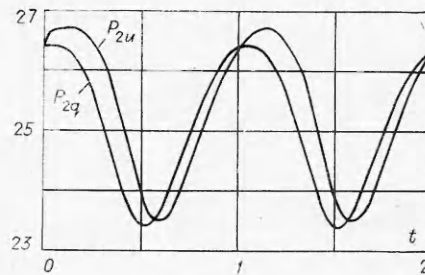


Ф и г. 4



Ф и г. 5

выясняется важность безразмерного параметра u/V_{1x} — аналога числа Струхала в данной задаче.

Автор выражает благодарность Д. Н. Горелову за обсуждение работы.

Поступила 8 VII 1975

ЛИТЕРАТУРА

1. Smith L. H. Wake dispersion in turbomachines.— «Transactions of the ASME», 1966, vol. 88, Ser. D, N 3. Рус. пер. Смит Л. Х. Рассеяние спутной струи в турбомашинах.— «Теор. основы инж. расчетов», 1966, т. 88, сер. Д, № 3.
2. Inumaru N. Interference between a wing and a surface of velocity discontinuity.— «Aeronautical Quarterly», 1973, vol. 24, N 3.
3. Giesing J. P. Nonlinear interaction of two lifting bodies in arbitrary unsteady motion.— «Transactions of the ASME», 1968, vol. 90, Ser. D, N 3. Рус. пер. Гизинг Дж. Нелинейное взаимодействие двух несущих тел в случае произвольного неустановившегося движения.— «Теор. основы инж. расчетов», 1968, т. 90, сер. Д, № 3.
4. Lienhart W. Berechnung der instationären Strömung durch gegeneinander bewegte Schaufelgitter und der Schaufelkraftschwankungen. VDI-Forschungsheft, Düsseldorf, VDI-Verlag, 1974, N 562.
5. Adachi T., Fukusada K., Takahashi N., Nakamoto Y. Study on the interference between moving and stationary blade rows in axial-flow blower.— «Bulletin of the JSME», 1974, vol. 17, N 109.
6. Горелов Д. Н., Куляев Р. Л. Нелинейная задача о нестационарном обтекании тонкого профиля несжимаемой жидкостью.— «Изв. АН СССР. МЖГ», 1971, № 6.

УДК 532.526

ПОГРАНИЧНЫЙ СЛОЙ НА ВРАЩАЮЩЕМСЯ ЦИЛИНДРЕ В ОСЕВОМ ПОТОКЕ

Г. В. Петров

(Новосибирск)

Полубесконечный полый цилиндр радиуса R вращается вокруг своей оси с угловой скоростью ω и обтекается со скоростью u_∞ однородным потоком несжимаемой жидкости. Течение считается ламинарным и осесимметричным. Для решения задачи используются переменные

$$(1) \quad s = \beta\xi; \quad \eta = (r^2 - R^2)/2\xi R^2;$$

$$\varphi = \psi/u_\infty \xi R^2; \quad w = w^*/\omega R; \quad p = (p^* - p_\infty)/\rho u_\infty^2,$$

где

$$(2) \quad \xi = \sqrt{vx/u_\infty}/R; \quad \beta = (\omega R/u_\infty)^2;$$

ξ и η аналогичны переменным, предложенным в работе [2] для случая невращающегося цилиндра; ψ — функция тока, определяемая соотношениями $u^* = \psi_r/r$; $v^* = -\psi_x/r$; x — расстояние от начала цилиндра вдоль образующей; r — расстояние до оси цилиндра; u^* , v^* , w^* — продольная, радиальная и окружная составляющие скорости; p^* — давление; p_∞ — давление в набегающем потоке; ρ — плотность жидкости; ν — кинематический коэффициент вязкости. Здесь и в дальнейшем независимая переменная, являющаяся подстрочным индексом, обозначает дифференцирование по ней. Для продольной составляющей скорости справедливо соотношение $u^*/u_\infty = u = \varphi_\eta$.

