$$\rho\left(-\xi\frac{\partial h}{\partial\xi}-\frac{1}{2}\eta\frac{\partial h}{\partial\eta}+\Phi\frac{\partial h}{\partial\xi}+V\frac{\partial h}{\partial\eta}\right)=-\xi\frac{\partial p}{\partial\xi}-\frac{1}{2}\eta\frac{\partial p}{\partial\eta}+$$
$$+\Phi\frac{\partial p}{\partial\xi}+V\frac{\partial p}{\partial\eta}+\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\lambda\frac{\partial T}{\partial\eta}\right)+\mu\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\eta}\right)^2+\frac{\nu_H}{4\pi}\left(\frac{\partial H_x}{\partial\eta}\right)^2$$

или

$$\rho c_p\left(-\xi\frac{\partial T}{\partial\xi}-\frac{1}{2}\eta\frac{\partial T}{\partial\eta}+\Phi\frac{\partial T}{\partial\xi}+V\frac{\partial T}{\partial\eta}\right)=-\xi\frac{\partial p}{\partial\xi}-$$
$$-\frac{1}{2}\eta\frac{\partial p}{\partial\eta}+\Phi\frac{\partial p}{\partial\xi}+V\frac{\partial p}{\partial\eta}+\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\lambda\frac{\partial T}{\partial\eta}\right)+\mu\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\eta}\right)^2+\frac{\nu_H}{4\pi}\left(\frac{\partial H_x}{\partial\eta}\right)^2.$$

Для решения задачи используется неявная разностная схема. При расчете выделено два блока. В первом блоке одновременно решаются по методу матричной прогонки уравнения движения и энергии до полного завершения итерационного процесса. Во втором блоке отыскиваются профили напряженности магнитного поля. Процесс решения на слое ξ_i считается законченным после того, как все профили оказываются сосчитанными с заданной точностью. Точность приходится задавать высокую, поскольку иначе с ростом ξ происходит существенное накопление ошибок. Распределение напряженности магнитного поля H_x дано на фиг. 4. (*1* — $\xi = 0{,}0125$; *2* — $\xi = 4{,}137$, $U_e = 0{,}2\cdot10^5$ см/с); μ, λ, ν_H рассматривались как степенные функции плотности и температуры.

Указанный алгоритм выбран в связи с возможностями машинной памяти М-222. Похоже, что использование матричной прогонки для одновременного счета всех искомых величин привело бы к более быстрому решению задачи. Следует заметить, что если в расчетах нестационарного пограничного слоя для несжимаемой жидкости точность роста вертикальной составляющей скорости неважна и результаты меняются лишь на несколько процентов при полном ее отсутствии, для сжимаемой жидкости требуется аккуратный учет этой составляющей.

Поступила 24 XII 1975

ЛИТЕРАТУРА

1. **Прозорова Э. В.** Об автомодельности движений нестационарного пограничного слоя.— ПМТФ, 1975, № 4, с. 122—125.
2. **Лойцянский Л. Г.** Ламинарный пограничный слой. М., Физматгиз, 1962, с. 357—360.
3. **Бай-Ши-И.** Магнитная газодинамика и динамика плазмы. М., «Мир», 1964, с. 54.

УДК 534.533.6.011

О ВНУТРЕННИХ РЕЗОНАНСАХ В ГИДРОДИНАМИКЕ

Ю. Б. Пономаренко

(Москва)

1. В теории колебаний систем, близких к линейным [1], внутренним резонансом называют пропорциональность нескольких собственных частот натуральным числам. В данной работе рассмотрены внутренние резонансы в гидродинамике.

В случае внутреннего резонанса вынужденные колебания малой амплитуды, вызываемые гармоническим возмущением, могут существенно отличаться от гармонических. Примером являются разрывные колебания газа (ударные волны), наблюдаемые в закрытой трубе при гармоническом движении поршня [2, 3].

Автоколебания малой амплитуды также могут быть существенно негармоническими, например автоколебания в газовом разряде при низком давлении [4].

