

УСТОЙЧИВОСТЬ ШАРОВОЙ ЗВЕЗДНОЙ СИСТЕМЫ

М. Я. Пальчик, А. З. Паташинский, В. К. Пинус

(Новосибирск)

Исследуется устойчивость сферически-симметричного скопления точечных гравитирующих частиц относительно малых произвольных возмущений. Считается, что в отсутствие возмущения частицы движутся по круговым траекториям, хаотически ориентированным в пространстве так, что полный момент скопления равен нулю. Размер скопления велик по сравнению с гравитационным радиусом, скорости частиц нерелятивистские.

Показано, что существуют начальные распределения массовой плотности скопления, неустойчивые относительно любых возмущений, за исключением радиальных и дипольных возмущений. Сформулирован общий критерий неустойчивости, который

имеет вид $d\Omega^2 / dr > 0$, где $\Omega^2 = (4\pi G / r^3) \int_0^r \rho_0 r^2 dr$, $\rho_0(r)$ — массовая плотность скопления,

G — гравитационная постоянная. Исследована зависимость инкремента от l — номера гармоники возмущения. В случае слабой неоднородности $r(d\Omega^2 / dr) / \Omega^2 \ll 1$ инкремент максимален для квадрупольного возмущения ($l = 2$) и монотонно убывает с ростом l . В обратном случае сильной неоднородности $r(d\Omega^2 / dr) / \Omega^2 \gg l^2$ инкремент растет с ростом l .

В случае слабой неоднородности инкремент может быть сколь угодно мал. При сильной неоднородности неустойчивость развивается за время, меньшее периода оборота отдельной частицы. При $d\Omega^2 / dr < 0$ система устойчива. Учет микроструктуры системы в этом случае приводит к затуханию макроколебаний («нагрев» системы).

1. Траектория каждой частицы характеризуется вектором угловой скорости Ω

$$(1.1) \quad \Omega^2(r) = \frac{1}{r} \frac{d\Phi_0}{dr} = 4\pi G r^{-3} \int_0^r \rho_0(r) r^2 dr$$

Здесь Φ_0 — самосогласованный гравитационный потенциал, удовлетворяющий уравнению

$$(1.2) \quad \Delta\Phi_0(r) = 4\pi G \rho_0(r)$$

Размер скопления R считается много большим его гравитационного радиуса $r_g = 2MG / c^2$, где M — масса скопления, c — скорость света ($R \gg 10r_g$), т. е. система подчиняется законам классической механики. Относительно вида плотности $\rho_0(r)$ не делается никаких предположений.

Пусть система испытывает малое произвольное возмущение. В [1] в приближении самосогласованного поля получено уравнение, описывающее возникающие при этом собственные колебания системы. Возмущенный самосогласованный потенциал был представлен в виде суперпозиции сферических гармоник. В силу линейности уравнений задача решалась для отдельной гармоники возмущенного потенциала $\Phi_1(r, \theta, \varphi, t) = \chi_l(r, \omega) Y_{lm}(\theta, \varphi) e^{-i\omega t}$. Для радиальной части каждой гармоники

$\chi_l(r, \omega)$ было получено уравнение

$$(1.3) \quad A_l(r, \omega) \frac{\partial^2 \chi_l(r, \omega)}{\partial r^2} + \left(\frac{\partial A_l(r, \omega)}{\partial r} + \frac{2A_l(r, \omega)}{r} \right) \frac{\partial \chi_l(r, \omega)}{\partial r} - \frac{B_l(r, \omega)}{r} \chi_l(r, \omega) = 0$$

Здесь $\chi_l(r, \omega)$ — радиальная часть l -й гармоники возмущенного самосогласованного потенциала в фурье-представлении

$$(1.4) \quad A_l(r, \omega) = 1 + \Omega_g^2 \sum_{s=-l}^l |P_{s0}(\pi/2)|^2 / (\omega_s^2 - \Omega^2 - \Omega_g^2)$$

$$(1.5) \quad B_l(r, \omega) = r^2 \frac{d}{dr} \left\{ \frac{\alpha_s^2}{r} \sum_{s=-l}^l |P_{s0}(\pi/2)|^2 \frac{2s\Omega}{\omega_s(\omega_s^2 - \Omega^2 - \Omega_g^2)} \right\} + \Omega_g^2 \sum_{s=-l}^l |P_{s0}'(\pi/2)|^2 \times \\ \times \left\{ \frac{4s\Omega\omega_s + s^2(\omega_s^2 - \Omega_g^2 + 3\Omega^2)}{\omega_s^2(\omega_s^2 - \Omega^2 - \Omega_g^2)} + \frac{\alpha_{s+1}'^2}{\omega_s(\omega_s - 2\Omega)} \right\} + l(l+1)$$

