

5. Greenberg W., van der Mee C. V. M., Protopopescu V. Boundary value problems in abstract kinetic theory.— Basel u. a.: Birkhauser Verl., 1987.
6. Кейз К., Цвайфель П. Линейная теория переноса.— М.: Мир, 1972.
7. Гахов Ф. Д. Краевые задачи.— М.: Наука, 1977.
8. Абрамов А. А., Коган М. Н. О режиме сверхзвуковой конденсации газа // ДАН СССР.— 1984.— Т. 278, № 6.
9. Cercignani C., Frezzotti A. Linearized analysis of a one-speed B. G. K. model in the case of strong condensation // Bulgarian Academy of Sciences theoretical and applied mechanics.— Sofia, 1988.— V. XIX, N 3.

г. Москва

Поступила 27/VI 1991 г.,
в окончательном варианте — 15/I 1992 г.

УДК 534.1./2.; 533.6.013.42

В. П. Реутов

О НЕУСТОЙЧИВОСТИ ИЗГИБНЫХ КОЛЕБАНИЙ ПЛАСТИН В ТУРБУЛЕНТНОМ ПОГРАНИЧНОМ СЛОЕ

В настоящее время имеется большое число работ, посвященных изучению флаттера пластин в сверхзвуковых потоках (см., например, [1—3]). Анализ неустойчивости упругих колебаний пластин в пограничном слое существенно дозвукового течения производился для возмущений в виде гармонических бегущих волн [4, 5]. Неустойчивость периодического прогиба бесконечной цепочки пластин в турбулентном пограничном слое несжимаемого течения рассматривалась в [6].

В данной работе изучается неустойчивость изгибных колебаний ограниченных тонких пластин (панелей), находящихся под турбулентным пограничным слоем на одном уровне с жесткой плоской поверхностью. Число Маха течения предполагается малым. Рассматриваются одномодовые колебания одной прямоугольной пластинки и пары смежных пластинок с шарнирно закрепленными краями.

Задача о неустойчивости изгибных колебаний пластин в пограничных слоях представляет интерес, в частности, в связи с проблемой подавления панельного флаттера. Возникновение неустойчивости — самопроизвольного нарастания изгибных колебаний за счет энергии потока — может приводить к установлению более интенсивных вибраций поверхности, чем это имеет место при пассивном ее возбуждении турбулентными пульсациями давления [2, 7, 8]. Изучение неустойчивости «в малом» позволяет перейти в дальнейшем к рассмотрению установившихся колебаний. Анализ взаимодействия смежных пластинок может служить основой для описания колебаний в длинных цепочках пластин, моделирующих большую панельную поверхность.

1. Отклик течения на гармонические одномодовые колебания прямоугольной пластинки. Рассмотрим колебания пластинки, находящейся на одном уровне с жесткой плоской поверхностью $y = 0$, обтекаемой со стороны полупространства $y > 0$ плоскопараллельным потоком жидкости с плотностью ρ . Плотность среды в области $y < 0$ предполагается пренебрежимо малой. Профиль скорости течения $\bar{u}(y)$ совпадает с профилем продольной скорости среднего течения в турбулентном пограничном слое и выходит на постоянный уровень $\bar{u} = u_\infty$ при $y > \delta$ (δ — толщина пограничного слоя). Размеры пластинки вдоль и поперек течения (по осям x и z) соответственно L_1 и L_2 . Предполагается, что изгиб пластинки поперек течения отсутствует и вытянутые вдоль течения края свободны.

Уравнения для отклонения поверхности пластины $y = w(x, t)$ можно записать в виде (см. [9], с. 94)

$$(1.1) \quad \gamma \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + D \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \left[N - \frac{6D}{L_1 h^2} \int_0^{L_1} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx \right] \times \\ \times \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2r \frac{\partial w}{\partial t} = - \frac{1}{L_2} \int_{-\frac{1}{2}L_2}^{\frac{1}{2}L_2} p dz,$$

где γ, h, D — поверхностная плотность массы, толщина и изгибная жесткость пластины; N — внешнее поджатие; $p(x, z, t)$ — возмущение давления на обтекаемой поверхности. Уравнения (1.1) дополним граничными условиями шарнирного закрепления на краях: $w = 0$ и $\partial^2 w / \partial x^2 = 0$ при $x = 0, L_1$.