В уравнениях динамики отбрасываются члены порядка $(\text{Re}^x)^{-1} = \nu/u_\infty x$, т. е. используется приближение пограничного слоя

$$(3) \quad \begin{aligned} 2(\sigma\varphi_{\eta\eta})_\eta + \varphi\varphi_{\eta\eta} + \eta p_\eta - sp_s &= s(\varphi_\eta\varphi_{\eta s} - \varphi_s\varphi_{\eta\eta}); \\ 2(\sigma w_\eta)_\eta + \varphi w_\eta + (\xi/\sigma)(\varphi - \eta\varphi_\eta + s\varphi_s - 2\xi)w &= s(\varphi_\eta w_s - \varphi_s w_\eta), \\ p_\eta &= sw^2/\sigma, \quad \sigma = 1 + 2\xi\eta. \end{aligned}$$

Исследуется обтекание внешней поверхности, граничные условия имеют вид

$$(4) \quad \begin{aligned} \varphi_\eta = \varphi = 0, \quad w = 1 \quad \text{при} \quad \eta = 0; \\ \varphi_\eta = 0, \quad w = p = 0 \quad \text{при} \quad \eta \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Особый интерес представляет случай, когда отношение толщины пограничного слоя к радиусу цилиндра мало, т. е. $\xi \ll 1$. В уравнениях (3) возможен предельный переход при $\xi \rightarrow 0$ (или при $\beta \rightarrow \infty$)

$$(5) \quad \begin{aligned} 2\varphi_{\eta\eta} + \varphi\varphi_{\eta\eta} + \eta p_\eta - sp_s &= s(\varphi_\eta\varphi_{\eta s} - \varphi_s\varphi_{\eta\eta}); \\ 2w_{\eta\eta} + \varphi w_\eta &= s(\varphi_\eta w_s - \varphi_s w_\eta), \quad p_\eta = sw^2. \end{aligned}$$

В другом случае малых скоростей вращения ($\beta \ll 1$) целесообразно использовать переменные ξ вместо s и p/β вместо p , что позволяет осуществить предельный переход при $\beta \rightarrow 0$; тогда первое уравнение системы (3) становится независимым и с граничными условиями для φ из (4) определяет задачу осевого обтекания невращающегося цилиндра.

Задача (3), (4) допускает представление решения в виде степенных функциональных рядов, расположенных по степеням ξ или s . Главная часть разложения по s определяется функцией Блазиуса $\Phi(\eta)$

$$\varphi^{(0)} = \Phi; \quad w^{(0)} = 1 - \Phi_\eta; \quad p^{(1)} = \int_0^\eta (1 - \Phi_\eta)^2 d\eta,$$

причем $\varphi^{(0)}(\eta)$ и $w^{(0)}(\eta)$ представляют собой решение (полученное Хоуартом [3]), не учитывающее центробежные силы и поперечную кривизну поверхности цилиндра. Остальные члены зависят от параметра β и в предельном случае тонкого пограничного слоя (5) вычислены до шестого порядка включительно. В таблице даны значения величин, определяющих продольный и окружной коэффициенты трения и давление на поверхности цилиндра. Можно видеть, что при значениях $s \geq 0,2$ результаты для

разных приближений будут расходиться, поэтому здесь приводится только $u^{(1)}(\eta)$ (штрихпунктирная кривая на фиг. 1); видно, что при увеличении скорости вращения профиль продольной скорости наполняется. Это объясняется тем, что в пограничном слое появляется отрицательная составляющая градиента давления в направлении Ox , определяемая функций $p^{(1)}(\eta)$ (фиг. 2). В работе [2] использован ряд по степеням ξ для анализа влияния поперечной кривизны в случае невращающегося цилиндра. Полученные с его помощью численные результаты также пригодны лишь для небольших значений ξ ($\xi \leq 0,5$).

Замена переменных

$$(6) \quad t = (\nu x / \omega R^3)^{2/5}; \quad \zeta = (r^2 - R^2) / 2tR^2;$$

$$\psi = \omega R^3 t^{3/2} f; \quad w^* = \omega RW; \quad p^{**} = p_\infty + \rho \omega^2 R^2 t P$$

при больших окружных числах Рейнольдса $Re^\omega = \omega R^2 / \nu$ приводит определяющую систему уравнений к виду

$$5(\sigma f_{\zeta\zeta})_\zeta + 3ff_{\zeta\zeta} - f_\zeta^2 + 2(\zeta P_\zeta - P) = 2t(f_\zeta f_{\zeta t} - f_t f_{\zeta\zeta} + P_t);$$

$$5(\sigma W_\zeta)_\zeta + 3fW_\zeta + (t/\sigma)(3f + 2t f_t - 2\zeta f_\zeta - 5t)W = 2t(f_\zeta W_t - f_t W_\zeta),$$

$$P_\zeta = W^2/\sigma, \quad \text{где } \sigma = 1 + 2t\zeta.$$

Такая замена, поскольку в ней не используется как параметр скорость набегающего потока, применима для решения задачи вращающегося полубесконечного цилиндра в покоящейся жидкости; при этом требуется выполнение граничных условий