где $P_{mn}^l(\theta)$ — обобщенные полиномы Лежандра [2], в частности

$$(1.6) \quad P_{s0}^l(\pi/2) = \begin{cases} \frac{(l+s)!(l-s)!}{\left[2^l \left(\frac{l+s}{2}\right)! \left(\frac{l-s}{2}\right)!\right]^2}, & \text{если } (l+s) \text{ четное} \\ 0, & \text{если } (l+s) \text{ нечетное} \end{cases}$$

$$(1.7) \quad \sum_{s=-l}^l |P_{s0}^l(\pi/2)|^2 = 1$$

$$(1.8) \quad \omega_s = \omega - s\Omega, \quad \alpha_s' = \sqrt{(l+s)(l-s+1)} \\ \Omega_g^2(r) = 3\Omega^2(r) + r \frac{d\Omega^2}{dr} = 4\pi G\rho_0$$

$\rho_0 = \rho_0(r)$ — невозмущенная массовая плотность системы.

В данной статье исследуется спектр частот собственных колебаний, получаемых из (1.3). Покажем, что среди собственных частот системы могут быть мнимые, если выполнено условие $d\Omega^2/dr > 0$. Этот критерий означает, что в случае монотонного возрастания начальной плотности масс к краю скопления система заведомо неустойчива. Исследована зависимость инкремента неустойчивости от l — номера гармоники возмущения. В случае слабой неоднородности $r(d\Omega^2/dr) \ll \Omega^2$ инкремент максимален для $l=2$ и монотонно убывает с ростом l .

Критерий устойчивости (п. 5) имеет вид $d\Omega^2/dr < 0$. Отсюда следует, что если плотность монотонно убывает к краю скопления, то система заведомо устойчива. Покажем также при $d\Omega^2/dr < 0$, что собственные колебания системы затухают со временем. Эти результаты справедливы лишь для таких возмущений, под действием которых отдельные частицы за время оборота вокруг центра скопления не успевают сместиться на расстояние порядка среднего расстояния между частицами. В противном случае имеет место линейная неустойчивость (амплитуда плотности линейно растет со временем).

2. Рассмотрим решения уравнения колебаний системы. В [1] было получено выражение для фурье-гармоник макроскопической скорости вещества возмущенной системы, определяемой, как $W(r) = j(r)/\rho(r)$,

где \mathbf{j} — плотность потока вещества. Выражение для сферической компоненты $W_r(r)$ скорости $W(r)$ имеет вид

$$(2.1) \quad W_r(r, \theta, \varphi, t) = V_0(r, \omega) T_{m,0}^l(\pi/2 - \theta, 0)$$

Коэффициент $V_0(r, \omega)$ определяется через радиальную часть возмущенного самосогласованного потенциала $\chi_l(r, \omega)$ по формуле

$$(2.2) \quad V_0(r, \omega) = -i \sum_{s=-l}^l \frac{\omega}{\omega_s^2 - \Omega^2 - \Omega_g^2} \mathcal{P}_{l,s}(\pi/2) \times \\ \times T_{0s}^l(0, -\pi/2, -\pi/2) \left\{ \frac{\partial \chi_l(r, \omega)}{\partial r} - \frac{2s\Omega(r)}{\omega_s} \frac{\chi_l(r, \omega)}{r} \right\}$$

где $\mathcal{P}_{ls}(\pi/2)$ — присоединенный полином Лежандра; ω_s и Ω_g^2 определены (1.8). Из определения $\mathcal{P}_{ls}(\theta)$ имеем $\mathcal{P}_{ls}(\pi/2) = 0$, если $l+s$ нечетное, поэтому индекс s в сумме (2.2) принимает значения $s = -l, -l+2, \dots, l-2, l$.

Полная макроскопическая скорость, соответствующая произвольным начальным условиям, записывается в виде интеграла Фурье от (2.1)

$$(2.3) \quad W(r, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W(r, \omega) e^{-i\omega t} d\omega$$

Будем считать, что возмущение системы возникает в момент времени $t_0 = 0$, так что

$$(2.4) \quad W(r, t) = 0 \quad \text{при } t < 0$$

Рассмотрим уравнение (1.3) для функции $\chi_l(r, \omega)$. Это уравнение решается [3]. Достаточно знать поведение его решения вблизи особых точек, что позволит вычислить интеграл (2.3). Особыми точками в данном случае являются полюсы коэффициентов $B_l(r, \omega)$ и $A_l(r, \omega)$ и нули $A_l(r, \omega)$. Функция $B_l(r, \omega)$ имеет относительно r полюсы соответственно первого и второго порядков в точках, определяемых из уравнений

$$(2.5) \quad \omega_s(r) = 0$$

$$(2.6) \quad \omega_s^2 - \Omega^2 - \Omega_g^2 = 0$$

Остальные полюсы $B_l(r, \omega)$ в записи (1.5) исчезают после приведения подобных членов и использования соотношения

$$\sum_{s=-l}^l |P_{s0}^l(\pi/2)|^2 \frac{\alpha_{s+1}'^2}{\omega_s (\omega_s - 2\Omega)} = \sum_{s=-l}^l |P_{s0}^l(\pi/2)|^2 \frac{s}{\Omega \omega_s}$$