Следуя [10, 11], представим решение краевой задачи для w в виде ряда Бубнова — Галеркина по системе функций $\sin(mk_0 x)$ ($m = 1, 2, \dots$, $k_0 = \pi/L_1$ — волновое число первой моды). При не слишком больших скоростях потока ограничимся учетом одной первой моды:

$$(1.2) \quad w = A(t) \sin(k_0 x) \quad (0 < x < L_1).$$

Подстановка (1.2) в (1.1) приводит к уравнению возбуждения для этой моды:

$$(1.3) \quad \gamma \frac{d^2 A}{dt^2} + 2r \frac{dA}{dt} + (Dk_0^4 - Nk_0^2) A + \frac{3D}{h^2} k_0^4 A^3 = F(t),$$

$$F = - \frac{2}{L_1 L_2} \int_0^{L_1} \int_{-\frac{1}{2}L_2}^{\frac{1}{2}L_2} p \sin(k_0 x) dx dz.$$

Отбрасывая в (1.3) при малых колебаниях слагаемое $\sim A^3$ и полагая $(A, p, F) = (A_\omega, p_\omega, F_\omega) \exp(-i\omega t)$, получим из (1.3) уравнение

$$(1.4) \quad (-\gamma\omega^2 - 2ir\omega + Dk_0^4 - Nk_0^2) A_\omega = F_\omega.$$

Для вычисления F_ω перейдем к пространственно-временному спектру давления:

$$(1.5) \quad \widehat{p}(\omega, k_x, k_z) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} p_\omega(x, z) \exp(-ik_x x - ik_z z) dx dz.$$

Для линейной среды \widehat{p} можно представить как

$$(1.6) \quad \widehat{p}(\omega, k_x, k_z) = Y(\omega, k_x, k_z) \widehat{w}(\omega, k_x, k_z),$$

где \widehat{w} — частотно-волновой спектр смещения поверхности, определенный аналогично (1.5); Y — комплексная упругость течения.

Будем искать Y в приближении несжимаемой среды. Для двумерных прогибов поверхности ($k_z = 0$) эта величина найдена в [6]. В случае трехмерных прогибов для однородного течения ($\delta = 0$) можно получить явное выражение для $Y = Y_0$:

$$(1.7) \quad Y_0(\omega, k_x, k_z) = -\rho \frac{(\omega - k_x u_\infty)^2}{(k_x^2 + k_z^2)^{1/2}}.$$

При $k_x \rightarrow 0$ упругость однородного течения по отношению к двумерным прогибам имеет асимптотику $Y_0(\omega, k_x, 0) \rightarrow -\rho \omega^2 / |k_x|$. При этом отклик F представляется (после обращения преобразования Фурье (1.5)) в виде интеграла по k_x с неинтегрируемой особенностью $\sim -\omega^2 / |k_x|$, которая

дает бесконечную присоединенную массу в расчете на единицу площади поверхности пластинки. Можно показать, что такая расходимость присоединенной массы возникает для любой монополярной формы двумерного прогиба

$\left(\int_0^{L_1} w(x, t) dx \neq 0 \right)$. Таким образом, возбуждение одной первой моды (1.2) возможно только при конечном L_2 .

В случае пограничного слоя конечной толщины Y должно переходить в Y_0 при $k_x, k_z \rightarrow 0$. Это видно, в частности, из приведенного в [6] выражения для $Y(\omega, k_x, 0)$ при $k_x \delta \ll 1$. Выделяя особенность из Y и заменяя остающуюся гладкую функцию для вытянутой поперек потока пластинки ($\lambda = L_2/L_1 \gg 1$) ее значением в точке $k_z = 0$, получим

$$(1.8) \quad Y(\omega, k_x, k_z) \simeq \frac{|k_x|}{(k_x^2 + k_z^2)^{1/2}} Y(\omega, k_x, 0).$$

Формула (1.8) выражает упругость Y для трехмерных прогибов поверхности через найденную в [6] упругость по отношению к двумерным прогибам.

