отдельно. Ребристые образцы сравнивались с плоскими из того же материала. Целью исследований являлось определение профиля выемки (угла α), при котором импульс, приходящийся на единицу веса ВВ, минимален.

Полученные экспериментально значения Ф по характеру зависимости от α совпадают с расчетными, несколько превышая их по величине. Для иллюстрации на фиг. 2 приведены экспериментальные значения Ф (средние значения по пяти опытам и их разброс), полученные на стандартном пенопласте ПС1-350.

Поступила 29 VI 1973

ЛИТЕРАТУРА

1. *Баум Ф. А., Станюкович К. П., Шехтер Б. И.* Физика взрыва. М., Физматгиз, 1959.
2. *Фонарев А. С.* Нестационарное расширение газа в вакуум при различных законах и длительности выделения энергии. Инж. ж., 1965, т. 5, вып. 1.
3. *Калмыков А. А., Кондратьев В. Н., Немчинов И. В.* О разлете мгновенно нагретого вещества и об определении его уравнения состояния по величине давления и импульса. ПМТФ, 1966, № 5.
4. *Градштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., Физматгиз, 1962.

УДК 539.3.534.231.1

О ВЗАИМОДЕЙСТВИИ ВОЛН НАПРЯЖЕНИЙ С РАСТУЩЕЙ ТРЕЩИНОЙ

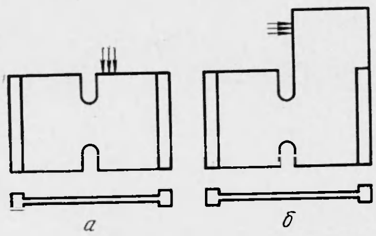
И. С. Гузь

(Харьков)

В работе экспериментально исследуется взаимодействие продольных и рэлеевских волн с растущей трещиной. Показано, что с помощью волн напряжений можно эффективно изменять направление движения растущей трещины и осуществлять ее торможение. Изменение траектории роста трещины обусловлено изменениями напряженного состояния в ее вершине. Угол отклонения трещины зависит от угла атаки волны и исходного напряженного состояния в вершине. Приводится выражение для определения угла отклонения трещины.

Задача о дифракции волны напряжений на прямолинейном разрезе, подобном трещине, решалась многими авторами. В [1,2] рассматривалось взаимодействие плоской упругой волны с разрезом, края которого свободны или закреплены. Другое решение этой задачи приведено в [3], где искомые смещения выражены через значения некоторой функции $F_1(\theta)$, которая легко табулируется.

Авторы [4] исследовали воздействие поперечной волны на стационарную трещину. Экспериментально дифракция рэлеевских волн на трещине изучалась в [5,6]. Показано, что продольные и поверхностные волны могут стимулировать развитие трещины, траектория их роста определяется напряженным состоянием, возникающим в окрестности вершины. Факт изменения траектории движения при воздействии упругих волн известен давно [7,8]. Это успешно применялось для определения скорости развития трещины, но собственно управление траекторией не рассматривалось, хотя в [8] приводится аналитическое выражение для определения угла отклонения при ударном сжатии и растяжении. Ниже будет показано, что приведенное выражение экспериментально не подтверждается.



Фиг. 1

Исходя из предположения, что доминирующим фактором, определяющим траекторию и скорость роста трещины, является напряженное состояние в ее вершине и что с помощью волн напряжений можно эффективно его изменять, были проведены исследования по определению возможности управления траекторией движения трещины с помощью волн напряжений. Использовался поляризационно-оптический метод в сочетании со скоростной киносъемкой.