Вблизи полюсов первого порядка (2.5) решения уравнения (1.3) имеют вид

$$(2.7) \quad \chi_1 = (r - r_{B'}) \sum_{k=0}^{\infty} c_k' (r - r_{B'})^k \\ \chi_2 = C \chi_1 \ln(r - r_{B'}) - 1 + \sum_{k=1}^{\infty} d_k' (r - r_{B'})^k$$

где $r_{B'}$ — корни уравнения (2.5), числа c_k' и d_k' определяются из уравнения (1.3) $C = b_{-1}' / r_{B'}^2 a_0'$, b_{-1}' и a_0' — коэффициенты лорановского разложения функций $B_l(r, \omega)$ и $A_l(r, \omega)$ вблизи точки $r_{B'}$. Вблизи полюсов второго порядка (2.6), совпадающих с полюсами $A_l(r, \omega)$ первого

порядка, имеем

$$(2.8) \quad \chi_1 = (r - r_B)^2 \sum_{k=0}^{\infty} c_k (r - r_B)^k$$

$$\chi_2 = f \chi_1 \ln(r - r_B) - \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} d_k (r - r_B)^k$$

$$f = \frac{1}{2r_B^{2a-1}} \left[\frac{(b_{-2})^2}{2r_B^{a-1}} - \frac{b_{-2}}{r_B} - \frac{b_{-1}}{2} \right]$$

где r_B — корни уравнения (2.7), числа d_k и c_k определяются из уравнения (1.3), коэффициенты b_{-2} , b_{-1} и a_{-1} находятся из разложения функций $B_l(r, \omega)$ и $A_l(r, \omega)$ в ряд Лорана вблизи точки r_B . Вблизи нулей коэффициента $A_l(r, \omega)$ решение имеет вид

$$(2.9) \quad \chi_1 = \sum_{k=0}^{\infty} c_k'' (r - r_A)^k$$

$$\chi_2 = \chi_1 \ln(r - r_A) + \sum_{k=1}^{\infty} d_k'' (r - r_A)^k$$

где r_A — корни уравнения

$$(2.10) \quad A_l(r, \omega) = 1 + \Omega_g^2 \sum_{s=-l}^l \frac{|P_{s0}^l(\pi/2)|^2}{\omega_s^2 - \Omega^2 - \Omega_g^2} = 0$$

Это уравнение не содержит нечетных степеней ω , т. е. $r_A = r_A(\omega^2)$. При выводе (2.8) предполагалось, что функция $A_l(r, \omega)$ имеет относительно r только нули первого порядка. При некоторых значениях r возможно появление нулей второго порядка, что приведет к затуханию колебаний плотности в этих точках. Решения (2.7) — (2.9) определены с точностью до умножения на произвольную функцию ω .

Вычислим вклад функций (2.7) — (2.9) в интеграл (2.3). Рассмотрим для этого коэффициент $V_0(r, \omega)$, входящий в (2.4). Подставляя (2.7) в (2.2), находим, что $V_0(r, \omega)$ содержит член вида $\ln(r - r_B'(\omega))$. Таким образом, функция $V_0(r, \omega)$ имеет относительно ω логарифмические особенности в точках $\omega = \omega_B' \equiv s\Omega$ (индекс s , принимает ввиду (1.6) значения $s = -l, -l + 2, \dots, l - 2, l$). Подставляя (2.8) в (2.2), находим, что $V_0(r, \omega)$ имеет также особенности вида $(\omega - \omega_B(r))^{-1}$ и $\ln(r - r_B(\omega))$ в точках $\omega = \omega_B(r)$, где $\omega_B(r)$ — корни уравнения (2.6). Функции (2.9) дают вклады в $V_0(r, \omega)$ вида $\ln(r - r_A(\omega))$ и $(r - r_A(\omega))^{-1}$. Найдем вклад указанных особенностей в интеграл (2.3). Проведем в комплексной плоскости ω разрезы вдоль действительной оси и замкнем контур интегрирования снизу. Обход полюсов в соответствии с (2.4) выбирается так, что все полюсы попадают внутрь контура интегрирования. Вычисляя интеграл (2.3), получим

$$(2.11) \quad W_r(r, l) = \left\{ \sum_{s=-l}^l g_s(r) \cos[\omega_B(r, s)t + \psi_s(r)] + \right. \\ \left. + \sum_A f_A(r) \cos[\omega_A(r)t + \varphi_A(r)] + F(r, t) \right\} T_{m0}^l(\pi/2 - \varphi, \theta, 0)$$

Здесь $\omega_B(r, s) = s\Omega \pm \sqrt{\Omega^2 + \Omega_g^2}$, частоты ω_A находятся из уравнения (2.10). В п. 3 будет показано, что все частоты $\omega_A(r)$ различны.