Подстановка (1.6), (1.8) в (1.5) приводит к задаче вычисления интеграла вида

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 \kappa}{\kappa^2} (k_x^2 L_2^2 + 4\kappa^2)^{-1/2} d\kappa \left(\kappa = \frac{1}{2} k_z L_2 \right),$$

который можно найти приближенно с помощью аппроксимации спектрального окна $f = \sin^2 \kappa/\kappa^2$ функцией $f = 1/\sqrt{2}$ при $|\kappa| < \pi/\sqrt{2}$ и $f = 0$ при $|\kappa| > \pi/\sqrt{2}$. В результате получим выражение для отклика течения на гармонические колебания пластинки:

$$(1.9) \quad F_{\omega}^{(v)} = -A_{\omega} \frac{4}{\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{k_0^2}{(k^2 - k_0^2)^2} \cos^2 \left(\frac{\pi k}{2k_0} \right) \sigma \left(\frac{\lambda k}{\sqrt{2} k_0} \right) Y(\omega, k, 0) dk.$$

Здесь верхний индекс нуль означает приближение несжимаемой жидкости; $\sigma(\xi) = \frac{1}{2} \xi \ln |(1 + \sqrt{\xi^2 + 1})/(1 - \sqrt{\xi^2 + 1})|$. Поскольку $\sigma \sim \xi \ln \xi$ при $\xi \rightarrow 0$, интеграл в (1.9) сходится. Можно показать, что $F_{\omega} \sim A_{\omega} \omega^2 \ln \lambda$ при $\lambda \rightarrow \infty$. Как видно из (1.4), это соответствует слабой расходимости удельной присоединенной массы для колебаний на первой моде.

Для того чтобы воспользоваться построенным в [6] алгоритмом вычисления двумерной комплексной упругости, перейдем в (1.9) к «внешним» безразмерным переменным теории устойчивости сдвиговых течений: $k_e = k\delta$, $\bar{k}_0 = k_0\delta$, $\omega_e = \omega\delta/u_{\infty}$, $Y_e = Y\delta/\rho u_{\infty}^2$, а также введем число Рейнольдса $R = u_{\infty} \delta/\nu$ (ν — кинематическая вязкость). Тогда (1.9) запишем как

$$(1.10) \quad F_{\omega}^{(v)} = -\rho u_{\infty}^2 k_0 G(\omega_e);$$

$$(1.11) \quad G = \frac{4}{\pi^2} \int_0^{\infty} \frac{\bar{k}_0^2}{(k_e^2 - \bar{k}_0^2)^2} \cos^2 \left(\frac{\pi k_e}{2\bar{k}_0} \right) \sigma \left(\frac{\lambda k_e}{\sqrt{2} \bar{k}_0} \right) \bar{Y}(\omega_e, k_e) dk_e,$$

где $\bar{Y} = Y_e(\omega_e, k_e) + Y_e^*(-\omega_e, k_e)$; G , по существу, является безразмерной присоединенной упругостью для гармонических колебаний пластинки на первой моде прогиба. Использование связи (1.10) для решения задачи о неустойчивости изгибных колебаний возможно в том случае, когда построенная при действительных ω_e функция G есть аналитическое продолжение функции $G(\omega_e)$, вычисленной по формуле (1.11) на контуре

$\text{Im } \omega_e = \text{const} \rightarrow +\infty$ в комплексной плоскости ω_e^* . Можно показать, что для этого функция \bar{Y} не должна иметь особенностей в полуплоскости $\text{Im } \omega_e \geq 0$ при действительных k_e (существуют только затухающие собственные волны течения). Такому требованию удовлетворяет функция $\bar{Y}(\omega_e, k_e)$ для турбулентного пограничного слоя в рассматриваемой области небольших значений k_e [6].

2. Взаимная присоединенная упругость. Матрица присоединенных упругостей для однородного потока. Рассмотрим одномодовые колебания пары одинаковых пластинок, расположенных последовательно вниз по потоку: $w = A_1 \sin(k_0 x)$ при $0 < x < L_1$, $w = A_2 \sin[k_0(x - L_1)]$ при $L_1 < x < 2L_1$ и $w = 0$ при $x < 0$, $x > 2L_1$. Процедура вычисления отклика $F_{\omega}^{(n)}$ в данном случае полностью аналогична построенной в п. 1. Поэтому приведем без вывода обобщение формулы (1.10) для двух пластинок:

$$(2.1) \quad F_{1,2}^{(0)} = -\rho u_{\infty}^2 k_0 (G A_{1,2\omega} + G_{1,2} A_{2,1\omega}).$$

