

УДК 533.72; 532

## ТЕРМОФОРЕЗ НАГРЕТЫХ УМЕРЕННО КРУПНЫХ АЭРОЗОЛЬНЫХ ЧАСТИЦ СФЕРИЧЕСКОЙ ФОРМЫ

Н. В. Малай, Е. Р. Шукин\*

Белгородский государственный национальный исследовательский университет,  
308007 Белгород, Россия

\* Объединенный институт высоких температур РАН, 125412 Москва, Россия  
E-mails: malay@bsu.edu.ru, evgrom@yandex.ru

В приближении Стокса при значениях числа Рейнольдса и Пекле, много меньших единицы, дано теоретическое описание стационарного движения умеренно крупной аэрозольной частицы сферической формы во внешнем поле градиента температуры. При этом полагается, что средняя температура поверхности частицы значительно отличается от температуры окружающей ее газообразной среды. Уравнения газовой динамики решаются с учетом степенной зависимости коэффициентов молекулярного переноса (вязкости, теплопроводности) и плотности газообразной среды от температуры. Граничные условия записаны в линейном приближении по числу Кнудсена. Показано, что термофоретическая сила и скорость существенно зависят от числа Кнудсена и средней температуры поверхности частицы.

**Ключевые слова:** термофорез нагретых умеренно крупных сферических частиц, движение нагретых сферических частиц в поле градиента температуры.

DOI: 10.15372/PMTF20190314

**Введение.** В газообразных средах с неоднородным распределением температуры может возникать упорядоченное движение частиц, обусловленное действием сил молекулярного происхождения и передачей частицам некомпенсированного импульса молекулами газообразной среды. Такое движение частиц, обусловленное внешним заданным градиентом температуры, называется термофорезом [1, 2]. Термофоретическая сила перемещает частицы в области с более низкой температурой. Когда термофоретическая сила становится равной по значению силе сопротивления среды, частица начинает равномерное движение со скоростью, называемой термофоретической.

Термофоретическая сила может оказывать значительное влияние на процесс осаждения аэрозольных частиц в каналах тепло- и массообменников, на движение частиц в зонах просветления аэродисперсных сред и в окрестностях капель, вымывающих частицы. Эту силу можно использовать при проведении тонкой очистки небольших объемов газов, отборе аэрозольных проб, нанесении специальных покрытий заданной толщины из аэрозольных частиц, получении высококачественных оптических волокон и т. д. [2–4].

В работах по теории термофореза влияние термофоретической силы на движение частиц хорошо изучено при малых относительных перепадах температуры в окрестности частицы [1–4]. Под относительным перепадом температуры понимается отношение разности средней температуры  $T_{iS}$  поверхности частицы и температуры  $T_{e\infty}$  газообразной

среды вдали от нее к последней  $(T_{iS} - T_{e\infty})/T_{e\infty}$ . Относительный перепад температуры считается малым, если выполняется неравенство  $(T_{iS} - T_{e\infty})/T_{e\infty} \ll 1$ , и значительным, если  $(T_{iS} - T_{e\infty})/T_{e\infty} \sim O(1)$  (индексы  $e, i$  соответствуют газу и частице, индекс  $S$  — значениям физических величин при средней температуре поверхности частицы, индекс  $\infty$  — физическим величинам, характеризующим газообразную среду в невозмущенном потоке). В последнем случае частица называется нагретой. Нагрев поверхности частицы может быть обусловлен, например, объемной химической реакцией, радиоактивным распадом вещества частицы, поглощением частицей электромагнитного излучения и т. д.

В случае  $(T_{iS} - T_{e\infty})/T_{e\infty} \sim O(1)$  при решении уравнений газовой динамики необходимо учитывать зависимость коэффициентов молекулярного переноса (вязкости, теплопроводности) и плотности газообразной среды от температуры. В этом случае газообразная среда считается неизотермической и система газодинамических уравнений, описывающая такую среду, становится существенно нелинейной. Имеется небольшое количество работ, посвященных исследованию движения частиц при значительных относительных перепадах температуры в газообразных средах, в частности, рассматривались гравитационное движение [5, 6], фотофорез нагретых частиц [7], термофорез крупных нагретых частиц [8]. В работах [5–8] показано, что нагрев поверхности частиц оказывает существенное влияние на их движение.

Для классификации частиц по размерам применяется критерий Кнудсена  $\text{Kn} = \lambda/R$  ( $\lambda$  — средняя длина свободного пробега молекул газа;  $R$  — характерный размер частицы) [2]. Частицы называются крупными при  $\text{Kn} \leq 0,01$  и умеренно крупными при  $0,01 \leq \text{Kn} \leq 0,30$ .

В настоящее время возрос интерес к исследованию термофореза умеренно крупных частиц (течение со скольжением). В работе [9] рассматривается термофорез ультрамелких и наноразмерных частиц, широкое развитие получил микромасштабный термофорез, позволяющий анализировать взаимодействие биомолекул [10, 11] и т. д. В настоящей работе рассматривается термофорез нагретой умеренно крупной частицы сферической формы.

