

В. И. Шалаев

ПОГРАНИЧНЫЙ СЛОЙ НА ТОНКИХ КРЫЛЬЯХ
МАЛОГО УДЛИНЕНИЯ

Проведен асимптотический анализ уравнений течения при больших числах Рейнольдса около тонких крыльев малого удлинения. Построено регулярное решение задачи безвихревого обтекания, справедливое с точностью до величин, линейных по малым параметрам — углу атаки и толщине крыла. Показано, что трехмерная задача пограничного слоя в этом случае сводится к совокупности двумерных задач. Выведены необходимые уравнения, и проведен их анализ. В сравнении с экспериментальными данными представлены результаты расчетов ламинарного и турбулентного пограничных слоев на треугольном крыле. Исследованы некоторые особенности течения на крыле с изломом передней кромки с учетом двух приближений по числу Рейнольдса. Приведены основные соотношения и примеры расчетов для треугольного крыла.

1. Пусть крыло толщины δ_0 , длины b_0 , размаха $2l_0$ установлено под малым углом атаки α в однородном потоке газа с плотностью ρ_∞ , давлением p_∞ , энтальпией h_∞ , скоростью u_∞ , вязкостью μ_∞ , теплопроводностью k_∞ , числом Маха M , числом Рейнольдса $Re = \rho_\infty u_\infty b_0 / \mu_\infty$, числом Прандтля Pr . Поверхность крыла в декартовой системе координат XYZ (рис. 1) зададим уравнением $Y = \tau F(X, Z)$. Координаты Y и Z в плоскости поперечного сечения отнесены к l_0 , X — к b_0 . Предполагая, что

$$\lambda = l_0/b_0 \ll 1, \delta = \delta_0/b_0 \ll 1, \tau = \delta/\lambda \ll 1, \varepsilon = \alpha/\lambda \ll 1, \lambda Re \gg 1,$$

решение уравнений течения будем искать в рамках приближения Прандтля (отдельно во внешней области невязкого течения и в пограничном слое) с помощью метода возмущений. При данных ограничениях течение во внешней области описывается теорией тонкого тела [1]. Недостаток этого решения — наличие особенности в окрестности кромок крыла. Для получения регулярного решения в настоящей работе используется метод [2, 3], основанный на построении локального решения вблизи кромок, которое сращивается с решением теории тонкого тела. Все соотношения для внешней области имеют аналитическую форму, что значительно облегчает анализ.

Решение уравнений пограничного слоя также находится с помощью метода сращиваемых асимптотических разложений [4, 5]. На основной части поверхности крыла трехмерная в целом задача сводится к последовательности двумерных в результате введения дополнительной неизвестной. В окрестности передних кромок течение описывается уравнениями для скользящего крыла [6].

Рассмотренная методика позволяет получить решение уравнений течения в следующем по числу Рейнольдса приближении. Некоторые особенности этой задачи изучены для ламинарного пограничного слоя на крыле с изломом передней кромки.

В рамках теории тонкого тела течение около крыла описывается потенциалом Φ' , который можно представить в виде [1]

$$(1.1) \quad \Phi' = b_0 u_\infty \{X + \lambda^2 [\varphi(Y, Z; X, \tau, \varepsilon) + \varphi_0(X, \tau)] + O(\lambda^4 \ln^2 \lambda)\},$$

$$\varphi_0 = -\frac{1}{2\pi} \frac{d}{dX} \begin{cases} \int_0^x S_\xi(\xi) \ln \frac{2(X-\xi)}{\omega} d\xi, & M > 1, \\ \int_0^1 S_\xi(\xi) \ln \frac{2|X-\xi|}{\omega} d\xi, & M < 1, \end{cases}$$

где $\omega = |M^2 - 1|^{1/2}$; $S(X) = 2\tau \int_{-l}^l A(X, Z) dZ$ — площадь поперечного сечения крыла; $2A = F_1 + F_2$; F_1 и F_2 — ветви двузначной функции

$F(X, Z)$, соответствующие верхней и нижней поверхностям крыла. Крыло будем считать симметричным относительно плоскости $Z = 0$. Уравнения $Z = l(X)$, $Y = \tau C(X, l)$ задают положение передней кромки крыла, а $Y = \tau C(X, Z) = \tau(F_1 - F_2)/2$ — положение срединной поверхности. Потенциал возмущений φ находится как решение двумерного уравнения Лапласа в плоскости YZ с линеаризованным граничным условием непротекания [1]. Параметры течения запишем в форме