Поэтому все полюсы, дающие вклад во вторую сумму, первого порядка. В первой сумме индекс s принимает значения $s = -l, -l + 2, \dots, l - 2, l$.

Амплитуды $g_s(r)$, $f_A(r)$ и фазы $\psi_s(r)$, $\varphi_A(r)$ могут быть вычислены, если известно полное решение уравнения (1.3). Функция $F(r, t)$ есть интеграл по разрезам от членов, содержащих логарифмы. Конкретный вид этой функции, так же как вид амплитуд и фаз, не представляет интереса. При больших временах $F(r, t)$ убывает, как t^{-1} .

Частоты $\omega_B(r, s)$ всегда действительны. Частоты $\omega_A(r)$ могут быть как действительными, так и мнимыми в зависимости от вида начальной плотности $\rho_0(r)$. В п. 3 сформулированы условия для $\rho_0(r)$, при которых частоты ω_A мнимые.

3. Рассмотрим неустойчивые распределения начальной плотности. Введем обозначения

$$(3.1) \quad X = \omega^2 / \Omega^2(r), \quad \mu^2 = \Omega_g^2 / \Omega^2 + 1 \\ \alpha_s = \mu + s, \quad \beta_s = \mu - s$$

Функция $A_l(r, \omega)$ может быть записана в этих обозначениях в виде

$$(3.2) \quad A_l(r, \omega) = 1 + 2(\mu^2 - 1) \sum_{s=1}^l |P_{s0}(\pi/2)|^2 \times \\ \times \frac{X - \alpha_s \beta_s}{(X - \alpha_s)^2 (X - \beta_s)^2} + (\mu^2 - 1) \frac{|P_{00}^l(\pi/2)|^2}{X - \mu^2}$$

Для каждого заданного l будем исследовать такие распределения начальной плотности $\rho_0(r)$, для которых выполнено условие

$$(3.3) \quad \mu^2 = \Omega_g^2 / \Omega^2 + 1 > l^2 \quad (l > 2)$$

Рассмотрим уравнение

$$(3.4) \quad 1 + 2(\mu^2 - 1) \sum_{s=1}^l |P_{s0}^l(\pi/2)|^2 \times \\ \times \frac{X - \alpha_s \beta_s}{(X - \alpha_s)^2 (X - \beta_s)^2} + (\mu^2 - 1) \frac{|P_{00}^l(\pi/2)|^2}{X - \mu^2} = 0$$

Квадраты частоты ω_A^2 являются корнями этого уравнения.

Найдем положение частот ω_A в комплексной плоскости ω . Ввиду (1.6) следует рассматривать отдельно случаи четного и нечетного l . Пусть l нечетное. Тогда

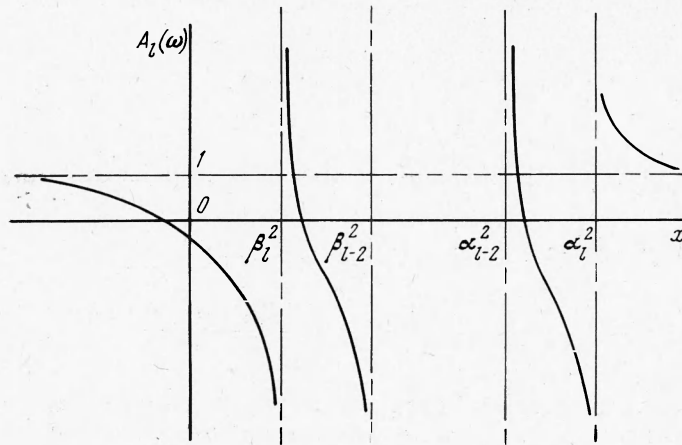
$$(3.5) \quad A_l(r, X) = 1 + 2(\mu^2 - 1) \sum_{s=1}^{l'} |P_s^l(\pi/2)|^2 \frac{X - \alpha_s \beta_s}{(X - \alpha_s)^2 (X - \beta_s)^2}$$

где Σ' означает, что суммирование ведется по нечетным s . Эта сумма содержит $l + 1/2$ слагаемых. Следовательно, уравнение (3.4) имеет $(l + 1)$ корней. Функция $A_l(r, X)$ относительно X имеет $(l + 1)$ положительных полюсов первого порядка. Покажем, что $A_l(r, X)$ монотонна относительно X . Этим будут перечислены l действительных положительных корней уравнения (3.4), каждый из которых лежит между двумя соседними положительными полюсами функции $A_l(r, X)$ (фиг. 1). Вычислим

производную $\partial A_l / \partial X$

$$(3.6) \quad \frac{\partial A_l}{\partial X} = -2(\mu^2 - 1) \sum_{s=1}^l |P_{s0}^l(\pi/2)|^2 \times \\ \times \frac{X^2 - 2\alpha_s \beta_s X - \alpha_s^2 \beta_s^2 + \alpha_s \beta_s (\alpha_s^2 + \beta_s^2)}{(X - \alpha_s^2)^2 (X - \beta_s^2)^2}$$