Основные черты резонансов выявляются при рассмотрении граничной задачи для вещественного вектора X

$$\frac{\partial X}{\partial t} + L_1 X + L_2 X^2 + \ldots = \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k C_k e^{i\omega_k t} + \text{к. с.}, \ UX = 0 \tag{1.1}$$

(к. с.— выражение, комплексно-сопряженное предшествующему). Здесь вещественные коэффициенты L и матрица U в граничном условии могут зависеть от координат x и являются полиномами относительно $D = \partial/\partial x$. Область изменения x предполагается ограниченной. Каждое возмущение с частотой $\omega_k > 0$ и формой $C_k(x)$ пропорционально малой амплитуде ε_k. Частоты ω_k и их разности считаются немалыми (эффекты типа медленного изменения параметров здесь не рассматриваются). Предполагается, что задача

$$pX + L_1 X = 0, \ UX = 0 \tag{1.2}$$

имеет несколько простых собственных чисел $p = \gamma + i\Omega$ с малыми инкрементами γ и положительными частотами Ω. Пусть это будут числа $p_m (m = 1, 2, \ldots, M)$, соответствующие собственные функции X_m, собственные функции сопряженной задачи Z_m; инкременты других собственных значений отрицательны и немалы.

Так как числа p_m почти мнимые, то они приближенно пропорциональны некоторым натуральным числам. Условия, при которых такая пропорциональность существенна, рассмотрены ниже.

Очевидно, всегда можно выбрать целые числа a_{mk}, b_m так, что

$$\Omega_m \approx (a_{m1}\omega_1 + \ldots + a_{mn}\omega_n)/b_m \equiv \nu_m.$$

Резонансным колебаниям, характеризуемым этими числами, соответствует решение

$$X = \left(\sum_{m=1}^{M} X_m Q_m \exp i\nu_m t + \sum_{k=1}^{n} Y_k \varepsilon_k \exp i\omega_k t \right) + \text{к. с.} + \ldots \tag{1.3}$$

в виде степенного ряда по величинам $Q_m \exp i\nu_m t$, $\varepsilon_k \exp i\omega_k t$ и комплексно-сопряженным с коэффициентами, зависящими только от x. Уравнение для амплитуды $Q_m(t)$ также ищется в виде ряда по величинам Q_r, ε_k и сопряженным. Это уравнение имеет вид

$$dQ_m/dt = Q_m(\delta_m + \ldots) + \sum \varepsilon_\alpha^a \bar{\varepsilon}_\beta^b Q_s^c \bar{Q}_r^d \ldots (p_{m\alpha\ldots} + \ldots) \tag{1.4}$$

$$(\delta_m = p_m - i\nu_m, \ m = 1, \ldots, M),$$

где в скобках стоят ряды по степеням $|Q_r|^2$, $|\xi_k|^2$; сумма берется по всем натуральным числам $a, b, c, \ldots$ удовлетворяющим нетождественным равенствам

$$\nu_m = a\omega_\alpha + \ldots - b\omega_\beta - \ldots + c\nu_s + \ldots - d\nu_r - \ldots$$

Тождеству $\nu_m = \nu_m$ соответствует ряд, стоящий перед суммой; члены этого ряда описывают нерезонансные эффекты, существующие при любых ν_m.

Как и в случае автономных систем [5] при $M = 1$, коэффициенты в (1.3) определяются последовательно из линейных неоднородных граничных задач, получающихся после подстановки (1.3), (1.4) в (1.1). Коэффициенты в (1.4) определяются из условия ограниченности при $\delta_m \to 0$ соответствующих коэффициентов в (1.3). Это условие имеет вид

$$\langle \Psi \cdot Z_m \rangle \equiv \int \left(\Psi \cdot \bar{Z}_m \right) dx = 0, \tag{1.5}$$

где Ψ — свободный член неоднородной задачи, линейно зависящий от искомого коэффициента в (1.4); интегрирование ведется по области изменения x.