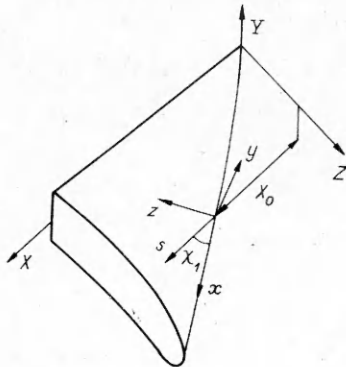
$$(1.2) \quad \varphi_e = \pm \varepsilon(l^2 - Z^2)^{1/2} + \frac{2\tau}{\pi} \int_{-l}^l C_X(X, \zeta) \ln \frac{\sqrt{(l-Z)(l+\zeta)} + \sqrt{(l+Z)(l-\zeta)}}{\sqrt{2l|Z-\zeta|}} d\zeta + \\ + \frac{\tau}{\pi} \int_{-l}^l A_X(X, \zeta) \ln |Z - \zeta| d\zeta + O[(\varepsilon + \tau)^2], \\ w_e = \pm (l^2 - Z^2)^{-1/2} \left[-\varepsilon Z + \frac{\tau}{\pi} \int_{-l}^l C_X \frac{\sqrt{l^2 - \zeta^2}}{\zeta - Z} d\zeta \right] + \frac{\tau}{\pi} \int_{-l}^l \frac{A_X d\zeta}{|\zeta - Z|} + \\ + O[(\varepsilon + \tau)^2], \quad u_e = 1 + \lambda^2(\varphi_{eX} + \varphi_{0X}) = 1 - \lambda^2 p + O(\lambda^4 \ln^2 \lambda), \\ v_e = \tau(C_X \pm A_X) + O[(\varepsilon + \tau)^2].$$

Здесь и ниже индексом e обозначены функции невязкого течения на поверхности крыла, верхний знак относится к верхней, нижний — к нижней сторонам поверхности, проекция вектора скорости u_e на ось X отнесена к u_∞ , проекции вектора скорости v_e и w_e на оси Y и Z — к λu_∞ , возмущения давления p — к $\lambda \rho_\infty u_\infty^2$. Первые слагаемые в выражениях для потенциала φ_e и скорости w_e отвечают обтеканию пластины, вторые обусловлены кривизной срединной поверхности, третьи связаны с наличием толщины. Решение (1.2) имеет особенность на передней кромке, течение в окрестности которой рассмотрим отдельно.

Свяжем с кромкой $Z = l$ систему ортогональных криволинейных координат xuz (рис. 1), где x измеряется вдоль кромки, y — по нормали к срединной поверхности, z — по касательной к срединной поверхности перпендикулярно кромке, y и z отнесены к l_0 , x — к b_0 . В пределах применимости теории тонкого тела угол χ_1 наклона кромки относительно оси X мал: $\chi_1 = \lambda\beta = \lambda\lambda_x + O(\lambda^2) \ll 1$, углы наклона срединной поверхности относительно плоскости $Y = 0$ также малы. Поэтому отнесенные к u_∞ составляющие вектора скорости вдоль кромки $U_\infty = \cos \chi_1 = 1 + O(\lambda^2)$ и в перпендикулярном ей направлении $W_\infty = \sin \chi_1 = \lambda\beta + O(\lambda^3)$.

Для затупленной кромки характерным размером особой области является отнесенный к l_0 радиус кривизны $r_0(x) \ll 1$ носка профиля сечения крыла плоскостью, ортогональной кромке. В этой области поверхность крыла с точностью до малых высшего порядка относительно r_0 аппроксимируется параболической поверхностью $y = (2r_0 z)^{1/2} = r_0 \sigma$ (σ — параболическая координата, $z = l - Z + O(\lambda^2)$). Производные от функций течения в плоскости yz имеют порядок $O(r_0^{-1}) \gg 1$, а вдоль кромки $O(1)$. Поэтому течение в области $z = O(r_0)$ описывается нелинейным двумерным уравнением потенциала в плоскости yz . Координата x входит только в граничные условия как параметр, условие непротекания удовлетворяется на параболической поверхности. При $M\lambda \ll 1$ задачу можно линеаризовать и ее решение примет вид [2, 7]

$$(1.3) \quad U_e = U_0(x), \quad W_e = W_0(x) \frac{\sigma - \sigma_0}{H_1}, \\ H_1 = (1 + \sigma^2)^{1/2}.$$



Р и с. 1

Здесь W_e — отнесенная к λu_∞ проекция вектора скорости на параболический профиль крыла в плоскости, ортогональной кромке; U_e — скорость вдоль кромки, отнесенная к u_∞ . Функции U_0 , W_0 и положение линии растекания $\sigma_0(x)$ находятся из условий сращивания решений (1.2) и (1.3). Устремляя в соотношениях (1.2) $z = l - Z$ к 0 и используя формулы преобразования от координат X, Y, Z к координатам x, y, z , получим

$$(1.4) \quad U_e = u_e \cos \chi_1 + \lambda w_e \sin \chi_1 = 1 + O(\lambda^2),$$

$$\lambda W_e = u_e \sin \chi_1 - \lambda w_e \cos \chi_1 = \lambda \left[\beta + \tau I_1 - \sqrt{\frac{l}{r_0} \frac{\varepsilon + \tau I_2}{\sigma}} \right] + O(\lambda^3),$$