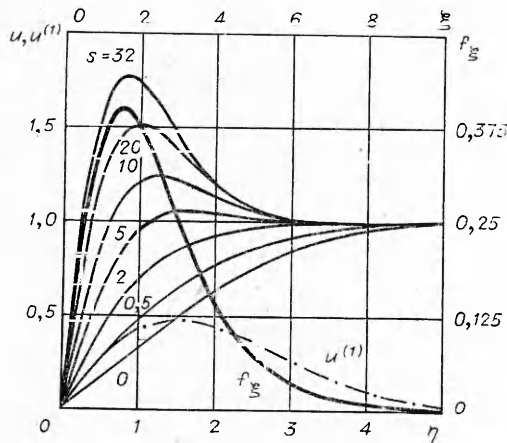
$$(7) \quad f_\zeta = f = 0, \quad W = 1 \quad \text{при } \zeta = 0;$$

$$f_\zeta = W = P = 0 \quad \text{при } \zeta \rightarrow \infty.$$

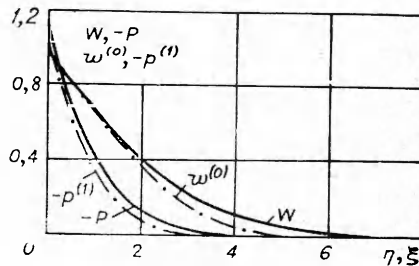
При малых t решение можно искать в виде рядов по степеням t . Главная часть разложения определяется уравнениями

$$(8) \quad 5f_{\zeta\zeta\zeta} + 3ff_{\zeta\zeta} - f_\zeta^2 + 2(\zeta P_\zeta - P) = 0;$$

$$5W_{\zeta\zeta} + 3fW_\zeta = 0; \quad P_\zeta = W^2.$$



Фиг. 1



Фиг. 2

Система (8) с граничными условиями (7) решалась численно методом квазилинеаризации [4]. Линейные краевые задачи так же, как и в предыдущем случае малых s , сводились к задаче Коши для фундаментальных решений, которые интегрировались методом Рунге — Кутты. Результаты представлены на фиг. 1, 2 и дополняются константами $f_{\xi_0} = 0,5834$; $W_{\xi_0} = -0,3178$; $P_0 = -1,1505$; индекс 0 определяет значение на поверхности цилиндра. Полностью задача вращающегося в неподвижной жидкости полубесконечного цилиндра в данной работе не решалась. Однако полученные результаты показывают, что при $Re^\omega \gg 1$ в области передней кромки цилиндра образуется пограничный слой, толщина которого нарастает, как $x^{2/5}$, профиль окружной скорости незначительно отличается по форме от профиля Блазиуса (см. фиг. 2), и, главное, в нем имеется продольная составляющая скорости (жирная кривая на фиг. 1), максимальное значение которой растет, как $x^{1/5}$.

Возвращаясь к первоначально поставленной задаче, можно показать, что полученное решение задачи (8), (7) пригодно и здесь в случае больших скоростей вращения ($s \rightarrow \infty$, $\xi = \text{const}$). Связь переменных (6) с принятыми ранее переменными (1) осуществляется соотношениями

$$\xi = s^{1/5}\eta; \quad \varphi = s^{1/5}f; \quad p = s^{4/5}P; \quad w = W.$$

Невыполнение условия $\varphi_\eta = 1$ при $\eta \rightarrow \infty$ не является существенным, поскольку течение в основном определяется пристенной частью пограничного слоя. Очевидно, что максимальная величина продольной составляющей скорости в любом наперед заданном сечении пограничного слоя при достаточно большой ω начинает превосходить скорость набегающего потока и при дальнейшем увеличении скорости вращения неограниченно возрастает, как $\omega^{4/5}$. Коэффициент давления нарастает по абсолютной величине, как $\omega^{8/5}$, т. е. еще быстрее.