Для нахождения коэффициента $p_{m\alpha\ldots}$ уравнения (1.4) необходимо учитывать в (1.1) все члены ряда со степенями $\leqslant N = a + b + c + \ldots$; для нахождения наибольших нерезонансных членов в (1.4) достаточно удержать в (1.1.) квадратичные и кубичные члены. Отсюда видно, что резонансные эффекты существенны, если порядок резонанса $N \leqslant 3$. Нерезонансные эффекты преобладают *, если порядок резонансов $N > 3$.

В простых примерах можно оценить стационарные решения (1.4) и тем самым выяснить влияние резонансов на амплитуду (но не на устойчивость) колебаний. Пусть, например, в (1.1), (1.2) числа $n = 1$, $M = 2$, причем $p_2 = i\Omega_2 = 9p_1$, $\Omega_1 = \omega$; тогда в колебаниях с частотой ω резонанс девятого порядка несуществен, так как $Q_2 \sim Q_1^7 \ll Q_1 \sim \varepsilon^{1/3}$. Если, в отличие от предыдущего случая, имеется третье число $p_3 = 3p_1 = p_2/3$, то все три амплитуды $\sim \varepsilon^{1/3}$.

Выше для определенности рассматривалась задача (1.1) с линейным однородным граничным условием. Задачи с другими условиями часто оказывается возможным привести к виду (1.1) введением новых неизвестных (например, в случае линейного неоднородного условия принимается $X = X^0 + A$, где A — какая-либо функция, удовлетворяющая неоднородному условию). В таком приведении, однако, нет необходимости. Для каждого типа резонанса ряды (1.3), (1.4) не меняют своей структуры, если уравнения и граничные условия для X представляются в виде степенных рядов по составляющим X, их производным по t, x и возмущениям $\varepsilon_k \exp(i\omega_k t)$. Для коэффициентов в (1.3) будут получаться линейные задачи с неоднородными условиями; однородности условий можно добиться (если нужно) отмеченным выше приемом.

Задачи с неаналитическими нелинейностями (например, вида $X_n|X_m|$) требуют специального рассмотрения.

Для выявления основных закономерностей резонанса достаточно удержать в (1.4) только наибольшие члены. В этом основном приближении расстройки δ_m (по определению резонанса малые) учитываются только членами $Q_m\delta_m$; в коэффициентах остальных членов принимается $p_m = i\Omega_m = i\nu_m (m = 1, \ldots, M)$, чтобы не превысить точность приближения. В приведенных ниже примерах резонансы рассмотрены в основном приближении.

2. В качестве примера рассмотрим задачу нахождения $X = (\xi, w)$ из уравнений

$$\xi^{\cdot} + w' = 0, \quad w^{\cdot} + \xi' + \Phi' = 0 \quad (0 \leqslant x \leqslant 1), \tag{2.1}$$
$$\Phi = w^2/\rho + (\rho^\beta - 1)/\beta - \xi = w^2 + 1/2(\beta - 1)\xi^2 + \ldots$$

и граничных условий

$$(w)_0 = \xi l^{\cdot}, \quad (w)_1 = 0. \tag{2.2}$$

* Возможны исключительные случаи (например, когда в (1.4) некоторые коэффициенты равны нулю).

Здесь точка означает дифференцирование по t, штрих — по x. Записанная в безразмерном виде (таком, что при $\varepsilon=0$ длина трубы, плотность $\rho = 1 + \xi$, давление ρ^β и скорость звука равны единице) задача (2.1), (2.2) описывает колебания газа в закрытой трубе, возбуждаемые движущимся поршнем *. Форма смещения поршня

$$l(\omega t) = \sum l_m \exp(im\omega t) \quad (l_{-m} = \bar{l}_m,\ l_0 = 0) \tag{2.3}$$

может быть (в отличие от [6, 7]) негармонической. Собственные частоты линейной однородной задачи (2.1), (2.2) равны πm, где m — целое число; поэтому имеется бесконечное число внутренних резонансов второго порядка.