где

$$(1.5) \quad I_1 = \frac{2}{\pi} \int_0^l \frac{A_X d\zeta}{l^2 - \zeta^2}, \quad I_2 = \frac{2}{\pi} \int_0^l \frac{C_X d\zeta}{\sqrt{l^2 - \zeta^2}}.$$

Сравнивая выражения (1.3) и (1.4) при $\sigma \rightarrow \infty$, находим

$$(1.6) \quad U_0 = 1, \quad W_0 = \beta + \tau I_1, \quad \sigma_0 = - \sqrt{\frac{l}{r_0} (\varepsilon + \tau I_2)}.$$

Для острой кромки также можно построить регулярное решение, если $\varepsilon + \tau I_2 = 0$. Тогда локальное решение в экспоненциально малой окрестности кромки находится как решение задачи для скользящего клина $y = \pm \psi_0 z$ ($\psi_0(x)$ — половина угла раствора кромки) и имеет вид

$$(1.7) \quad U_e = 1, \quad W_e = W_0 z^j, \quad j = \psi_0 / (\pi - \psi_0).$$

Эффективная скорость обтекания $W_0(x)$ определяется из условия сращивания с решением (1.2) так же, как в случае профиля [3].

2. Решение уравнений пограничного слоя на основной части поверхности крыла, где справедливы соотношения (1.2), будем искать в виде асимптотических рядов

$$(2.1) \quad u = u_0(s, n) + \varepsilon u_{10}(s, n, Z) + \tau u_{11}(s, n, Z) + \dots,$$

$$w = \varepsilon w_{10} + \tau w_{11} + \dots,$$

$$h = h_0 + \varepsilon h_{10} + \tau h_{11} + \dots, \quad \rho = \rho_0 + \varepsilon \rho_{10} + \tau \rho_{11} + \dots,$$

$$\mu = \mu_0 + \varepsilon \mu_{10} + \tau \mu_{11} + \dots, \quad k = k_0 + \varepsilon k_{10} + \tau k_{11} + \dots$$

Здесь $s = X - X_0$; $X_0(Z)$ — расстояние от плоскости $X = 0$ до передней кромки; n — отнесенная к $b_0 \text{Re}^{-1/2}$ нормаль к поверхности крыла; u — проекция вектора скорости на профиль сечения крыла плоскостью $Z = \text{const}$; w — проекция вектора скорости на ортогональное этому профилю на поверхности крыла направление; v — нормальная к поверхности скорость; u отнесена к u_∞ , w — к λu_∞ , v — к $u_\infty \text{Re}^{-1/2}$, а ρ , h , μ , k — к своим значениям в невозмущенном потоке. Отметим, что в пограничном слое поперечная скорость того же порядка, а возмущения остальных функций течения в $O(\lambda^{-2})$ раз больше своих значений в безвихревом потоке.

Нулевое приближение разложения (2.1) соответствует обтеканию пластины и не зависит от поперечной координаты. Функции первого приближения подчиняются линейной системе уравнений, подобной той, что получена для крыла конечного размаха [4, 5]. Объединяющее два приближения (2.1) составное решение удовлетворяет системе уравнений

$$(2.2) \quad (\rho u)_s + (\rho v)_n - \rho w_s X_{0z} + \rho q = 0, \quad \rho h = 1,$$

$$\rho [(u - w X_{0z}) u_s + v u_n] = (\mu u_n)_n,$$

$$\rho [(u - w X_{0z}) h_s + v h_n] - (\gamma - 1) M^2 \mu u_n^2 = \left(\frac{k}{\Gamma} h_n \right)_n,$$

$$\rho (u w_s + v w_n) + p_z - X_{0z} p_s = (\mu w_n)_n,$$

$$\rho (u q_s + v q_n) + (p_z - X_{0z} p_s)_z = (\mu q_n)_n,$$

$$n = 0: u = v = w = q = h_n = 0; \quad n = \infty: u = h = 1, \quad w = w_e, \quad q = q_e$$

(γ — показатель адиабаты, индексы s, n, Z обозначают дифференцирование по соответствующим переменным). Задача первого приближения и для составного решения сводится к двумерной в результате введения новой зависимой переменной $q(s, n, Z) = \partial w / \partial Z$, которая является, по существу, дополнительным интегралом течения. Координата Z входит в уравнения (2.2) в качестве параметра, из геометрических характеристик поверхности уравнения содержат только угол стреловидности передней кромки χ такой, что $X_{0Z} = \lambda \operatorname{tg} \chi = \lambda \operatorname{ctg} \chi_1 = 1/\beta$. С погрешностью $O((\varepsilon + \tau)^2)$ проекции вектора скорости u, v, w на оси криволинейных координат совпадают с проекциями на оси декартовых координат X, Y, Z . В отличие от крыла конечного размаха [4, 5] в уравнениях (2.2) отсутствует продольный градиент давления, имеющий порядок $O(\lambda^2)$, и возмущения течения обусловлены исключительно пространственными эффектами.