Рассмотрим квадратный трехчлен $Q_s(X) = X^2 - 2\alpha_s \beta_s X - \alpha_s^2 \beta_s^2 + \alpha_s \beta_s (\alpha_s^2 + \beta_s^2)$, стоящий в числителе каждого члена суммы (3.6). Его корни $X = \mu^2 - s^2 \pm 2s \sqrt{-(\mu^2 - s^2)}$ комплексны, если выполнено условие (4.3). Следовательно, $Q_s(x) > 0$ при всех s и $\partial A_l / \partial X < 0$,



Фиг. 1

т. е. функция $A_l(r, X)$ монотонно убывает. Таким образом l корней функции $A_l(r, X)$ действительны и положительны. Исследуем оставшийся $(l+1)$ -й корень. Этот корень действителен, так как на интервале от $x = -\infty$ до наименьшего полюса $X = \beta_l^2 = (\mu - l)^2$ функция $A_l(r, X)$ монотонно убывает от 1 до $-\infty$, т. е. пересекает действительную ось. Выясним знак этого корня. Для этого вычислим значение $A_l(r, X)$ при $X = 0$

$$(3.7) \quad A_l(r, 0) = 1 - 2(\mu^2 - 1) \sum_{s=1}^l \frac{|P_{s0}^l(\pi/2)|^2}{\alpha_s \beta_s} = \\ = 1 - 2 \sum_{s=1}^l |P_{s0}^l(\pi/2)|^2 \frac{\mu^2 - s^2 + s^2 - 1}{\mu^2 - s^2} = - \sum_{s=1}^l \frac{s^2 - 1}{\mu^2 - s^2} |P_{s0}^l(\pi/2)|^2$$

При выводе (3.7) использовалась формула (1.7). Поскольку $s^2 \geq 1$, $\mu^2 > l^2$, имеем $A_l(r, 0) < 0$. Следовательно, рассматриваемый корень отрицателен (фиг. 1).

Аналогично исследуется случай четных l . Функция $A_l(r, X)$ при этом имеет вид

$$(3.8) \quad A_l(r, X) = 1 + \frac{|P_{00}^l(\pi/2)|^2}{X - \mu^2} (\mu^2 - 1) + \\ + 2(\mu^2 - 1) \sum_{s=2}^l |P_{s0}^l(\pi/2)|^2 \frac{X - \alpha_s \beta_s}{(X - \alpha_s^2)(X - \beta_s^2)}$$

где Σ'' означает, что суммирование ведется по четным s . Так же как и в случае нечетных l , функция $A_l(r, X)$ имеет $(l + 1)$ корней, из которых l корней положительны (если выполнено (3.3)). Для выяснения знака $(l + 1)$ -го корня оценим $A_l(r, 0)$.

$$\begin{aligned} A_l(r, 0) &= 1 - |P_{00}^l(\pi/2)|^2 \frac{\mu^2 - 1}{\mu^2} - \\ &- 2(\mu^2 - 1) \sum_{s=2}^l |P_{s0}^l(\pi/2)|^2 \frac{1}{\mu^2 - s^2} = - \sum_{s=-l}^l \frac{s^2 - 1}{\mu^2 - s^2} |P_{s0}^l(\pi/2)|^2 < - \\ &- \sum_{s=2}^l \frac{s^2 - 1}{\mu^2} |P_{s0}^l(\pi/2)|^2 = \frac{1}{\mu^2} \left(1 - \sum_{s=-l}^l s^2 |P_{s0}^l(\pi/2)|^2 \right) < 0 \end{aligned}$$

т. е. исследуемый корень отрицателен.

Таким образом, показано, что функция $A_l(r, X)$ имеет l положительных и один отрицательный корень. Из доказательства следует также, что $A_l(r, X)$ имеет только корни первого порядка. При этом рассматривались такие распределения начальной плотности $\rho_0(r)$, для которых $1 + \Omega_g^2 / \Omega^2 > l^2$. Обозначим положительные корни уравнения (3.2) через $X_i = \omega_i^2 / \Omega^2$ ($i = 1, 2, \dots, l$), а отрицательный через $X_0 = -\omega_0^2 / \Omega^2$. Можно записать выражение (2.11) в виде ($l > 2$).

$$\begin{aligned} (3.9) \quad W_r &= \left\{ \sum_{s=-l}^l g_s(r) \cos[\omega_B(r, s)t + \psi_s(r)] + \right. \\ &+ \sum_{i=1}^l f_i(r) \cos[\omega_i(r)t + \varphi_i(r)] + H(r, t) + \\ &\left. + (f_+(r) + h_+(r, t))e^{\omega_0(r)t} + (f_-(r) + h_-(r, t))e^{-\omega_0(r)t} \right\} T_{m_0}^l(\pi/2 - \varphi, \theta, 0) \end{aligned}$$

Здесь функции $h_{\pm}(r, t)$ могут быть представлены в виде интегралов по разрезам, проведенным из точек $\omega = \pm i\omega_0$. При больших временах функции $H(r, t)$ и $h_+(r, t)$ убывают как t^{-1} .