**1. Постановка задачи.** Рассмотрим твердую нагретую умеренно крупную аэрозольную частицу сферической формы радиусом  $R$ , взвешенную в газе с плотностью  $\rho_e$ , теплопроводностью  $\lambda_e$  и вязкостью  $\mu_e$ . С помощью внешних источников в газе поддерживается постоянный малый градиент температуры  $\nabla T$ . При описании свойств газообразной среды и частицы рассматриваются их зависимости от температуры в степенном виде:  $\mu_e = \mu_{e\infty} t_e^\beta$ ,  $\lambda_e = \lambda_{e\infty} t_e^\alpha$ ,  $\lambda_i = \lambda_{i0} t_i^\gamma$ , где  $\mu_{e\infty} = \mu_e(T_{e\infty})$ ;  $\lambda_{e\infty} = \lambda_e(T_{e\infty})$ ;  $\lambda_{i0} = \lambda_i(T_{e\infty})$ ;  $t_k = T_k/T_{e\infty}$  ( $k = e, i$ );  $0,5 \leq \alpha \leq 1,0$ ,  $0,5 \leq \beta \leq 1,0$ ,  $-1 \leq \gamma \leq 1$ . В частности, при  $273 \text{ K} \leq T_e \leq 900 \text{ K}$  для воздуха  $\alpha = 0,81$ ,  $\beta = 0,72$ , для азота  $\alpha = 0,77$ ,  $\beta = 0,69$ , при этом относительная погрешность не превышает 4 % [12].

При теоретическом описании термофореза будем полагать, что в силу малости времени тепловой релаксации процесс теплопереноса в системе частица — газообразная среда является квазистационарным. Движение частицы происходит при малых числах Пекле и Рейнольдса. Задача решается с помощью гидродинамического метода, т. е. решаются уравнения гидродинамики с соответствующими граничными условиями. При описании термофореза нагретых частиц сферической формы свободной конвекцией пренебрегается, в силу того что число Грасгофа  $\text{Gr} = gL^3\beta(t_C - t_0)/\nu^2$ , описывающее свободную конвекцию, много меньше единицы ( $g$  — ускорение свободного падения;  $L$  — характерный линейный размер;  $\beta = (273 + t_0)^{-1} \text{ K}^{-1}$ ;  $t_C, t_0$  — температура поверхности теплообмена и теплоносителя,  $^\circ\text{C}$ ;  $\nu$  — кинематическая вязкость). Если температуру газа вдали от частицы принять равной  $t_0 = 0 \text{ }^\circ\text{C}$  и нагреть твердую частицу до максимально возможной температуры (температуры ее плавления  $t_C = 900 \text{ }^\circ\text{C}$ ), при  $L = 2 \cdot 10^{-6} \text{ м}$  (частица умеренно крупная),  $\nu = 13,28 \cdot 10^{-6} (0 \text{ }^\circ\text{C})$  имеем следующую оценку:  $\text{Gr} \approx 1,5 \cdot 10^{-6} \ll 1$ .

Процесс термофореза удобно описывать в сферической системе координат  $(r, \theta, \varphi)$ , связанной с центром масс аэрозольной частицы, при этом вектор  $\nabla T$  направлен вдоль полярной оси  $z = r \cos \theta$ . Поскольку система отсчета связана с центром движущейся аэрозольной частицы, задача сводится к анализу обтекания частицы бесконечным плоскопараллельным потоком газа, скорость  $\mathbf{U}_\infty$  которого подлежит определению ( $\mathbf{U}_\infty \parallel OZ$ ). Распределения скоростей, давлений и температур обладают аксиальной симметрией относительно оси  $OZ$ . При указанном выборе начала системы координат нагретую частицу можно считать неподвижной, а внешнюю среду (газ) — движущейся в направлении, противоположном направлению фактического движения нагретой частицы со скоростью  $\mathbf{U}_\infty = -\mathbf{U}_{th}$  ( $\mathbf{U}_{th}$  — скорость термофореза).

С учетом сформулированных допущений уравнения гидродинамики и теплопроводности имеют вид [13]

$$\frac{\partial}{\partial x_k} P_e = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \mu_e \left( \frac{\partial U_k^e}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j^e}{\partial x_k} - \frac{2}{3} \delta_k^j \frac{\partial U_n^e}{\partial x_n} \right) \right], \quad \frac{\partial}{\partial x_k} (\rho_e U_k^e) = 0; \quad (1.1)$$

$$\operatorname{div} (\lambda_e \nabla T_e) = 0, \quad n_e = P_e / (k T_e); \quad (1.2)$$

$$\operatorname{div} (\lambda_i \nabla T_i) = -q_i, \quad (1.3)$$

где  $x_k$  — декартовы координаты;  $\rho_e, n_e$  — плотность и концентрация молекул газообразной среды;  $k$  — постоянная Больцмана;  $q_i$  — плотность неоднородно распределенных в объеме частицы тепловых источников, за счет которых происходит ее нагрев.