Здесь $F_j^{(0)}$ — правая часть уравнения (1.3), в котором сделана замена $A \rightarrow A_j$ ($j = 1, 2$); $G_{1,2}$ вычисляются по формуле (1.11), но с другим определением Y :

$$(2.2) \quad \bar{Y} \rightarrow \bar{Y}_{1,2} = Y_e(\omega_e, k_e) e^{\mp i\pi(k_e/\bar{h}_0)} + Y_e^*(-\omega_e, k_e) e^{\pm i\pi(k_e/\bar{h}_0)}.$$

В соответствии с (2.1) величины G , $G_{1,2}$ — элементы безразмерной матрицы присоединенных упругостей для пары пластинок G_{ij} , причем $G_{11} = G_{22} = G$, $G_{12} = G_1$, $G_{21} = G_2$.

Матрицу присоединенных упругостей нетрудно найти в явном виде при потенциальном обтекании пластинок однородным потоком. Используя (1.7), (1.9), получим

$$(2.3) \quad G^{(p)} = -(a_1 \bar{c}^2 + d_0),$$

где $\bar{c} = \omega_e/\bar{k}_0$; коэффициенты a_0 и d_0 , определяющие эффекты присоединенной массы и статической упругости, имеют вид

$$(2.4) \quad a_0 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{8}{\pi^2 \kappa (1 - \kappa^2)^2} \cos^2\left(\frac{\pi}{2} \kappa\right) \sigma\left(\frac{\kappa \lambda}{\sqrt{2}}\right) d\kappa,$$

$$d_0 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{8\kappa}{\pi^2 (1 - \kappa^2)^2} \cos^2\left(\frac{\pi}{2} \kappa\right) \sigma\left(\frac{\kappa \lambda}{\sqrt{2}}\right) d\kappa$$

и зависят только от λ . При $\lambda = 3$ расчеты дают значения $a_0 = 1,8$ и $d_0 = 0,71$. Аналогично находятся недиагональные элементы матрицы присоединенных упругостей:

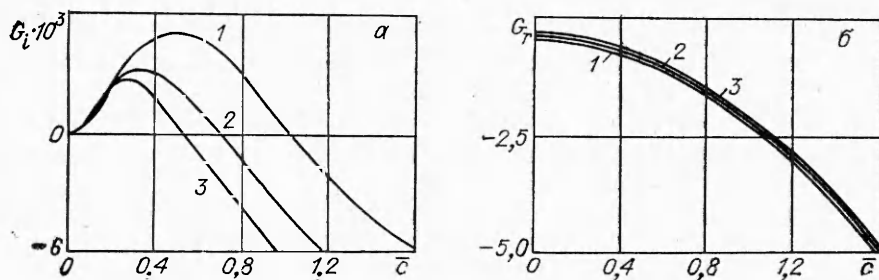
$$(2.5) \quad G_{1,2}^{(p)} = -(a_1 \bar{c}^2 - i b_1 \bar{c} + d_1).$$

Выражения для a_1 , b_1 , d_1 по структуре подобны (2.4). При $\lambda = 3$ найдены значения $a_1 = 0,54$, $b_1 = -0,45$, $d_1 = -0,14$. Все численные расчеты в дальнейшем производятся также при $\lambda = 3$.

3. Вычисление матрицы присоединенных упругостей для среднего течения в турбулентном пограничном слое. Расчеты проводились по формулам (1.10), (1.11), (2.2). Одномерная комплексная упругость находилась по методике [6]. Интеграл в (1.11) брался по 40 точкам с верхним пределом, равным $3\bar{k}_0$.

На рис. 1, а, б показана мнимая и действительная часть функции $G = G_r + iG_i$ при $R = 8 \cdot 10^4$ (кривые 1—3 отвечают $\bar{k}_0 = 1; 2; 3$). Можно показать, что поток энергии направлен к поверхности при $G_i > 0$ (аналогично см. [6]). Из расчетов следует, что для G с хорошей точ-

* Это следует из процедуры решения задачи об отклике течения методом преобразования Лапласа.