Разложения (1.3), (1.4) для задачи (2.1), (2.2) находятся в виде

$$X = A_1 + A_2 + A_3 + \ldots, \quad A_1 = \sum Q_m X_m e^{im\omega t}, \tag{2.4}$$

$$X_m = (\cos m\pi x, - i \sin m\pi x),\ Q_{-m} = \bar{Q}_m,$$

$$dQ_m/dt = im(\pi - \omega)Q_m + a_m + \ldots$$

Здесь сумма берется по всем целым m; собственная функция X_m соответствует собственной частоте πm. Удобно определять ряды (2.4), считая $Q_m \sim \varepsilon^{1/2}$, $\omega - \pi \sim \varepsilon^{1/2}$, $A_m \sim \varepsilon^{m/2}$; коэффициенты $a_m \sim \varepsilon$ определяются из условия ограниченности A_2.

Вектор A_2 определяется из условий (2.2) и уравнения

$$\dot{A}_2 + BA_2' + \Phi_2'E + \sum a_m X_m \exp im\omega t = 0, \tag{2.5}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ E = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},\quad \Phi_2 = w_1^2 + (1/2)(\beta - 1)\xi_1^2,$$

где ξ_1, w_1 — составляющие A_1.

Полагая в (2.2), (2.5)

$$A_2 = \sum (Y_m + \varepsilon l_m T_m) e^{im\omega t}, \tag{2.6}$$

$$\Phi_2 = \sum F_m e^{im\omega t},\quad T_m = [1,\ im\omega(1 - x)],$$

получим для Y_m однородные условия (2.2) и уравнение **

$$im\omega Y_m + BY_m' + \Psi = 0,\quad \Psi = a_m X_m + E\left[F_m' - m^2\omega^2 l_m \varepsilon(1 - x)\right]. \tag{2.7}$$

При $\omega \to \pi$ величина Y_m конечна, если выполнено условие (1.5). В используемом основном приближении (см. п. 1) достаточно найти a_m при $\omega = \pi$. Из (1.5), (2.5)—(2.7) с учетом равенства $Z_m = X_m$ получается

---

* Замена точного условия на поршне ($w = \rho\varepsilon \dot{l}$ при $x = \varepsilon l$) приближенным (2.2) не уменьшает точности основного приближения (см. п. 1).

** Так как величина Y_m не зависит явно от t и квадратична по $Q_n(t)$, то $\dot{Y}_m \sim A_3$ и поэтому не входит в (2.7).

(2.8)
$$a_m = -i\int_0^1 \left[F_m' - m^2\pi^2 l_m \varepsilon(1-x)\right]\sin m\pi x dx = i\pi m \times$$
$$\times\left[\varepsilon l_m + (1/8)(1+\beta)\sum_n Q_n Q_{m-n}\right].$$

При $m = 0$ из (2.4), (2.8) следует $Q_0 = 0$ (в соответствии с сохранением полной массы газа в трубе). Для других стационарных амплитуд после введения обозначений

$$\mu^2 = 8\varepsilon/(1+\beta),\ f_0 = 4(1-\omega/\pi)/\mu(1+\beta),\ f_m = Q_m/\mu\ (m \neq 0)$$

получаются уравнения

(2.9)
$$l_m + \sum_n f_n f_{m-n} = L\delta_{0m}\quad (m = 0, \pm 1, \ldots),$$

в которых L — положительный параметр. Зависимость амплитуд f_m от относительной расстройки частоты f_0 удобно находить в параметрическом виде, определяя из (2.9) амплитуды и расстройку как функции L.

Уравнения (2.9) эквивалентны уравнению

(2.10)
$$f^2 = L - l(\theta)$$

для вещественной периодической функции

(2.11)
$$f(\theta) = \sum f_m e^{im\theta}.$$

Форма смещения поршня $l(\theta)$ определена в (2.3). Расстройка f_0, параметр L и решение X выражаются через f в виде

(2.12)
$$f_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f d\theta,\quad L = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f^2 d\theta;$$

(2.13) $X \approx A_1 = (1/2)\mu(f_+ + f_- - 2f_0,\ f_- - f_+),\ f_\pm = f(\omega t \pm \pi x).$

Результаты [6, 7] распространяются на случай негармонической непрерывной формы l следующим образом. Пусть $l(\theta) \leqslant 1$; тогда непрерывное решение (2.10)

(2.14)
$$f = (f_0/|f_0|)|L - l|^{1/2}\ (L \geqslant 1,\ |f_0| \geqslant f_* = f_0(1))$$

единственно и соответствует расстройке $f_0(L)$, определяемой из (2.12).