Система (3) имеет частное решение, удовлетворяющее граничным условиям (4), но не удовлетворяющее условию однородности набегающего потока,

$$(9) \quad w = 1/\sqrt{1 + 2\xi\eta} = R/r; \quad p = -\beta/[2(1 + 2\xi\eta)] = -(\beta/2)(R/r)^2;$$

$$(10) \quad \varphi = \varphi^0,$$

где φ^0 является решением задачи обтекания невращающегося полубесконечного цилиндра, а соотношения (9) определяют течение вокруг бесконечного вращающегося цилиндра. Данное частное решение является асимптотическим для поставленной здесь задачи при $\xi \rightarrow \infty$ и $\beta = \text{const}$. Таким образом, течение на достаточно большом расстоянии от передней кромки можно считать суперпозицией двух независимых течений: окружного (9) и продольного (10).

Асимптотическое поведение φ^0 при $\xi \rightarrow \infty$ впервые исследовано в работе [5]. Определяемое решением [5] напряжение трения на поверхности убывает, как $(\ln x)^{-1}$, а профили скорости монотонны. Последнее обстоятельство в задаче с вращением объясняется отсутствием продольного градиента давления и позволяет сделать следующий вывод. Если при заданной β в пограничном слое имеется область, где продольная составляющая скорости превышает скорость набегающего потока, то эта область ограничена по x и продольная скорость в ней достигает своего наибольшего значения.

Для численного решения задачи (2), (4) строилась двухслойная разностная схема с неявной аппроксимацией производных по s ($a_s = [a(s) - a(s - \Delta s)]/\Delta s$) и квазилинеаризацией. Метод решения задачи для си-

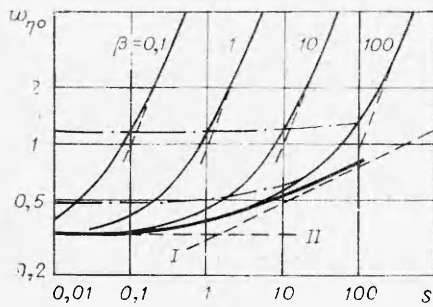
стемы обыкновенных линейных дифференциальных уравнений представляет собой распространение на случай системы большого порядка (в данном случае шестого) метода, описанного в работе [6].

На фиг. 1 представлены распределения продольной составляющей скорости для случая тонкого пограничного слоя (5) в диапазоне изменения s от 0 до 32. Видно, что при увеличении скорости вращения профили все больше наполняются, при $s > 4$ продольная скорость в некоторой области внутри пограничного слоя превышает скорость набегающего потока. Масштаб ξ и \bar{r}_ξ выбран так, чтобы можно было сравнить асимптотический профиль скорости с профилем скорости при $s = 32$. Хотя количественное согласование (как и следовало ожидать) наблюдается лишь в пристенной части, а величины максимумов различаются более чем на 10%, общая тенденция и уменьшение расхождения при дальнейшем нарастании s (расчет производился до $s = 100$) указывают на то, что асимптотическое решение при бесконечно больших скоростях вращения было найдено правильно. Этот вывод подтверждают результаты для окружной скорости и давления. Формы профилей этих величин с изменением s меняются незначительно и являются промежуточными для предельных при $s = 0$ и $s \rightarrow \infty$, представленных на фиг. 2. Жирная кривая на фиг. 3, изображающая поведение производной окружной скорости на поверхности цилиндра при $\xi = 0$, отклоняется от прямой линии II, определяемой постоянным значением $-w_{\eta_0} = 0,332$ при $s = 0$, и асимптотически приближается к зависимости $-w_{\eta_0} = 0,318 \cdot s^{1/3}$, которая в логарифмической сетке изображается прямой I.

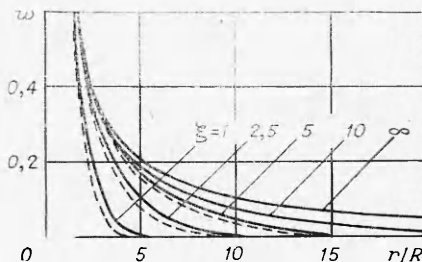
Штрихпунктирные кривые на фиг. 3 определяют зависимость w_{η_0} от скорости вращения в достаточно удаленном сечении пограничного слоя, где толщину пограничного слоя нельзя считать бесконечно малой. Верхней кривой соответствует $\xi = 1$, нижней $\xi = 0,2$. Видно, что сходимость решений системы (3) к решению системы (5) при $\xi \rightarrow 0$ равномерна (при $\beta \rightarrow \infty$ сходимость не является равномерной).