Система газодинамических уравнений (1.1)–(1.3) решается в сферической системе координат при следующих граничных условиях:

$$y \rightarrow \infty, \quad U_r^e = U_\infty \cos \theta, \quad U_\theta^e = -U_\infty \sin \theta, \quad P_e = P_{e\infty}, \quad T_e = T_{e\infty} + |\nabla T| r \cos \theta; \quad (1.4)$$

$$y \rightarrow 0, \quad T_i \neq \infty; \quad (1.5)$$

$$y = 1, \quad T_e - T_i = C_t \operatorname{Kn} \frac{\partial T_e}{\partial y}, \quad (1.6)$$

$$-\lambda_e \frac{\partial T_e}{\partial y} = -\lambda_i \frac{\partial T_i}{\partial y} - C_q \operatorname{Kn} \frac{\lambda_e}{R} \left( \frac{\partial^2 T_e}{\partial \theta^2} + \operatorname{ctg} \theta \frac{\partial T_e}{\partial \theta} \right) + \sigma_0 \sigma_1 R (T_i^4 - T_{e\infty}^4);$$

$$U_r^e = C_V \operatorname{Kn} \frac{\nu_e}{RT_e} \left( \frac{\partial^2 T_e}{\partial \theta^2} + \operatorname{ctg} \theta \frac{\partial T_e}{\partial \theta} \right); \quad (1.7)$$

$$U_\theta^e = C_m \operatorname{Kn} \left( \frac{\partial U_\theta^e}{\partial y} + \frac{1}{y} \frac{\partial U_r^e}{\partial \theta} - \frac{U_\theta^e}{y} \right) + K_{TS} \frac{\nu_e}{RT_e} (1 + \operatorname{Kn} \beta'_R) \frac{\partial T_e}{\partial \theta} + \\ + K_{TS} \operatorname{Kn} \beta_R \frac{\nu_e}{RT_e} \frac{\partial^2 T_e}{\partial y \partial \theta} - K_{TS} \operatorname{Kn} \beta_B \frac{\nu_e}{2RT_e} \left( y \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{y^2} \frac{\partial T_e}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{y} \frac{\partial^2 T_e}{\partial y \partial \theta} \right), \quad (1.8)$$

где  $y = r/R$ ;  $U_r^e, U_\theta^e$  — нормальная и касательная компоненты массовой скорости газа  $\mathbf{U}_e$ ;  $\nu_e = \mu_e / \rho_e$  — кинематическая вязкость;  $U_\infty = |\mathbf{U}_\infty|$ ;  $K_{TS}, C_m$  — коэффициенты теплового и изотермического скольжения;  $\beta'_R, \beta_R, \beta_B$  — поправки на кривизну и барнеттовское скольжение;  $C_q, C_V$  — коэффициенты потоков тепла и среднемассового переноса в слое Кнудсена;  $C_t$  — коэффициент скачка температуры;  $\sigma_0$  — постоянная Стефана — Больцмана;  $\sigma_1$  — интегральная степень черноты. Граничные условия на поверхности частицы (1.6)–(1.8) записаны в линейном приближении по числу Кнудсена [14]. Выражения для газокинетических коэффициентов  $K_{TS}, C_m, \beta'_R, \beta_R, \beta_B, C_q, C_V, C_t$  получены в [14] при решении уравнения Больцмана в слое Кнудсена. В случае если коэффициенты аккомодации

тангенциальной проекции импульса и энергии молекул равны единице, значения газокинетических коэффициентов равны:  $K_{TS} = 1,161$ ,  $C_m = 1,131$ ,  $C_q = 0,548$ ,  $C_V = 0,971$ ,  $\beta'_R = -0,701$ ,  $\beta_R = 3,731$ ,  $\beta_B = 3,651$ ,  $C_t = 2,179$  [14].

Следует отметить, что входящие в граничные условия газокинетические коэффициенты определяются из решения кинетического уравнения Больцмана. Это означает, что в общем случае их вид зависит как от модели межмолекулярного взаимодействия, так и от средней температуры поверхности частицы. В работах [15, 16], в которых исследовалась зависимость кинетических коэффициентов от модели межмолекулярного взаимодействия и от средней температуры поверхности частицы, показано, что относительная погрешность их значений по сравнению с соответствующими значениями в модели твердых сферических молекул составляет не более 2–3 %. Тогда при решении задачи в линейном приближении по малому параметру  $\varepsilon = R|\nabla T|/T_{e\infty}$  (в дальнейшем граничные условия линеаризуются по этому малому параметру) можно использовать приведенные в [14] значения газокинетических коэффициентов, входящих в граничные условия на поверхности частицы. Эти значения получены из уравнения Больцмана с использованием интегралов столкновений в виде эллипсоидальной модели, а также первого приближения для вязкости и теплопроводности газа в модели твердых сферических молекул.