Р и с. 1

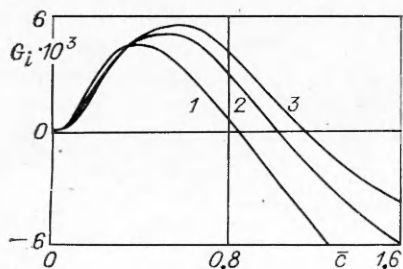
ностью применимо квазипотенциальное приближение: $G = G^{(p)} +$ малая комплексная добавка, причем в выражении (2.3) для $G^{(p)}$ коэффициент d_0 зависит от k_0 и R (для однородного потока $k_0 \rightarrow 0$). В частности, при $R = 8 \cdot 10^4$ получены значения $d_0 = 0,46; 0,38; 0,34$ для $k_0 = 1; 2; 3$ соответственно.

Степень зависимости G_i от R при $k_0 = 1$ иллюстрируется данными на рис. 2 (кривые 1—3 отвечают $R = 4 \cdot 10^4; 8 \cdot 10^4; 1,5 \cdot 10^5$). В этом диапазоне значений R коэффициент d_0 изменяется незначительно.

Результаты вычисления $G_{1,2r}$ и $G_{1,2i}$ при $k_0 = 1, R = 8 \cdot 10^4$ приведены на рис. 3, а. Для $G_{1,2}$ также применимо квазипотенциальное приближение: $G_{1,2} = G_{1,2}^{(p)} +$ малые комплексные добавки, где в выражении (2.4) для $G_{1,2}^{(p)}$ коэффициенты b_1 и d_1 зависят от k_0 и R . В частности, при $k_0 = 1, R = 8 \cdot 10^4$ $b_1 = -0,43, d_1 = -0,10$, причем b_1 и d_1 изменяются незначительно в указанном диапазоне значений R . Поток энергии к поверхности, обусловленный взаимодействием пластинок, определяется отличными от нуля недиагональными элементами антиэрмитовой части матрицы G_{ij} , т. е. разностью $\Delta G = G_1^* - G_2$. Зависимость действительной и мнимой части ΔG от c при $k_0 = 1, R = 8 \cdot 10^4$ показана на рис. 3, б ($\Delta G_r, \Delta G_i$ — линии 1, 2).

Подчеркнем, что физически наглядная квазипотенциальная модель для G_{ij} основывается на результатах численных расчетов и может рассматриваться только как аппроксимация G_{ij} в конечной полосе частот.

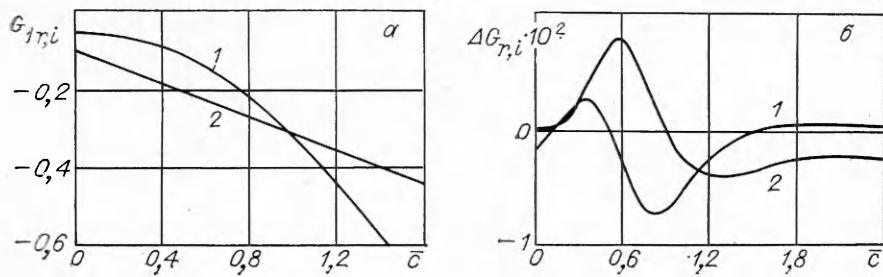
4. Учет потерь на излучение звука. В среде с конечной сжимаемостью возникают потери энергии, связанные с излучением звука. Ограничимся рассмотрением акустически компактных пластинок ($\omega L_{1,2}/c_a \ll 1, c_a$ — скорость звука), когда при $L_2 \gg L_1$ квазидвумерными являются гидродинамические возмущения в пограничном слое (для толщины которого выполняется условие $\omega \delta/c_a \ll 1$), но не акустическое поле. Считая среду неподвижной и используя известное из теории излучения выражение для поля давления от излучателя «в экране» [12], можно вычислить первую поправку в разложении давления по времени задержки звука в пределах пластинки. Эта компонента давления определяет акустическую составляющую отклика среды $F_{1,2}^{(a)}$ (см. (1.4)). Для поверхности из двух пластинок получим выражение



Р и с. 2

$$(4.1) \quad F_{1,2}^{(a)} = \frac{4\rho L_1 L_2}{\pi^3 c_a} \left(\frac{d^3 A_1}{dt^3} + \frac{d^3 A_2}{dt^3} \right).$$

Формулу (4.1) можно использовать также при наличии в области $y > 0$ течения с малым числом Маха ($M = u_\infty/c_a \ll 1$). Поскольку псевдозвуковая компонента давления тоже мало меняется при $M \ll 1$, полный отклик представим



Р и с. 3

в виде $F_{1,2} = F_{1,2}^{(0)} + F_{1,2}^{(\omega)}$ ($F_{1,2}^{(0)}$ — найденный в пп. 1, 2 отклик для несжимаемой среды).