Разложения (2.1) и уравнения (2.2) не применимы в окрестности затупленных передних кромок крыла. Используя обычную процедуру построения локального асимптотического решения [3], можно показать, что в области размером $O(r_0)$ вблизи кромки с погрешностью $O(r_0)$ течение описывается уравнениями

$$(2.3) \quad (\rho W)_\sigma + H_1(\rho V)_N = 0, \quad \rho(WH_1^{-1}U_\sigma + VU_N) = (\mu U_N)_N, \\ \rho(WH_1^{-1}W_\sigma + VW_N) - H_1^{-1}W_e W_{e\sigma} = (\mu W_N)_N, \quad \rho(WH_1^{-1}h_\sigma + Vh_N) - \\ - (\gamma - 1)M^2\mu U_N^2 = \left(\frac{k}{Pr}h_N\right)_N,$$

$$N = 0: U = V = W = h_N = 0; \quad N = \infty: U = h = 1, \quad W = W_e,$$

где $N = n/\sqrt{r_0}$; $V = v\sqrt{r_0}$; U и W — отнесенные к u_∞ и λu_∞ соответственно скорости вдоль кромки и по касательной к параболическому профилю сечения крыла плоскостью, ортогональной кромке. Заметим, что поперечная скорость не входит ни в диссипативную функцию уравнений энергии (2.2) и (2.3), ни в соотношения для турбулентной вязкости μ_t . Так, в случае градиентных моделей $\mu_t = d(U_N^2 + \lambda^2 W_N^2)^{1/2} = dU_N + O(\lambda^2)$ (или $\mu_t = d_1 u_n + O(\lambda^2)$ на основной части поверхности). Это свойство отличает (2.3) от обычных уравнений теории скользящего крыла [6].

Решение задачи пограничного слоя начинается с линии растекания $\sigma = \sigma_0(x)$, где $W_e = 0$, а уравнения (2.3) сводятся к автомодельным. Течение может быть как ламинарным, так и турбулентным, начиная с линии растекания. Положение перехода задано или вычислено с помощью полуэмпирических соотношений.

Уравнения пограничного слоя обладают свойством параболичности, и поэтому условия сращивания решений (2.2) и (2.3) являются начальными для уравнений (2.2). Их удобно сформулировать, используя принцип сращивания С. Каплуна [3]. Оба решения существуют в промежуточной области $r_0 \ll z = r_0 \sigma^2 / 2 = s_1^2 \ll 1$ и подчиняются одинаковым уравнениям для тонкого скользящего крыла, которые следуют из (2.3) при $\sigma \rightarrow \infty$ или из (2.2) при $s \rightarrow 0$. Условия сращивания для любой точки $s_1 = r_0 \sigma_1^2 / 2\beta$ из промежуточной области имеют вид

$$(2.4) \quad u(s_1, n, Z) = U(\sigma_1, N, x), \quad h(s_1, n, Z) = h(\sigma_1, N, x), \\ w(s_1, n, Z) = [W - \beta U]_{\sigma=\sigma_1}, \quad q(s_1, n, Z) = -[W_\sigma - \beta U_\sigma]_{\sigma=\sigma_1} / (r_0 \sigma).$$

В случае острой кромки постановка начальных условий для (2.2) сводится к решению известной автомодельной задачи ламинарного обтекания скользящего клина и к преобразованию, подобному (2.4), от одной системы координат к другой.

В качестве иллюстрации полученных результатов на рис. 2 представлены распределения продольного коэффициента трения c_{fx} в сечении $Z = 0,05$ верхней поверхности треугольного крыла с острыми передними кромками, углом стреловидности $\chi = 71,565^\circ$, удлинением $\lambda = 1/3$, толщиной $\delta = 0,0843$ ($\tau = 0,253$) при $M = 1,5$, $Re = 10^7$, углах атаки $\alpha = 2$