В условиях (1.6) учитываются скачок температуры газа вблизи поверхности частицы и непрерывность теплового потока с учетом распределения части теплоты по слою Кнудсена и в виде излучения; в условии (1.7) учитывается непротекание молекул через поверхность частицы с учетом растекания части потока молекул по слою Кнудсена; изотермическое и тепловое скольжение учтено в условии (1.8). На большом расстоянии от частицы ( $y \rightarrow \infty$ ) справедливы граничные условия (1.4), а конечность физических величин, характеризующих частицу при  $y \rightarrow 0$ , учтена в (1.5).

Определяющими параметрами в задаче являются материальные постоянные  $\mu_{e\infty}$ ,  $\rho_{e\infty}$ ,  $\lambda_{e\infty}$  и не меняющиеся в процессе движения частицы параметры  $R$ ,  $|\nabla T|$ ,  $T_{e\infty}$ ,  $U_\infty$ . Из этих параметров, за исключением числа Рейнольдса, можно составить безразмерную комбинацию  $\varepsilon = R|\nabla T|/T_{e\infty}$ , характеризующую перепад температуры на частице радиусом  $R$ . При описании термофореза величина  $\varepsilon = R|\nabla T|/T_{e\infty}$  играет роль малого параметра [1, 2, 8].

При  $\varepsilon \ll 1$  решение уравнений гидродинамики будем искать в виде

$$\mathbf{V}_e = \mathbf{V}_e^{(0)} + \varepsilon \mathbf{V}_e^{(1)} + \dots, \quad P_e = P_e^{(0)} + \varepsilon P_e^{(1)} + \dots,$$

где  $\mathbf{V}_e = \mathbf{U}_e/U_\infty$ .

Вид граничных условий (1.7), (1.8) свидетельствует о том, что выражения для компонент массовой скорости  $V_r^e$  и  $V_\theta^e$  ищутся в виде разложений по полиномам Лежандра и Гегенбауэра [13]. Известно, что для определения общей силы, действующей на частицу, достаточно определить первые члены этих разложений [8, 13]. С учетом этого компоненты массовой скорости нулевого приближения будем искать в виде

$$V_r^e(y, \theta) = G(y) \cos \theta, \quad V_\theta^e(y, \theta) = -g(y) \sin \theta$$

( $G(y)$ ,  $g(y)$  — произвольные функции).

**2. Поля температур вне и внутри частицы.** При нахождении термофоретической силы и скорости ограничимся поправками первого порядка малости. Чтобы их найти, нужно определить поля температур вне и внутри частицы. Для этого необходимо решить уравнения (1.2), (1.3). Решая эти уравнения методом разделения переменных, для  $t_e$ ,  $t_i$  ( $t_k = T/T_{e\infty}$ ,  $k = e, i$ ) получаем выражения

$$t_e(y, \theta) = t_{e0}(y) + \varepsilon t_{e1}(y, \theta), \quad t_i(y, \theta) = t_{i0}(y) + \varepsilon t_{i1}(y, \theta), \quad (2.1)$$

где

$$t_{e0}(y) = \left(1 + \frac{\Gamma_0}{y}\right)^{1/(1+\alpha)}, \quad t_{i0}(y) = \left(B_0 + \frac{H_0}{y} - \frac{1}{y} \int_y^1 \psi_0 dy + \int_y^1 \frac{\psi_0}{y} dy\right)^{1/(1+\gamma)},$$

$$t_{e1}(y) = \frac{1}{t_{e0}^\alpha} \cos \theta \left(y + \frac{\Gamma}{y^2}\right), \quad t_{i1}(y) = \frac{1}{t_{i0}^\gamma} \cos \theta \left[ Dy + \frac{H_1}{y^2} + \frac{1}{3} \left( y \int_1^y \frac{\psi_1}{y^2} dy - \frac{1}{y^2} \int_1^y \psi_1 y dy \right) \right],$$

$$H_0 = \frac{(1+\gamma)R^2}{3\lambda_{i0}T_{e\infty}} J_0, \quad H_1 = \frac{R^2}{3\lambda_{i0}T_{e\infty}} J_1,$$

$$J_0 = \frac{1}{V} \int_V q_i dV, \quad J_1 = \frac{1}{V} \int_V q_i z dV = 0, \quad V = \frac{4}{3} \pi R^3,$$

$$\psi_0 = -\frac{R^2(1+\gamma)}{2\lambda_{i0}T_{e\infty}} y^2 \int_{-1}^{+1} q_i(r, \theta) dx, \quad x = \cos \theta, \quad \psi_1 = -\frac{3R^2}{2\lambda_{i0}T_{e\infty}} y^2 \int_{-1}^{+1} q_i(r, \theta) x dx,$$

$z = r \cos \theta$ ;  $\int_V q_i z dV$  — дипольный момент плотности тепловых источников [7, 8].