Отметим, что при строго противофазном движении пластин ($A_2 = -A_1$) монополярная компонента радиационных потерь (4.1) исчезает. Можно показать, что выражение (4.1) корректно при достаточно большом различии амплитуд колебаний пластинок: $|(A_{2\omega} - A_{1\omega})/A_{1,2\omega}| \gg L_2 \omega / c_a$.

5. Инкремент неустойчивости изгибных колебаний. Для рассмотрения собственных колебаний введем, следуя [6], новые безразмерные переменные $\bar{\omega} = \omega / \omega_0$, $V = u_{\infty} k_0 / \omega$ ($\omega_0 = [(Dk_0^4 - Nk_0^2) / \gamma_0]^{1/2}$, $\gamma_0 = \gamma + \rho / k_0$ (при этом $\bar{c} = \bar{\omega} / V$)), а также коэффициенты $\alpha = \gamma / \gamma_0$, $\alpha_1 = 1 - \alpha$ и число Рейнольдса по фазовой скорости изгибных волн $R_0 = \omega_0 \delta / k_0 V$ (соответственно $R = R_0 V$).

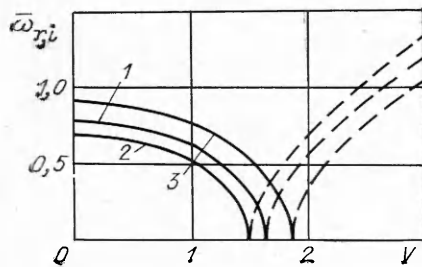
Рассмотрим сначала колебания одной пластинки. Используя квазипотенциальное приближение (см. п. 3), перепишем уравнение (1.4) в виде

$$(5.1) \quad m_0 \bar{\omega}^2 + \alpha_1 V^2 d_0 - 1 = \alpha_1 V^2 (G - G^{(p)}) - i \bar{\xi} \bar{\omega}^3 - 2i \bar{r} \bar{\omega},$$

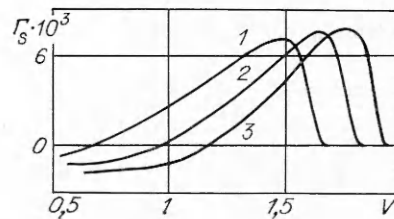
где $m_0 = \alpha + \alpha_1 a_0$; $\bar{\xi} = (4/\pi^2) \alpha_1 \omega L_2 / c_a \ll 1$; $\bar{r} = r / \gamma_0 \omega_0$. Коэффициент \bar{r} выразим через добротность Q_f свободной (помещенной в вакуум) пластинки: $\bar{r} = (1/2Q_f) \sqrt{\alpha_1 / (1 + \alpha_1)}$.

В отсутствие диссипативных процессов (правая часть в уравнении (5.1) равна нулю) получим частоту $\bar{\omega}^{(0)} = [(1 - \alpha_1 V^2 d_0) / m_0]^{1/2}$, которая становится мнимой при $V > V_c = 1 / \sqrt{\alpha_1 d_0}$ (V_c — критическая скорость дивергенции пластинки при квазипотенциальном обтекании). Зависимость действительной и мнимой части частоты $\bar{\omega}^{(0)} = \bar{\omega}_r + i \bar{\omega}_i$ от V при $\alpha = 0,2$ ($\alpha_1 = 0,8$), $\bar{k}_0 = 1$, $R_0 = 8 \cdot 10^4$ представлена кривой 1 на рис. 4 (сплошные линии — $\bar{\omega}_r$, штриховые — $\bar{\omega}_i$). Заметим, что результаты расчетов при $\alpha \ll 1$ (в условиях преобладания присоединенной массы над собственной) слабо зависят от α . В дальнейшем все расчеты производятся с $\alpha = 0,2$. Кривые 2 и 3 показывают поведение собственных частот в аналогичной задаче для пары пластинок. Величина сдвига между ними говорит о слабой связи между пластинками.