д 4° (кривые 1 и 2 для $\varepsilon = 0,105; 0,21$). По оси абсцисс отложено $\bar{X} = s/b(Z)$, где $b = 1 - Z$ — относительная величина хорды сечения $Z = \text{const}$. В расчетах использовались модель турбулентной вязкости Сибиси — Смита и методика работы [8]. Около кромки крыла имелись участки ламинарного течения (рис. 2, $\alpha = 2^\circ$, $\bar{X} \leq 0,15$), положение перехода задавалось из эксперимента [9]. Составляющие вектора скорости на внешней границе пограничного слоя вычислялись на основе линейных уравнений теории тонкого крыла при известном экспериментальном распределении давления [9]. Для сглаживания экспериментальных данных и вычисления производных давления использовались сплайны. Метод полос (штрихпунктирные линии), в котором вдоль каждого сечения решаются уравнения плоского пограничного слоя, не приводит к существенному отличию результатов от нулевого приближения (штриховые линии), в то время как составное решение (сплошные кривые) качественно хорошо согласуется с экспериментальными данными [9] (кружочки), хотя параметры возмущений в данной задаче относительно велики. Это подтверждает сделанный выше вывод о влиянии пространственных эффектов.

3. В качестве другого примера рассмотрим задачу ламинарного обтекания теплоизолированного тонкого крыла с изломом передней кромки с учетом второго приближения по числу Рейнольдса при $\text{Pr} = 1$, $\alpha = 0$. Крыло представляет собой пластину, составленную из двух треугольников так, что угол при вершине крыла $2\chi_0 = 2\lambda\beta_0$, а в точке излома ($X_1, 0, \pm Z_1$) угол между осью X и кромкой изменяется до $\chi_1 = \lambda\beta_1$; заметим, что вершина крыла также есть точка излома передней кромки. Координата s задается соотношениями

$$s = \begin{cases} |X - |Z||\beta_0, & |Z| < Z_1, \\ |X - X_1 - (|Z| - Z_1)|\beta_1, & |Z| > Z_1. \end{cases}$$

В этой задаче параметром разложения является $\tau_1 = \text{Re}^{-1/2}/\lambda$, а нулевое приближение описывается автомодельным решением

$$(3.1) \quad u_0 = f'_0(\eta), \quad h = t'_0(\eta), \quad n = \sqrt{s} \int_0^\eta h_0 d\eta = \sqrt{s} t_0(\eta)$$

(f_0 и t_0 — функция тока и первообразная энтальпии, штрихи обозначают дифференцирование по η). Плоскости $Z = 0, \pm Z_1$ для этого решения — поверхности слабого разрыва, так как

$$u_{0z} = -\frac{ns^{-3/2}}{2h_0} f_0'' \begin{cases} 1/\beta_0, & Z = +0 \\ -1/\beta_0, & Z = -0 \end{cases} = -\frac{ns^{-3/2}}{2h_0} f_0'' \begin{cases} 1/\beta_0, & Z = Z_1 - 0, \\ 1/\beta_1, & Z = Z_1 + 0. \end{cases}$$

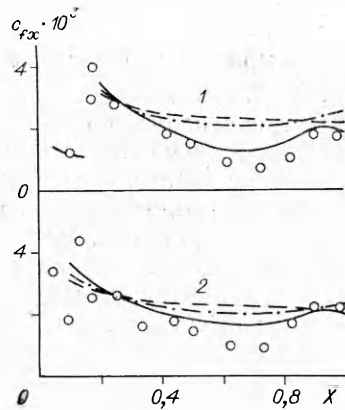
Такие же разрывы имеют энтальпия и толщина вытеснения $\delta^* = as^{1/2}$ ($a = \text{Re}^{-1/2} (1,721 + 1,192(\gamma - 1)M^2)$ при $\text{Pr} = 1$ [10]).

Возмущения, вносимые в потенциальный поток пограничным слоем такого крыла, определяются соотношениями (1.2), в которых следует положить $\varepsilon = C = 0$, $A = s^{1/2}$, $\tau = a/\lambda$. Для треугольного крыла ($\beta_0 = \beta_1 = 1$) получим

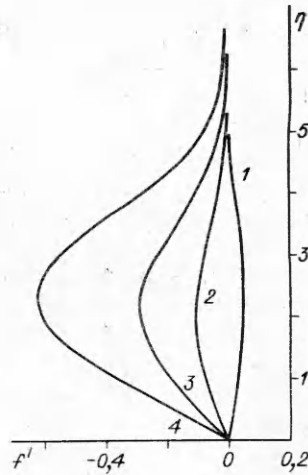
$$(3.2) \quad \Phi_e = \varphi_e + \varphi_0 = \frac{2\pi}{\lambda} \sqrt{\bar{X}} \left[Q(\zeta) + \ln \frac{M}{5} + \begin{cases} 0, & M > 1 \\ \frac{1}{2} \ln \frac{1 + \sqrt{\bar{X}}}{1 - \sqrt{\bar{X}}} - \frac{1}{\sqrt{\bar{X}}}, & M < 1 \end{cases} \right],$$

$$w_e = \Phi_{ez} = \frac{2\pi}{\lambda} \left\{ \frac{\ln |\zeta|}{|\zeta|} \frac{\sqrt{1+\zeta} - \sqrt{1-\zeta}}{2\sqrt{1-\zeta^2}} + \frac{\ln(1 + \sqrt{1+\zeta})}{\sqrt{1+\zeta}} + \frac{\ln(1 + \sqrt{1-\zeta})}{\sqrt{1-\zeta}} \right\},$$