Постоянные интегрирования, входящие в выражения для полей температур, определяются из граничных условий на поверхности частицы. В частности, для коэффициентов  $\Gamma$ ,  $\Gamma_0$  имеем

$$\Gamma = \frac{Rt_{eS}^\alpha}{\lambda_{iS}T_{e\infty}\delta} J_1 + \frac{1}{\delta} \left\{ \frac{\lambda_{eS}}{\lambda_{iS}} - \omega_4 + \text{Kn} \left[ C_t \left( 1 + \frac{\alpha l^{(S)}}{1+\alpha} \right) \omega_4 + 2C_q \frac{\lambda_{eS}}{\lambda_{iS}} \right] \right\},$$

$$\Gamma_0 = t_{eS}^{1+\alpha} - 1,$$

где

$$\delta = 2 \frac{\lambda_{eS}}{\lambda_{iS}} + \omega_4 + \text{Kn} \left[ C_t \left( 2 - \frac{\alpha l^{(S)}}{1+\alpha} \right) \omega_4 + 2C_q \frac{\lambda_{eS}}{\lambda_{iS}} \right], \quad \omega_4 = 1 + 4 \frac{\sigma_0 \sigma_1 R}{\lambda_{iS}} T_{e\infty}^3 t_{eS}^3,$$

$$\lambda_{iS} = \lambda_{i0} t_{iS}^\gamma, \quad \lambda_{eS} = \lambda_{e\infty} t_{eS}^\alpha, \quad t_{iS} = t_{i0} \quad (y=1), \quad t_{eS} = t_{e0} \quad (y=1),$$

$$l^{(S)} = (t_{eS}^{1+\alpha} - 1) / t_{eS}^{1+\alpha}.$$

Среднее значение температуры поверхности частицы  $T_{iS}$  определяется из решения системы уравнений

$$t_{iS} = t_{eS} \left( 1 + C_t \text{Kn} \frac{l^{(S)}}{1+\alpha} \right), \quad \frac{l^{(S)}}{1+\alpha} t_{eS} = \frac{R^2}{3\lambda_{eS}T_{e\infty}} J_0 - \sigma_0 \sigma_1 \frac{RT_{e\infty}^3}{\lambda_{eS}} (t_{iS}^4 - 1) \quad (2.2)$$

( $T_{iS} = t_{iS}T_{e\infty}$ ;  $T_{eS} = t_{eS}T_{e\infty}$ ).

При выполнении условия  $\lambda_e \ll \lambda_i$ , справедливого для большинства газов, теплопроводность частицы много больше теплопроводности газа. Тогда в выражении для динамической вязкости можно пренебречь зависимостью от угла  $\theta$  в системе частица — газ (в предположении слабой угловой асимметрии распределения температуры). С учетом этого можно считать, что вязкость зависит только от температуры  $t_{e0}(r)$ , т. е.  $\mu_e(t_e(r, \theta)) \approx \mu_e(t_{e0}(r))$ . Это допущение позволяет рассматривать гидродинамическую часть отдельно от тепловой (связь между ними осуществляется с помощью граничных условий).

Подставляя (2.1) в выражение для динамической вязкости, получаем

$$\mu_e = \mu_{e\infty} t_{e0}^\beta. \quad (2.3)$$

В дальнейшем выражение (2.3) используется при нахождении полей скорости и давления в окрестности нагретой аэрозольной частицы сферической формы.

**3. Решение гидродинамической задачи. Поля скорости и давления.** Исследование линеаризованного по скорости уравнения Навье — Стокса в сферической системе координат показало, что при значении теплопроводности частицы, много большем теплопроводности газа (в случае слабой угловой асимметрии распределения температуры), можно свести это уравнение к неоднородному дифференциальному уравнению третьего порядка с изолированной особой точкой и искать его решение в виде обобщенных степенных рядов [5]. Таким образом, общие выражения для компонент массовой скорости, удовлетворяющие условию ограниченности решения при  $y \rightarrow \infty$ , имеют вид

$$\begin{aligned} U_r^e &= U_\infty \cos \theta G(y), & G(y) &= A_1 G_1 + A_2 G_2 + G_3, \\ U_\theta^e &= -U_\infty \sin \theta g(y), & g(y) &= A_1 G_4 + A_2 G_5 + G_6, \\ P_e &= P_{e\infty} + \frac{\mu_{e\infty} U_\infty}{R} t_{e0}^\beta \left[ \frac{y^2}{2} \frac{d^3 G}{dy^3} + y \left( 3 + \frac{\beta-1}{2} y f \right) \frac{d^2 G}{dy^2} - \right. \\ &\quad \left. - \left( 2 - y^2 f^I - \frac{\beta}{2} y^2 f^2 + (\beta-2) y f \right) \frac{dG}{dy} + 2 \left( y^2 f^{II} + y f^I (4 + y \beta f) - \frac{2}{3} f \right) G \right]. \end{aligned}$$