Скопление экспоненциально неустойчиво относительно возмущений содержащих низшие гармоники (за исключением $l = 0, 1$), если плотность $\rho_0(r)$ удовлетворяет условию (3.3). Относительно возмущений для $l = 0, 1$ система устойчива при любом начальном распределении. В случае радиальных возмущений ($l = 0$) уравнение (3.2) имеет единственный положительный корень $X_0 = 1$, или $\omega_0 = \pm \Omega(r)$. В случае дипольных возмущений ($l = 1$) система также устойчива ($\omega_0 = 0$). Эти возмущения смещают центр тяжести и не рассматриваются. Следующая гармоника $l = 2$ приводит к раскачке системы при некотором распределении масс $\rho_0(r)$. Любое реальное возмущение, не обладающее центральной симметрией, содержит эту гармонику.

Рассмотрим начальные распределения $\rho_0(r)$, удовлетворяющие условию $\mu^2 > 4$. Эти распределения неустойчивы по соображениям, изложенным выше, относительно любых возмущений (за исключением радиальных). Здесь $\mu^2 = 1 + \Omega_g^2 / \Omega^2 = 4 + r(d\Omega^2 / dr) / \Omega^2$. Таким образом имеем критерий неустойчивости

$$(3.10) \quad d\Omega^2 / dr > 0$$

где $\Omega^2(r)$ определено выражением (1.1).

Распределения, удовлетворяющие этому критерию, могут быть неустойчивы также относительно высших гармоник возмущения ($l > \mu$). Например, при $\mu^2 = 4 + \varepsilon(r)$, где $0 < \varepsilon(r) \ll 1$, к неустойчивости при-

водят возмущения со всеми четными $l \geq 4$, а в случае $\mu^2 = 9 + \varepsilon(r)$ также и нечетные $l \geq 5$. Доказательства аналогичны изложенному.

Представляет интерес зависимость инкремента неустойчивости $\omega_0(r, l)$ от l . Исследование этой зависимости требует громоздких вычислений. На основании изложенного в п. 3 можно предположить, что инкремент $\omega_0(l)$ убывает с ростом l . Это, однако, неверно, так как при $\mu^2 \gg l^2 > 1$ имеем в первом исчезающем порядке по $1/\mu^2$

$$(3.11) \quad \omega_0^2(r, l) = \Omega^2(r) \left[\sum_{s=-l}^l s^2 |P_{s0}^l(\pi/2)|^2 - 1 \right]$$

Можно убедиться, используя (1.6), (1.7), что $\omega_0^2(l) = \omega_0^2(l-2) + 2l - 1$, $\omega_0^2(l) > \omega_0^2(l-1)$, т. е. инкремент растет с ростом l . Возможен другой случай: при $\mu^2 = 9 + \varepsilon(r)$, где $0 < \varepsilon(r) \ll 1$ для двух первых гармоник возмущения, приводящих к неустойчивости из уравнения (3.3), имеем

$$(3.12) \quad \omega_0^2(l=2) \sim 0.6\Omega^2(r), \quad \omega_0^2(l=3) \sim 0.3\varepsilon(r)\Omega^2$$

т. е. инкремент убывает. (Для нечетных $l \geq 5$ можно показать, что $\omega_0^2(l) \approx f(l)\varepsilon(r)\Omega^2$, где $f(l)$ — убывающая функция.) Неустойчивость с инкрементами (3.2), (3.3) развивается быстро — за время, меньшее или порядка периода обращения звезд вокруг центра скопления ($\tau \leq 1/\Omega(r)$). Можно указать долгоживущие скопления. При $\mu^2 = 4 + \varepsilon(r)$, где $0 < \varepsilon(r) \ll 1$ (это означает медленное нарастание плотности к краю системы) для четных гармоник возмущения, дающих неустойчивость, имеем

$$(3.13) \quad \omega_0^2(l) = \gamma(l)\varepsilon(r)\Omega^2(r) \\ \gamma(l) = 3 |P_{20}^l(\pi/2)|^2 [13 |P_{20}^l(\pi/2)|^2 + 2 |P_{00}^l(\pi/2)|^2 + \\ + \left| 16 \sum_{s=4}^l \frac{s^2-1}{s^2-4} |P_{s0}^l(\pi/2)|^2 \right|^{-1}]$$

убывает с ростом l . Максимальный инкремент есть $\omega_0^2(l=2) \approx 0.2\varepsilon(r) \times \Omega^2(r)$ и может быть сколь угодно малым.