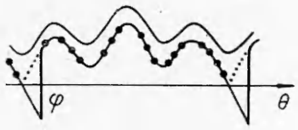
При $|f_0| < f_*$ возможны только разрывные решения (2.10). Представляют интерес лишь решения, описывающие ударные волны сжатия [2] (после прохождения волны сжатия плотность в заданной точке возрастает). В таких допустимых решениях, согласно (2.13), функция $f(\theta)$ с ростом θ может скачкообразно увеличиваться, но не может скачкообразно уменьшаться *.

Если в интервале $0 \leqslant \theta < 2\pi$ значение $l = 1$ принимается в единственной точке $\theta = \theta_0$, то допустимое решение

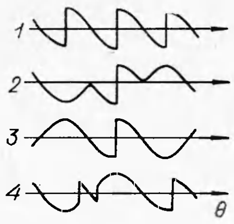
(2.15)
$$f = |1 - l|^{1/2}\begin{cases} -1 & \theta_0 \leqslant \theta < \varphi \\ 1 & \varphi < \theta \leqslant \theta_0 + 2\pi \end{cases}$$
$$(0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi,\ |f_0| \leqslant f_*)$$

единственно и соответствует расстройке $f_0(\varphi)$, определяемой из (2.12).

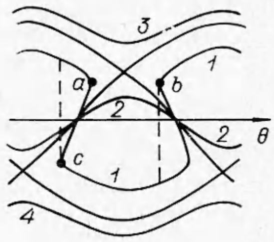
* Остальные соотношения на разрыве [2] сводятся в приближении (2.13) к акустическим и выполняются автоматически.



Ф и г. 1



Ф и г. 2



Ф и г. 3

Произвольной расстройке соответствует одно из решений (2.14), (2.15). На фиг. 1 показан вид этих решений вблизи $f_0 \approx f_*$ для

$$l(\theta) = \alpha \cos\theta + (1-\alpha)\cos 3\theta \quad (0 < \alpha \ll 1,\ l \leqslant l(0) = 1). \tag{2.16}$$

Точками показана кривая $f(\theta, f_*)$.

Кроме (2.14), (2.15), при любой расстройке существует бесконечное множество разрывных решений (2.10); все они содержат по крайней мере один скачок разрежения и, следовательно, не являются допустимыми.

Если значение $l = 1$ достигается на интервале $[0, 2\pi)$ в нескольких точках, то при $|f_0| < f_*$ существует бесконечное множество допустимых решений, отличающихся числом, величиной и взаимным расположением скачков. На фиг. 2 показаны некоторые решения *1—4* для $\alpha = 0$ в (2.16) и $f_0 = 0$.

В экспериментах [3, 6, 7] наблюдались лишь симметричные колебания типа *1*. Возможная причина — неустойчивость других типов колебаний. Другая возможность — зависимость типа колебаний от начальных условий и (или) от способа изменения параметров. Пусть, например, в начальный момент заданы форма (2.16) и расстройка $f_0 > f_*$, так что существуют непрерывные колебания (см. фиг. 1). Тогда колебания типа *2* получаются, если медленно уменьшить до нуля сначала f_0, затем α. Если $f_0 \to 0$ при $\alpha = 0$, то, как показывают наблюдения [3, 6, 7], из всех допустимых возникают колебания типа *1*.

Следует отметить, что ударные волны нагревают газ; это приводит к наблюдаемому [3] повышению резонансной частоты (при которой $f_0 = 0$). Так как выделение тепла в каждом скачке пропорционально кубу величины скачка [2], то нагрев и повышение частоты пропорциональны μ^3. Коэффициент пропорциональности зависит от условий теплоотвода и от типа колебаний; при $f_0 \approx f_*$ колебания типа *1* приводят к наименьшему нагреву.