Здесь

$$f = -\frac{l}{y(1+\alpha)}, \quad G_k = \left( 1 + \frac{l}{2(1+\alpha)} \right) G_{k-3} + \frac{1}{2} y G_{k-3}^I \quad (k = 4, 5, 6),$$

$f^I, G_1^I, G_2^I, G_3^I, f^{II}$  — первые и вторые производные по  $y$  от соответствующих функций;

$$G_1(y) = \frac{1}{y^3} \sum_{n=0}^{\infty} C_{1,n} l^n, \quad G_2(y) = \frac{1}{y} \sum_{n=0}^{\infty} C_{2,n} l^n + \omega_2 \ln(y) G_1(y),$$

$$G_3(y) = \sum_{n=0}^{\infty} C_{3,n} l^n + \omega_3 \ln(y) G_1(y).$$

Значения коэффициентов  $C_{1,n}$  ( $n \geq 1$ ),  $C_{2,n}$  ( $n \geq 3$ ),  $C_{3,n}$  ( $n \geq 4$ ) определяются с помощью следующих рекуррентных соотношений:

$$\begin{aligned} C_{1,n} &= \frac{1}{n(n+3)(n+5)} \{ [(n-1)(3n^2+13n+8) + \gamma_1(n+2)(n+3) + \gamma_2(n+2)] C_{1,n-1} - \\ &\quad - [(n-1)(n-2)(3n+5) + 2\gamma_1(n^2-4) + \gamma_2(n-2) + \gamma_3(n+3)] C_{1,n-2} + \\ &\quad + (n-2)[(n-1)(n-3) + \gamma_1(n-3) + \gamma_3] C_{1,n-3} \}, \\ C_{2,n} &= \frac{1}{(n+1)(n+3)(n-2)} \{ [(n-1)(3n^2+n-6) + \gamma_1 n(n+1) + n\gamma_2] C_{2,n-1} - \\ &\quad - [\gamma_3(n+1) + (n-1)(n-2)(3n-1) + 2\gamma_1 n(n-2) + \gamma_2(n-2)] C_{2,n-2} + \\ &\quad + (n-2)[(n-1)(n-3) + \gamma_3 + \gamma_1(n-3)] C_{2,n-3} + \\ &\quad + \frac{\omega_2}{\Gamma_0^2} \sum_{k=0}^{n-2} (n-k-1) \Delta_k - 6 \frac{(-\gamma_4)(1-\gamma_4) \cdots (n-1-\gamma_4)}{n!} \}, \end{aligned}$$

$$C_{3,n} = \frac{1}{n(n+2)(n-3)} \left\{ (n-1)[3n^2 - 5n - 4 + \gamma_1 n + \gamma_2] C_{3,n-1} - \right. \\ \left. - [(n-1)(n-2)(3n-4) + 2\gamma_1(n-1)(n-2) + \gamma_2(n-2) + n\gamma_3] C_{3,n-2} + \right. \\ \left. + (n-2)[(n-1)(n-3) + \gamma_1(n-3) + \gamma_3] C_{3,n-3} + \right. \\ \left. + \frac{\omega_3}{2\Gamma_0^3} \sum_{k=0}^{n-3} (n-k-2)(n-k-1) \Delta_k \right\},$$

$$\Delta_k = (3k^2 + 16k + 15)C_{1,k} - ((k-1)(6k+13) + \gamma_1(2k+5) + \gamma_2)C_{1,k-1} + \\ + (3(k-1)(k-2) + 2\gamma_1(k-2) + \gamma_3)C_{1,k-2},$$

$$\gamma_1 = \frac{1-\beta}{1+\alpha}, \quad \gamma_2 = 2\frac{1+\beta}{1+\alpha}, \quad \gamma_3 = \frac{2+2\alpha-\beta}{(1+\alpha)^2}.$$

При этом  $C_{1,0} = 1$ ,  $C_{2,0} = 1$ ,  $C_{3,1} = 0$ ,  $C_{2,2} = 1$ ,

$$C_{2,1} = -\frac{1}{8}(2\gamma_1 + \gamma_2 + 6\gamma_4), \quad \frac{\omega_3}{2\Gamma_0^3} = -\frac{\gamma_3}{60}(10 + 3\gamma_1 + \gamma_2), \quad \gamma_4 = \frac{\beta}{1+\alpha},$$

$$\frac{\omega_2}{\Gamma_0^2} = \frac{1}{15} \left[ \frac{1}{4} (2\gamma_1 + \gamma_2 + 6\gamma_4)(4 + 3\gamma_1 + \gamma_2) + 3\gamma_3 + 3\gamma_4(\gamma_4 - 1) \right], \quad C_{3,2} = \frac{1}{4}\gamma_3,$$

$$C_{3,3} = 1, \quad C_{3,0} = 1, \quad C_{1,n} = 0, \quad C_{2,n} = 0, \quad C_{3,n} = 0, \quad n < 0.$$

Постоянные интегрирования  $A_1$ ,  $A_2$  определяются из граничных условий на поверхности аэрозольной частицы.