Рассмотрим случай постоянной плотности $\rho_0(r) = \text{const}$. Устойчивость такой системы исследовалась в [4,5]. В этих работах был сделан вывод об устойчивости относительно произвольных возмущений. При этом были потеряны нулевые частоты, существование которых следует из (3.4) при переходе к пределу $\varepsilon \rightarrow 0$ ($\mu^2 = 4$ при $\rho_0 = \text{const}$). Если $\varepsilon(r) < 0$, что означает медленное спадание плотности к краю скопления, система устойчива.

4. Рассмотрим устойчивые распределения плотности. В п. 3 показано, что при $\mu^2 > 4$ всегда имеется неустойчивая мода возмущений ($l=2$). Рассмотрим распределения $\rho_0(r)$, отвечающие неравенству

$$(4.1) \quad 1 < \mu^2 < 4$$

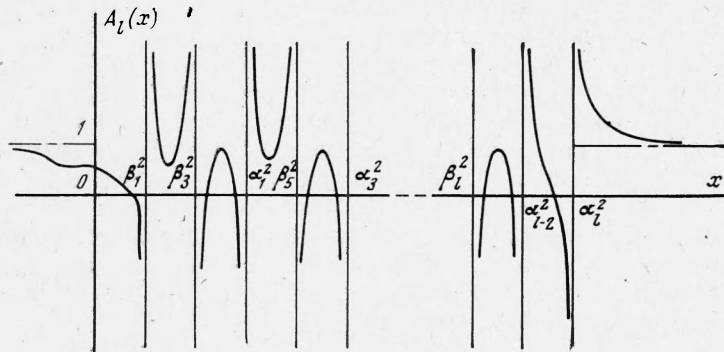
Используя методы п. 3, после громоздкого анализа находим (подробности см. в [6]), что в случае нечетных l функция $A_l(X)$ имеет вид, изображенный на фиг. 2. Для четных l функция $A_l(X)$ изображена на фиг. 3. Таким образом, при условии (4.1) все нули функции $A_l(X)$ положительны, откуда вытекает устойчивость данной системы. Используя (3.3) и (4.1), находим, что критерий устойчивости имеет вид

$$(4.2) \quad d\Omega^2/dr < 0$$

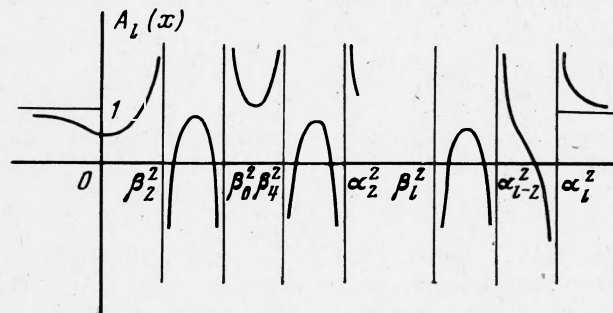
Покажем, что учет микроструктуры системы приводит к затуханию колебаний. Введем характерный размер Δ , на котором сказывается структура системы. Эта характерная длина во всяком случае больше расстояния между звездами $r_0 \sim R / N^{1/3}$, где R — радиус системы, N — число звезд.

Исследуем случай радиальных возмущений ($l = 0$). Пусть возмущение в момент времени $t_0 = 0$ имеет вид

$$(4.3) \quad W_r(r, 0) = V(r), \quad W_\theta = W_\varphi = 0, \quad \rho_1(r, 0) = 0$$



Фиг. 2



Фиг. 3

где $V(r)$ — малая произвольная функция, удовлетворяющая неравенству

$$(4.4) \quad V(r) \ll \Omega(r) \Delta$$

Это условие означает, что время, необходимое возмущенной звезде, чтобы сместиться по радиусу на расстояние $\sim \Delta$, должно быть много больше периода обращения вокруг центра системы $T = 2\pi / \Omega(r)$. Для скорости $W(r, t)$ с начальными условиями (3.1) имеем

$$(4.5) \quad W_r(r, t) = V(r) \cos \Omega(r) t, \quad W_\theta = W_\varphi = 0$$

Вычисляя возмущенную плотность ρ_1 из уравнения Пуассона, найдем

$$(4.6) \quad \rho_1(r, t) = -\frac{1}{\Omega} \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} (r^2 \rho_0 V) \sin \Omega(r) t - \frac{\rho_0 V}{\Omega} \frac{d\Omega}{dr} t \cos \Omega(r) t$$

Из (4.6) следует, что амплитуда колебаний плотности растет линейно по времени и для $t_1 \sim \Omega (V (d\Omega / dr))^{-1}$ линейное приближение неприменимо. Для возмущений, удовлетворяющих условию (4.4), это не так. Частоты колебаний скорости в двух точках на расстоянии $\sim \Delta$ отличаются на величину $\sim \Delta (d\Omega / dr)$. Следовательно, по истечении времени $t \sim (\Delta (d\Omega / dr))^{-1}$ скорости в этих близких точках будут иметь противоположные направления. Таким образом, наступает своеобразная «расфазировка».