где $\zeta = Z/X$; $Q = R(\zeta) + R(-\zeta)$; $R = (1/2)(1 - \sqrt{1+\zeta}) \ln |\zeta| + \sqrt{1+\zeta} \ln(1 + \sqrt{1+\zeta})$. У возмущений скоростей w_e и $u_{1e} = \Phi_{ex}$ нет особенностей на передних кромках, за исключением вершины крыла $X = 0$. При $M < 1$ функция u_{1e} имеет логарифмическую особенность на задней кромке $X = 1$. В плоскости симметрии $Z = 0$ логарифмическая осо-



Р и с. 2



Р и с. 3

бенность есть у производной w_{eZ} , но все остальные функции регулярны, При $\zeta \rightarrow 0$ получим

$$\frac{\pi}{2\tau} \sqrt{X} w_e \approx -\zeta \ln |\zeta|, \quad \frac{\pi}{\tau} X^{3/2} w_{eX} \approx -\frac{3}{2} \zeta \ln |\zeta|, \quad \frac{\pi}{2\tau} X^{3/2} w_{eZ} \approx \ln |\zeta| - 2 \ln 2 + 2.$$

В случае крыла с изломом кромки при $M > 1$ и $X < X_1$

$$\Phi_e = \frac{2\tau\beta_0}{\pi} \sqrt{X} \left[Q\left(\frac{\zeta}{\beta_0}\right) + \ln \frac{\beta_0 \omega}{\zeta} \right], \quad w_e = \frac{2\tau}{\pi} X^{-1/2} Q'\left(\frac{\zeta}{\beta_0}\right).$$

При $X > X_1$ возмущение потенциала Φ_e и поперечная скорость w_e определяются соотношениями

$$\begin{aligned} \Phi_e = & \frac{2\tau}{\pi} \left\{ \beta_0 \sqrt{X} \left[Q\left(\frac{\zeta}{\beta_0}\right) + \ln \frac{\beta_0 \omega}{\zeta} + 2 \ln (\sqrt{X} + \sqrt{X_1}) \right] - \right. \\ & - \beta_0 (\sqrt{X} - \sqrt{X_1}) \ln (X - X_1) + \sqrt{X - X_1} \left[\beta_1 \left[R\left(\frac{\zeta_1}{\beta_1}\right) + R\left(-\frac{\zeta_2}{\beta_1}\right) \right] - \right. \\ & \left. \left. - \beta_0 \left[R\left(\frac{\zeta_1}{\beta_0}\right) + R\left(-\frac{\zeta_2}{\beta_0}\right) \right] + (\beta_1 - \beta_0) \ln \frac{\beta_1 \omega}{\zeta} + \beta_0 \ln \frac{\beta_1}{\beta_0} \right] - \beta_0 X_1^{1/2} \ln 4X_1 \right\}, \\ w_e = & \frac{2\tau}{\pi} \left\{ X^{-1/2} Q'\left(\frac{\zeta}{\beta_0}\right) + (X - X_1)^{-1/2} \left[R'\left(\frac{\zeta_1}{\beta_1}\right) - R'\left(-\frac{\zeta_2}{\beta_1}\right) - \right. \right. \\ & \left. \left. - R'\left(\frac{\zeta_1}{\beta_0}\right) + R'\left(-\frac{\zeta_2}{\beta_0}\right) \right] \right\}, \end{aligned}$$

в которых штрихи обозначают дифференцирование по аргументу, а $\zeta_1 = (Z + Z_1)/(X - X_1)$, $\zeta_2 = (Z - Z_1)/(X - X_1)$. Видно, что точка излома является такой же особой точкой, как вершина крыла. В плоскости симметрии $Z = 0$ и в плоскостях $Z = \pm Z_1$ производная w_{eZ} имеет логарифмическую особенность.