#### 4. Определение термофоретической силы и скорости. Анализ результатов.

В первом приближении по  $\varepsilon$  получены выражения для полей температуры вне и внутри аэрозольной частицы, а также распределения скорости и давления в ее окрестности. Результирующая сила, действующая на частицу, определяется интегрированием тензора напряжений по поверхности аэрозольной частицы [13]:

$$F_z = \int_{(S)} (-P_e \cos \theta + \sigma_{rr} \cos \theta - \sigma_{r\theta} \sin \theta) r^2 \sin \theta d\theta d\varphi \Big|_{r=R}. \quad (4.1)$$

Здесь  $\sigma_{rr}$ ,  $\sigma_{r\theta}$  — компоненты тензора напряжений:

$$\sigma_{rr} = \mu_e \left( 2 \frac{\partial U_r^e}{\partial y} - \frac{2}{3} \operatorname{div} U_e \right), \quad \sigma_{r\theta} = \mu_e \left( \frac{\partial U_\theta^e}{\partial y} + \frac{1}{y} \frac{\partial U_r^e}{\partial \theta} - \frac{U_\theta^e}{y} \right),$$

$U_r^e$ ,  $U_\theta^e$  — радиальная и касательная компоненты массовой скорости.

Подставляя в (4.1) соотношения для  $\sigma_{rr}$ ,  $\sigma_{r\theta}$ ,  $U_r^e$ ,  $U_\theta^e$  и проводя интегрирование, получаем выражение для общей силы

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_\mu + \mathbf{F}_{th}, \quad (4.2)$$

где  $\mathbf{F}_\mu = 6\pi R \mu_{e\infty} U_\infty f_\mu \mathbf{n}_z$  — сила вязкого сопротивления среды;  $\mathbf{F}_{th} = -6\pi R \mu_{e\infty} f_{th} |\nabla T| \mathbf{n}_z$  — термофоретическая сила;  $\mathbf{n}_z$  — единичный вектор в направлении оси  $OZ$ .

Значения коэффициентов  $f_\mu$ ,  $f_{th}$  можно оценить следующим образом:

$$f_\mu = \frac{2}{3} \frac{N_2 + C_m \operatorname{Kn} N_4}{N_1 + C_m \operatorname{Kn} N_3},$$

$$\begin{aligned}
f_{th} = & 4K_{TS} \frac{\nu_{eS}}{R\delta T_{e\infty} t_{eS}^{1+\alpha}} \frac{G_1(1)}{N_1 + C_m \text{Kn} N_3} \left\{ \left( \frac{\lambda_{eS}}{\lambda_{iS}} + C_t \text{Kn} \omega_4 \right) \times \right. \\
& \times \left[ 1 + \text{Kn} \left( \beta'_R + \beta_B + 2C_V^* \frac{G_4(1)}{G_1(1)} \left( 1 - C_m \text{Kn} \frac{G_4^I(1) + G_1(1) - G_4(1)}{G_4(1)} \right) \right) \right] + \\
& \left. + \text{Kn} (\beta_R - \beta_B) \left[ \omega_4 + \frac{\lambda_{eS}}{\lambda_{iS}} \left( \frac{\alpha l^{(S)}}{1 + \alpha} - 2C_q \text{Kn} \right) \right] \right\}. \quad (4.3)
\end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned}
N_1(1) &= G_1(1)G_2^I(1) - G_2(1)G_1^I(1), & N_2(1) &= G_1(1)G_3^I(1) - G_3(1)G_1^I(1), \\
N_3(1) &= G_2(1)G_1^{II}(1) - G_1(1)G_2^{II}(1) + \left( 2 + \frac{l^{(S)}}{1 + \alpha} \right) (G_2(1)G_1^I(1) - G_1(1)G_2^I(1)), \\
N_4(1) &= G_3(1)G_1^{II}(1) - G_1(1)G_3^{II}(1) + \left( 2 + \frac{l^{(S)}}{1 + \alpha} \right) (G_3(1)G_1^I(1) - G_1(1)G_3^I(1)), \\
\nu_{eS} &= \nu_{e\infty} t_{eS}^{1+\beta}, & C_V^* &= C_V / K_{TS}.
\end{aligned}$$

Приравнивая полную силу  $\mathbf{F}$  к нулю, для скорости термофореза  $\mathbf{U}_{th}$  ( $\mathbf{U}_{th} = -\mathbf{U}_\infty$ ) твердой умеренно крупной нагретой частицы сферической формы получаем следующее выражение:

$$\mathbf{U}_{th} = -h_{th} |\nabla T| \mathbf{n}_z \quad (4.4)$$

( $h_{th} = f_{th}/f_\mu$ ).