3. Рассмотрим задачу (2.1), (2.2), в которой второе граничное условие заменено приближенным условием для открытой трубы $(\xi)_1 = 0$. Для простоты примем $\beta = 1$.

В данном случае имеется бесконечное число внутренних резонансов третьего порядка. Решение представляется выражениями (2.4), в которых π заменено на $(1/2)\,\pi$, а m — нечетные числа. Будут рассмотрены колебания, в которых $Q_m \sim \varepsilon^{1/3}$, $A_m \sim \varepsilon^{m/3}$, $\omega - (1/2)\pi \sim \varepsilon^{2/3}$. Коэффициенты $a_m \sim \varepsilon$ определяются из задачи для A_3. Предварительно необходимо найти $A_2 = (\xi_2, w_2)$ из однородных условий и уравнения (2.5), в котором сумма опущена; при $\omega = (1/2)\pi$

$$w_2 = -\frac{i}{8}\sum_{n,s} Q_s Q_n e^{ia\omega t}\left[\left(\frac{b^2}{ns} - 2\right)\sin a\eta + \frac{ab}{ns}\sin b\eta + 2a\eta\cos a\eta\right] \tag{3.1}$$

$$(\eta = 1/2\cdot\pi x,\ a = n + s,\ b = n - s).$$

Полагая

$$(3.2)\qquad A_3 = \sum (Y_m + im\omega\varepsilon l_m E)\, e^{im\omega t}, \quad 2w_1 w_2 - w_1^2 \xi_1 = \sum F_m e^{im\omega t},$$

получим для Y_m при нечетном m однородные условия и уравнение (2.7), в котором множитель $(1 - x)$ опущен. Из (1.5), (2.7), (2.1), (3.1), (3.2) получается при $\omega = \pi/2$, $Z_m = X_m$

$$(3.3)\qquad a_m = \frac{1}{2}\, i\pi m \left[\varepsilon l_m - \frac{5}{16}\left(Q_m \sum |Q_n|^2 + \frac{1}{3} \sum_{s,n} Q_s Q_n Q_{m-n-s}\right)\right].$$

После введения обозначений

$$(3.4)\qquad \mu^3 = -(24/5)\varepsilon,\ f_m = Q_m/\mu,\ r = (16/5)(2\omega/\pi - 1)/\mu^2$$

для стационарных амплитуд из (2.4), (3.3) следует

$$(3.5)\qquad \sum f_s f_n f_{m-n-s} + 3f_m \left(\sum |f_n|^2 + r\right) + 2l_m = 0.$$

Для функции f в (2.11) из (3.5) вытекает

$$(3.6)\qquad f^3 + 3pf + 2q(\theta) = 0,$$

где q получается из (2.3) отбрасыванием четных гармоник, а

$$(3.7)\qquad p = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f^2 d\theta + r.$$

Так как f содержит лишь нечетные гармоники, то искомые решения (3.6) должны удовлетворять условию $f(\theta + \pi) = -f(\theta)$. Для X справедливо (2.13), где $f_0 = 0$.

В дальнейшем принято $q = l = \cos\theta$. На фиг. 3 показаны корни уравнения (3.6) для $0 > p > -1$ (кривая *1*), $p < -1$ (кривые *2*—*4*) и $p = -1$. При $p \geqslant 0$ кривая *1* однозначна и представляет решение f. При $p < -1$ решение f представляется кривой *2*. При $-1 < p < 0$ все однозначные решения $f(\theta)$ разрывны и содержат скачки разрежения (см. п. 2); скачки в одном из возможных решений показаны на фиг. 3 штрихом.

Отсутствие решений, содержащих только скачки сжатия, указывает на то, что в данной задаче при уменьшении вязкости и теплопроводности ширина фронта в скачке остается конечной и определяется некоторым физическим эффектом, не вызывающим нагрев газа. Таким эффектом является излучение из открытого конца трубы.