Используя соотношения (3.2), решение уравнений пограничного слоя в следующем по числу Рейнольдса приближении для треугольного крыла представим в форме

$$\begin{aligned} w = \tau w_{11} = w_e g'(\eta, \xi), \quad u_{11} = \frac{P(\zeta)}{\pi \sqrt{X}} f'(\eta, \xi), \quad h_{11} = \frac{P(\zeta)}{\pi \sqrt{X}} t'(\eta, \xi), \\ \xi = 1 - \zeta, \quad P(\zeta) = (1 - (1 + \zeta)^{-1/2} - (1 - \zeta)^{-1/2}) \ln |\zeta| + \\ + \frac{\ln(1 + \sqrt{1 + \zeta})}{\sqrt{1 + \zeta}} + \frac{\ln(1 + \sqrt{1 - \zeta})}{\sqrt{1 - \zeta}}. \end{aligned}$$

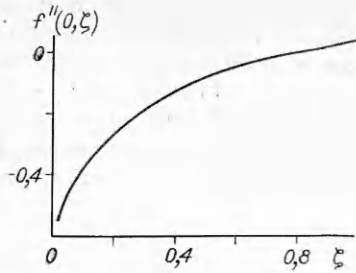


Рис. 4

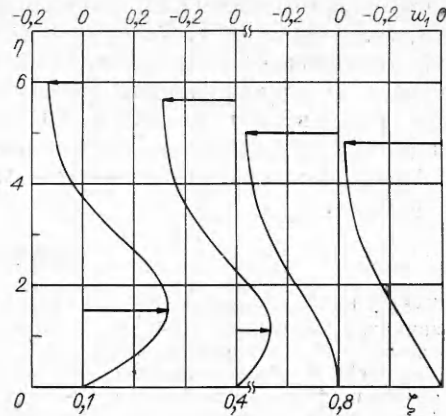


Рис. 5

Уравнения для функций f , g и t получаются из уравнений (2.2) в результате их линеаризации относительно нулевого приближения (3.1) и при $\rho = \rho_r = 1$ имеют вид

$$(3.3) \quad \begin{aligned} f''' &= -0,5f_0 f'' + \xi(1 - \xi) f'_0 f'_\xi - \xi B f'_0 f' - D f''_0, \\ t''' &= -0,5f_0 t'' + \xi(1 - \xi) f'_0 t'_\xi - \xi B f'_0 t' - D t''_0 - 2(\gamma - 1) M^2 f'_0 f'', \\ g''' &= -0,5f_0 g'' + \xi(1 - \xi) f'_0 g'_\xi + 0,5\xi(1 + 2(1 - \xi) Q_{\xi\xi}/Q_\xi)(t'_0 - f'_0 g'), \\ \eta = 0: f = t = g = f' = t' = g' = 0; \quad \eta = \infty: f' = t' = 0, \quad g' = 1, \end{aligned}$$

где коэффициенты B и D определяются выражениями

$$B = 0,5 + (1 - \xi) P_\xi/P, \quad D = \xi(1 - \xi) f_\xi - (1 - \xi)(\xi P_\xi/P - 0,5)f + [0,5(2\xi Q_{\xi\xi} - Q_\xi/\xi - \xi Q_\xi g_\xi)]/P.$$

В рассматриваемой задаче переменные разделяются и дополнительного уравнения для функции q не требуется, так как

$$q = w_z = (w_e g')_z = (w_e g'_\xi - w_e g'_\xi)/X.$$

Уравнения (3.3) были решены с помощью численной методики [11] при $M = 2$. Графики функции $f'(\eta, \xi)$ обозначены на рис. 3 цифрами 1—4 для $\xi = 0,1; 0,5; 0,7; 0,9$. На рис. 4 приведен график функции $f''(0, \xi)$. Возмущения продольной скорости u_{11} и энтальпии h_{11} , как и функции f' и t' , имеют логарифмическую особенность в плоскости симметрии $Z = 0$ ($\xi = 1$). Характер течения в плоскости поперечного сечения иллюстрирует рис. 5, на котором приведены графики функций $w_1 = (\pi \sqrt{\bar{\lambda}}/2\tau)w = Q_\xi g'(\eta, \xi)$. Видно, что при $0 \leq \xi \leq 0,2$ возмущения переносятся от кромки к плоскости симметрии. При $\xi > 0,2$ во внешней части пограничного слоя поперечная скорость направлена к плоскости симметрии, но внутри пограничного слоя есть область, где поперечная скорость направлена в обратную сторону.

4. Рассмотренная в п. 1 модель внешнего течения отличается простотой и допускает наглядную аналитическую форму представления решения, но область ее применимости ограничена дозвуковыми и небольшими сверхзвуковыми скоростями потока. Решение для пограничного слоя (2.1)—(2.3) справедливо в околосзвуковом, а также гиперзвуковом диапазонах применимости теории малых возмущений для внешнего течения.