В [1] были выведены уравнения для макроскопических частей скорости W и плотности ρ . При этом не учитывалось, что роль физической точки должна играть область с размерами $\sim \Delta$. Образование встречных потоков в объеме $\sim \Delta^3$ нарушает условие, выделяющее макроскопическую часть скорости из микроскопических скоростей частиц. Для восстановления значений величин W и ρ необходимо усреднить их по области с размером $\gg \Delta$. До тех пор пока расфазировка на размере Δ незначительна, это усреднение не изменяет вида формул для W и ρ . Если по истечении большого времени $t_1 \sim \Omega / V (d\Omega / dr)$ расфазировка становится сильной, это усреднение показывает, что часть энергии первоначального возмущения перешла в хаотическую форму. Не учитываемые явно парные взаимодействия приведут к поглощению этой, ставшей хаотической, части скорости (нагрев системы). Имеем

$$(4.7) \quad \langle W \rangle = \frac{1}{\delta V} \int_{\delta V} W dV$$

где $\delta V \sim \Delta^3$. Этот интеграл можно оценить, если ввести характеристическую функцию вида

$$(4.8) \quad f(r') = \frac{1}{\sqrt{\pi} \Delta} \exp \left\{ -\frac{(r' - r)^2}{\Delta^2} \right\}$$

и распространить пределы интегрирования до бесконечности. Выполняя интегрирование, получим

$$(4.9) \quad \langle W_r \rangle = V(r) e^{-t^2/\tau^2} \cos \Omega(r) t$$

где $\tau \sim (\Delta (d\Omega / dr))^{-1}$. Плотность ρ_1 , определяемая из уравнения неразрывности, также экспоненциально затухает со временем. Как следует из (4.4), $\tau \ll t_1 \sim \Omega (V (d\Omega / dr))^{-1}$, т. е. колебания затухают прежде, чем линейное приближение становится неприменимым. Следует отметить, что система линейно неустойчива относительно возмущений, нарушающих (4.4) (по истечении времени $t_1 \sim \Omega (V (d\Omega / dr))^{-1}$ плотность ρ_1 достигает величины порядка ρ_0).

В случае произвольных возмущений, не обладающих центральной симметрией ($l \neq 0$), также необходимо произвести дополнительное усреднение. Вычисления с характеристической функцией (4.8) дают

$$(4.10) \quad \begin{aligned} \langle W_r(r, \theta, \varphi, t) \rangle = & \left\{ \sum_{s=-l}^l g_s(r) e^{-t^2/\tau^2} \cos [\omega_B(r, s) t + \psi_s(r)] + \right. \\ & + \sum_{i=1}^{l+1} f_i(r) e^{-t^2/\tau_i^2} \cos [\omega_i(r) t + \varphi_i(r)] + G(r, t) T_{m_0}^l(\pi/2 - \varphi, \theta, 0) \\ & \left. \tau_s \sim \left(\Delta \frac{d\omega_B(r, s)}{dr} \right)^{-1}, \quad \tau_i \sim \left(\Delta \frac{d\omega_i(r)}{dr} \right)^{-1} \right\} \end{aligned}$$

где функция $G(r, t)$ на больших временах убывает, как t^{-1} . Плотность $\rho_1(r, t)$ убывает со временем с тем же показателем затухания.

Показано, что скопления с распределением масс, удовлетворяющим условию $d\Omega^2 / dr < 0$, устойчивы относительно произвольных возмущений. Возникающие при этом колебания затухают со временем.

Авторы благодарят Я. Б. Зельдовича за стимулирующие беседы.

Поступила 4 V 1973

ЛИТЕРАТУРА

1. Пальчик М. Я., Паташинский А. З., Пинус В. К., Эпельбаум Я. Г. Колебания эйнштейновской модели шарового звездного скопления. Препринт Ин-та ядерн. физ. СО АН СССР, 1970, № 99—70.
2. Гельфанд И. М., Минлос Р. А., Шапиро З. Я. Представления группы вращений и группы Лоренца, их применения. М., Физматгиз, 1958.
3. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М., Физматгиз, 1961.
4. Михайловский А. Б., Фридман А. М., Эпельбаум Я. Г. Методы теории плазмы в проблеме гравитационной устойчивости. ЖЭТФ, 1970, т. 59, вып. 5.
5. Михайловский А. Б., Паташинский А. З., Фридман А. М., Эпельбаум Я. Г. Устойчивость шарового скопления звезд с большим гравитационным красным смещением. Препринт Ин-та ядерн. физ. СО АН СССР, 1969, № 341.
6. Пальчик М. Я., Паташинский А. З., Пинус В. К. Неустойчивые сферические галактики. Устойчивые сферические галактики. Препринт Ин-та ядерн. физ. СО АН СССР, 1970, № 100—70.