Для учета излучения необходимо в уравнении (2.4) для Q_m заменить $(1/2)\pi m$ на собственную частоту, измененную излучением. Изменение сводится [8] к умножению $(1/2)\pi m$ на

$$(3.8)\qquad 1 - c_1 R + imc_2 R^2.$$

Здесь $c_{1,2} \sim 1$ — положительные постоянные (например, $c_1 \approx 8/(3\pi)$, $c_2 \approx \pi/4$ для трубы с фланцем [8]); предполагается, что радиус трубы $R \ll 1$.

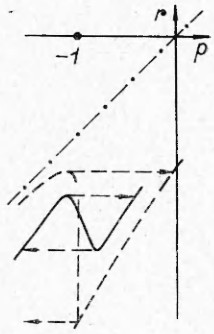
Учет поправки (3.8) приводит к замене (3.4), (3.6) на

$$r = (16/5\mu^2)(2\omega/\pi - 1 + c_1 R), \ f^3 + 3pf + 2q = \chi df/d\theta \quad (\chi = 48R^2 c_2/5\mu^2). \tag{3.9}$$

Эффекты излучения малы по сравнению с нелинейными при $\varkappa \ll 1$, что считается выполненным.

Рассмотрение поля направлений уравнения (3.9) показывает, что при $s = p + 1 \gg \chi$ периодическая кривая f близка к разрывной кривой на фиг. 3 (ширина «разрыва» $\sim \varkappa$). Интегральная кривая, выходящая из c и пересекающая прямую ab в точке θ, имеет наклон $f' = 2(\cos\theta - \cos\theta_a)/\chi \sim 1$; отсюда следует $\theta - \theta_a \sim \chi \ll \theta_a$. Пересечение при $\theta = 0$ и касание в точке b происходит при значениях $s \sim \chi$, когда разрывная периодическая кривая деформируется в кривую 2.

Расстройка $r(p)$ определяется из (3.7). На фиг. 4 качественно показана зависимость $r(p)$ при $\chi > 0$, при $\chi = +0$ и асимптота $r = p$ (сплошная, штриховая и штрихпунктирная линии соответственно). Расстояние между экстремумами кривых $\sim \chi$. Значения p, где $dr/dp < 0$, не реализуются; направления скачков $p(r)$ показаны стрелками. Кроме амплитуды, при скачках параметра p существенно меняется форма колебаний.



Фиг.

Проведенное рассмотрение единственным образом распространяется на случай негармонической формы $q(\theta)$. В частности, если q меняет знак в точке θ_0, то число разрывов $f(\theta, p, \chi = +0)$ в интервале $[\theta_0, \pi + \theta_0]$ равно числу содержащихся в $[\theta_0, \pi + \theta_0]$ интервалов, в которых $q^2 + p^3$ меняет знак, а q не меняет (например, для (2.16) это число равно нулю, единице или трем).

Поступила 24 II 1976

ЛИТЕРАТУРА

1. **Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.** Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М., Физматгиз, 1963.
2. **Зельдович Я. Б.** Теория ударных волн и введение в газодинамику. М., Изд-во АН СССР, 1946.
3. **Cruikshank D. B.** Experimental investigation of finite-amplitude acoustic oscillations in a closed tube.— «J. Acoust. Soc. Amer.», 1972, vol. 52, N 3, p. 1025.
4. **Зайцев А. А., Швилкин Б. Н.** Характер подвижных страт вблизи границы их исчезновения при уменьшении давления.— «Радиотехника и электроника», 1967, т. 12, вып. 4, с. 736.
5. **Пономаренко Ю. Б.** О «жестком» возникновении стационарных движений в гидродинамике.— ПММ, 1965, т. 29, вып. 2, с. 309.
6. **Betchov R.** Nonlinear oscillations of a column of gas.— «Phys. Fluids», 1958, vol. 1, N 3, p. 205.
7. **Chester W.** Resonant oscillations in closed tubes.— «J. Fluid Mech.», 1964, vol. 18, N 1, p. 44.
8. **Морз Ф.** Колебания и звук. М., ГИТТЛ, 1949.