Так, при $M \gg 1$, $M\delta \ll 1$, $M\lambda \geq O(1)$, $\lambda \leq \chi_1 \leq 1$, если ударные волны присоединены к кромкам, имеют место следующие оценки [12]:

$$\rho = O(1), \quad h = O(1), \quad p \sim w \sim q \sim \delta/(M\lambda^2) = \tau/(M\lambda).$$

При $\delta/(M\lambda^2) \ll 1$ соотношения (2.1), (2.2) применимы для описания гиперзвукового пограничного слоя на всей поверхности крыла. При наличии отошедших ударных волн оценки величин другие [13]:

$$\rho = O(M^{-2}), \quad h = O(M^2), \quad p \sim w \sim q \sim \delta M/\lambda^2 = \tau M/\lambda,$$

так что соотношения (2.1), (2.2) справедливы на основной части поверхности, если $\delta M/\lambda^2 \ll 1$. Течение вблизи кромок в этом случае описывается уравнениями Эйлера и пограничного слоя в приближении скользящего крыла. В промежуточной области $\delta M/\lambda^2 = O(1)$ пограничный слой на крыле описывается полными уравнениями трехмерного пограничного слоя [13], а при $\delta M/\lambda^2 \gg 1$ справедливо другое предельное решение [14].

Автор приносит благодарность А. Д. Хонькину за полезное обсуждение работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Хислет М. А., Ломакс Г. Теория малых возмущений при сверхзвуковых и трансзвуковых скоростях потока // Общая теория аэродинамики больших скоростей.— М.: Воениздат, 1962.
2. Van Dyke M. D. Second-order subsonic airfoil theory including edge effects.— Washington, 1956.— (Rept/NASA; N 1254).
3. Ван Дайк М. Методы возмущений в механике жидкости.— М.: Мир, 1967.
4. Шалаев В. И. Пространственный пограничный слой на тонких крыльях в сверхзвуковом потоке газа // ЧММСС/АН СССР, Сиб. отд-ние, ИТПМ.— 1986.— Т. 17, № 5.
5. Шалаев В. И. Пространственный пограничный слой на тонких крыльях и телах при малых углах атаки // Моделирование в механике/АН СССР, Сиб. отд-ние, ИТПМ.— 1988.— Т. 2(19), № 5.
6. Струминский В. В. Скольжение крыла в вязком сжимаемом газе // ДАН СССР.— 1946.— Т. 54, № 9.
7. Тригуб В. Н. Обтекание носка тонкого профиля вязкой несжимаемой жидкостью // Учен. зап. ЦАГИ.— 1981.— Т. XII, № 4.
8. Шалаев В. И. Экономичный метод численного решения уравнений турбулентного пограничного слоя // Тр. ЦАГИ.— 1985.— Вып. 2265.
9. Winter K. G., Smith K. G. Measurements of skin friction on a cambered delta wing at supersonic speeds.— L., 1967.— (Rept. and Memo/ARC; N 3501).
10. Stewartson K. The theory of laminar boundary layers in compressible fluids.— Oxford: Clarendon Press, 1964.
11. Петухов И. В., Селиверстов С. Н. Программа BL 2D 02 на ФОРТРАН для численного решения уравнений двумерного пограничного слоя // Тр. ЦАГИ.— 1981.— Вып. 2107.
12. Лунев В. В. Гиперзвуковая аэродинамика.— М.: Машиностроение, 1975.
13. Рубан А. И., Сычев В. В. Гиперзвуковое вязкое течение газа около крыла малого удлинения // Учен. зап. ЦАГИ.— 1973.— Т. IV, № 5.
14. Дудин Г. Н., Нейланд В. Я. Закон поперечных сечений для трехмерного пограничного слоя на тонком крыле в гиперзвуковом потоке // Изв. АН СССР. МЖГ.— 1976.— № 2.

г. Жуковский

Поступила 23/1 1990 г.,
в окончательном варианте — 10/IX 1990 г.

УДК 532.529.6

П. К. Волков

СТАЦИОНАРНОЕ ВСПЛЫТИЕ КАПЕЛЬ В ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

1. Введение. Исследование всплытия частиц одной среды, являющихся каплями в другой,— очень сложная задача, поскольку необходимо определять гидродинамические характеристики внутри и вне капли, а также ее форму — границу раздела разных сред. Причем скорость всплытия существенно зависит как от физических свойств сред, так и от структуры течений. Последнее обстоятельство не позволяет так же просто, как в случае движения тела известной формы с заданной скоростью, перейти к изучению эквивалентной задачи обтекания капли, которая, как правило, проще исходной. Поэтому необходимо различать процесс стационарного всплытия от движения с заданной постоянной скоростью (даже если это касается всплытия твердого тела). Простой пример состоит в том, что твердый шарик всплывает (тонет) в жидкости с определенной скоростью, а задачу его движения можно решать для разных значений скорости. Таким образом, всплытие реализуется при некотором значении параметра, характеризующего движение тела с постоянной скоростью. Ситуация усложняется, если форма тела может изменяться под воздействием гидродинамики процесса.

Математическое описание всплытия капли жидкости в другой жидкости состоит в отыскании решений уравнений Навье — Стокса как внутри капли, так и вне ее при выполнении некоторых условий согласования на границе раздела сред. Первые