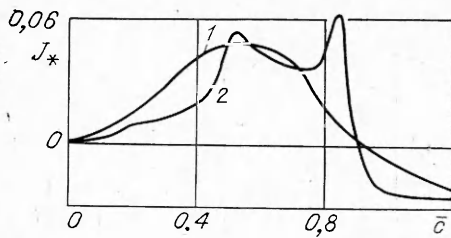
В докритической области ($V < V_c$) уравнение (5.1) можно решить методом возмущений по малым $|(G - G^{(p)})|$, $\bar{\xi}$, \bar{r} (аналогично см. [1]).



Р и с. 4



Р и с. 5



Р и с. 6

Вычисления приводят к выражению для инкремента:

$$(5.2) \quad \bar{\omega}_i \approx \frac{1}{m_0} \left[\frac{\alpha_1 V^2}{2\bar{\omega}^{(0)}} (G_i)_* - \frac{1}{2} \xi \bar{\omega}^{(0)2} - \bar{r} \right]$$

(индекс * означает, что величина берется при $\bar{c} = \bar{\omega}^{(0)}/V$). Поскольку $\bar{\omega}^{(0)} \rightarrow 0$ при $V \rightarrow V_c$, то G_i становится положительным в докритической

области. Возникающая в этом случае неустойчивость ($\bar{\omega}_i > 0$) обусловлена необратимым отбором энергии у среднего течения в пограничном слое. Результаты вычисления аэродинамической части инкремента Γ_s (первое слагаемое в (5.2)) при $V < V_c$, $R_0 = 8 \cdot 10^4$ представлены на рис. 5 (кривые 1—3 соответствуют $\bar{k}_0 = 1; 2; 3$). В этом расчете не учитывалась зависимость G_i от R (полагалось $R = R_0$). С помощью графиков рис. 5 можно построить границу области подавления докритической неустойчивости на плоскости \bar{r} , ξ или написать условие ее стабилизации при заданном значении V . Например, при $\bar{k}_0 = 1$, $V = 1,12$ (в максимуме $G_i(\bar{c})$ — рис. 1, а) стабилизация наступает при $\bar{r} + 0,16\xi > 0,0045$, а при $\bar{k}_0 = 1$, $V = 1,5$ (в максимуме $\Gamma_s(V)$) получим $\bar{r} + 0,052\xi > 0,0082$.

Аналогичным образом рассчитывается докритическая неустойчивость пары пластинок. Результаты вычисления матрицы присоединенных упругостей позволяют также рассмотреть вопрос о влиянии связей между пластинками на неустойчивость в длинной цепочке пластин, вытянутой вдоль течения. Пренебрегая радиационными потерями в этом случае, получим уравнение для амплитуды \bar{A}_n прогиба пластинки с номером n в виде

$$(5.3) \quad (\alpha \bar{\omega}^2 + 2i\bar{r}\bar{\omega} - 1)\bar{A}_n = \alpha_1 V^2 (G\bar{A}_n + G_1\bar{A}_{n+1} + G_2\bar{A}_{n-1}).$$

Наиболее простым для анализа и в то же время весьма характерным (см. [6]) является случай периодического знакопеременного прогиба в бесконечной цепочке пластин, когда $\bar{A}_n = (-1)^n \bar{A}_0$. Выражение для инкремента докритической неустойчивости такого прогиба представим как

$$(5.4) \quad \bar{\omega}_i \simeq -\frac{\bar{r}}{m_{01}} + \frac{\alpha_1 V^2}{4\bar{\omega}^{(0)}} J_* \left[J_* = \frac{2}{m_{01}} (G_i + \Delta G_i)_* \right],$$

где $m_{01} = \alpha + \alpha_1(a_0 - 2a_1)$; $\bar{\omega}^{(0)} = [(1 - \alpha_1 d_0 V^2)/m_{01}]^{1/2}$. В [6] получено аналогичное выражение для инкремента в бесконечной цепочке, которое фактически учитывает всю совокупность связей между пластинками. Оно отличается от (5.4) определением J_* и $\bar{\omega}^{(0)}$, а также тем, что не содержит коэффициента $1/m_{01}$ перед \bar{r} . Последнее, очевидно, вызвано неполным суммированием коэффициентов связи между пластинками через присоединенную массу (a_0 , a_1 и т. п.). Различие $\bar{\omega}^{(0)}$ и критических скоростей дивергенции в этих двух случаях невелико ($\sim 5\%$). На рис. 6 показаны результаты вычисления J_* при $\bar{k}_0 = 1$, $R = 8 \cdot 10^4$ (кривая 1) и аналога этой величины из [6] (кривая 2). Их сопоставление говорит об удовлетворительном совпадении инкрементов при полном и частичном учете связей.