Сплошные кривые, определяющие зависимость w_{η_0} от x при различных скоростях вращения, начинают отклоняться от предельной кривой, затем приближаются, а при $\xi \approx 5$ практически сливаются со штриховыми прямыми $-w_{\eta_0} = s/\beta$, указывая на то, что соотношения (9) действительно являются асимптотическими при $\xi \rightarrow \infty$ и $\beta = \text{const}$. Более прямое подтверждение дает фиг. 4, где показана сходимость профилей окружной скорости к гиперболе $w = R/r$ при удалении от передней кромки цилиндра. Штриховые линии соответствуют $\beta = 100$, сплошные $\beta \leq 10$; сходимость наблюдается при любых β .

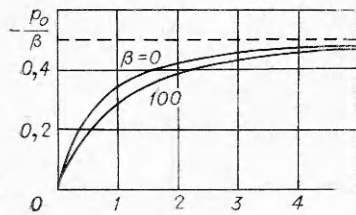
Приведенное на фиг. 5 распределение давления вдоль образующей цилиндра показывает, что оно монотонно уменьшается, нигде, однако,



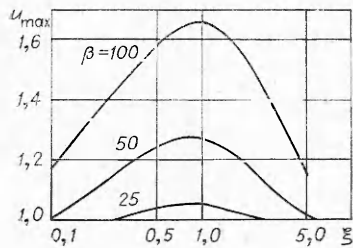
Ф и г. 3



Ф и г. 4



Фиг. 5



Фиг. 6

не становясь меньше своего асимптотического значения $p^* = p_\infty - \rho\omega^2 R^2/2$, которое соответствует давлению на поверхности вращающегося бесконечного цилиндра.

Поведение профилей продольной составляющей скорости при возрастании s и конечных ξ в общем аналогично их поведению в случае тонкого пограничного слоя. Отличие заключается в более замедленном наполнении профилей при относительно малых скоростях вращения. Результаты для $\beta = 0,1$ не более чем на 1% отличаются от результатов численного решения задачи для невращающегося цилиндра [7], а для $\beta = 0,01$ — полностью совпадают с последними. При $\beta \geq 20$ существует область, где продольная составляющая скорости превышает скорость набегающего потока; ограниченность этой области по x подтверждается фиг. 6, где также показано, что u достигает в пограничном слое своего

наибольшего значения при $\xi \approx 1$. В случае $\beta \leq 15$ профили u монотонны, при этом степень влияния вращения на поле продольной скорости может определяться максимальным значением разности величин продольных скоростей для вращающегося и невращающегося цилиндра в каждом заданном сечении пограничного слоя; оказывается, эта величина сначала возрастает (по мере удаления от передней кромки цилиндра), затем уменьшается, приобретая наибольшее значение при $\xi \leq 1$.

Поступила 16 IX 1975

ЛИТЕРАТУРА

1. Филиппов Г. В., Шахов В. Г. Влияние поперечного градиента давления на параметры турбулентного пограничного слоя. — Изв. высш. учебн. заведений. Авиац. техника, 1969, № 3.
2. Seban R. A., Bond R. Skin-friction and heat transfer characteristics of a laminar boundary layer on a cylinder in axial incompressible flow. — J. Aero. Sci., vol. 18, N 10, 1951.
3. Howarth L. Note on the boundary layer on a rotating sphere. — Phil. Mag., 1951, vol. 42, N 334.
4. Bellman R. E., Kalaba R. E. Quasilinearization and nonlinear boundary value problems. N. Y., Elsevier Publ. Co., 1965. Рус. пер. Квазилинеаризация и нелинейные краевые задачи. М., «Мир», 1968.
5. Glauert M. R., Lighthill M. J. The axisymmetric boundary layer on a long thin cylinder. — Proc. Roy. Soc., 1955, vol. A 230.
6. Петухов И. Р. Численный расчет двумерных течений в пограничном слое. — В кн.: Численные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений и квадратурные формулы. М., «Наука», 1964.
7. Jaffe N. A., Okamura T. T. The transverse curvature effect on the incompressible laminar boundary layer for longitudinal flow over a cylinder. — ZAMP, 1968, vol. 19, N 4.