ЛИТЕРАТУРА

1. Новичков Ю. Н. Флаттер пластин и оболочек // Итоги науки и техники. Сер. Механика деформируемого твердого тела.— М.: ВИНТИ, 1978.— Вып. 11.
2. Вольмир А. С. Оболочки в потоке жидкости и газа: задачи аэроупругости.— М.: Наука, 1976.
3. Вольмир А. С. Оболочки в потоке жидкости и газа: задачи гидроупругости.— М.: Наука, 1979.

4. Бетцов Р., Криминалле В. Вопросы гидродинамической устойчивости.— М.: Мир, 1971.
5. Басин А. М., Коротин А. И., Козлов Л. Ф. Управление пограничным слоем судна.— Л.: Судостроение, 1968.
6. Реутов В. П. О неустойчивости периодического прогиба панельной поверхности в турбулентном пограничном слое.— Нижний Новгород, 1990.— (Препр./ИПФ АН СССР, № 276); ПМТФ.— 1992.— № 4.
7. Vaicaitis R., Jan C. M., Shinozuka M. Nonlinear panel response from a turbulent boundary layer // AIAA J.— 1972.— V. 10, N 7.
8. Мхитаров Р. А. Излучение звука прямоугольной пластиной, колеблющейся под действием пульсаций давления в турбулентном пограничном слое // Акуст. журн.— 1973.— Т. 19, № 4.
9. Вольмир А. С. Нелинейная динамика пластин и оболочек.— М.: Наука, 1972.
10. Болотин В. В., Новичков Ю. Н., Швейко Ю. Ю. Теория аэроупругости // Прочность. Устойчивость. Колебания.— М.: Машиностроение, 1968.— Т. 3.
11. Пановко Я. Г., Губанова И. И. Устойчивость и колебания упругих систем.— М.: Наука, 1979.
12. Лепендин Л. Ф. Акустика.— М.: Высш. шк., 1978.

г. Нижний Новгород

Поступила 5/VIII 1991 г.,
в окончательном варианте — 24/I 1992 г.

УДК 539.374

Р. А. Каюмов

ОБ ОЦЕНКЕ НЕСУЩЕЙ СПОСОБНОСТИ КОНСТРУКЦИЙ ПРИ ПРОИЗВОЛЬНЫХ УСЛОВИЯХ ТЕКУЧЕСТИ

Работа является развитием [1]. В рамках модели жесткопластического тела показано, что нижнюю границу предельной нагрузки можно найти из некоторой задачи управления, сводимой к вариационной. Предлагается методика, позволяющая получать одновременно нижнюю и верхнюю оценку. Найдено условие, при котором этот подход даст совпадающие границы. Методика иллюстрируется примерами расчета композитных оболочек.

Постановка задачи. Рассматривается конструкция, изготовленная из материала, поведение которого можно описать моделью идеально пластического тела. Пусть условие текучести имеет вид

$$(1) \quad f_1(\sigma) \cup f_2(\sigma) \cup \dots \cup f_m(\sigma) = 1$$

(σ — вектор, составленный из компонент тензора напряжений).

Нагружение считается однопараметрическим, т. е. объемные силы Q и поверхностные q изменяются пропорционально одному параметру t :

$$Q = Q_0 t, \quad q = q_0 t \quad (t > 0).$$

Уравнения равновесия записываются в символическом виде

$$(2) \quad L\sigma = -Q_0 t \quad (x \in \omega), \quad l\sigma = q_0 t \quad (x \in \Gamma),$$

где L, l — линейные операторы; ω — область, занимаемая телом; Γ — поверхность тела, на которой заданы нагрузки; x — радиус-вектор точки.

Кинематические граничные условия считаются однородными и имеют вид

$$(3) \quad Ku = 0 \quad (x \in \gamma).$$

Здесь K — линейный оператор; u — вектор перемещений; γ — поверхность тела, на которой заданы ограничения на перемещения. В дальнейшем поля перемещений считаются кинематически возможными, т. е. рассматриваются в пространствах, удовлетворяющих условию (3).

В рамках модели жесткопластического тела ставится задача об отыскании t_- и t_+ -нижней и верхней границы коэффициента предельной на-