При оценке коэффициентов  $f_\mu$ ,  $f_{th}$  и  $h_{th}$  необходимо учитывать, что индекс  $S$  соответствует значениям физических величин при средней относительной температуре поверхности частицы  $T_{iS}$ , которая определяется из (2.2); функции  $G_1(y)$ ,  $G_1^I(y)$ ,  $G_1^{II}(y)$ ,  $G_2(y)$ ,  $G_2^I(y)$ ,  $G_2^{II}(y)$ ,  $G_3(y)$ ,  $G_3^I(y)$ ,  $G_3^{II}(y)$ ,  $N_1(y)$ ,  $N_2(y)$ ,  $N_3(y)$  и  $N_4(y)$  вычисляются при  $y = 1$ ;  $G_1^I(y)$ ,  $G_1^{II}(y)$ , ... — первая и вторая производные от соответствующих функций.

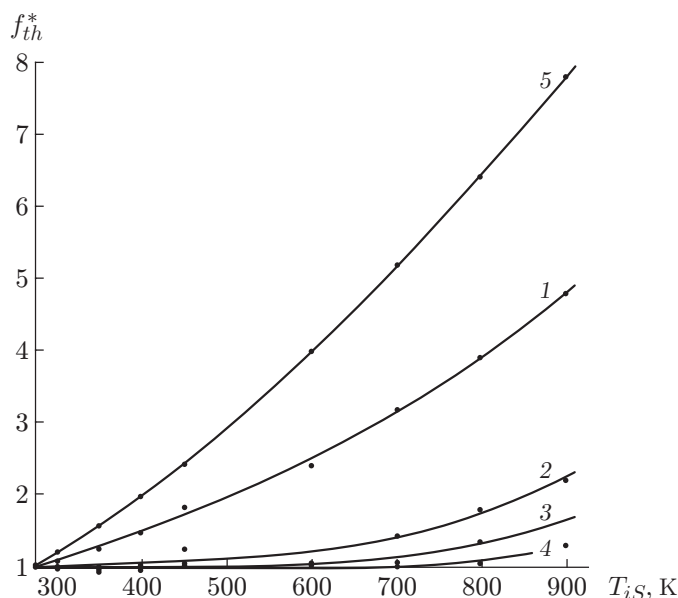
Формулы (4.2), (4.4) для силы и скорости термофореза можно использовать также при малых относительных перепадах температуры в окрестности частицы. В случае когда величина нагрева поверхности частицы мала, т. е. средняя температура поверхности незначительно отличается от температуры окружающей среды вдали от частицы ( $\Gamma_0 \rightarrow 0$ ), зависимостью коэффициентов молекулярного переноса (вязкости и теплопроводности) и плотности от температуры можно пренебречь. Тогда при  $y = 1$  имеем  $G_1 = 1$ ,  $G_1^I = -3$ ,  $G_1^{II} = 12$ ,  $G_1^{III} = -60$ ,  $G_2 = 1$ ,  $G_2^I = -1$ ,  $G_2^{II} = 2$ ,  $G_2^{III} = -6$ ,  $G_3 = 1$ ,  $G_3^I = 0$ ,  $G_3^{II} = 0$ ,  $G_3^{III} = 0$ ,  $N_1 = 2$ ,  $N_2 = 3$ ,  $N_3 = 6$ ,  $N_4 = 6$ . В этом случае формулы для силы и скорости термофореза совпадают с имеющимися в литературе (см., например, [2]). Полагая в формулах (4.2)–(4.4)  $\text{Kn} = 0$ , для силы и скорости термофореза нагретых крупных аэрозольных частиц сферической формы получаем такие же выражения, как в работе [8].

На рисунке приведены зависимости коэффициента  $f_{th}^* = f_{th}/f_{th}|_{T_{iS}=273 \text{ К}}$  от средней температуры  $T_{iS}$  при различных значениях числа Кнудсена для частиц меди, движущихся в воздухе при нормальных условиях. Значения коэффициентов  $\nu_{e\infty}$ ,  $\lambda_{e\infty}$ ,  $\lambda_{i0}$  взяты при  $T_{iS} = 273 \text{ К}$  из [12, 15]. При  $T_{iS} = 273 \text{ К}$  значение коэффициента  $f_{th}|_{T_{iS}=273 \text{ К}} = 6,178 \cdot 10^{-5}$ .

Проведенные с помощью найденных формул численные оценки показывают, что термофоретическая сила и скорость существенно зависят от числа Кнудсена и средней температуры поверхности частицы.

**Заключение.** Полученные в работе формулы позволяют оценить силу и скорость термофореза умеренно крупных нагретых твердых аэрозольных частиц сферической формы, когда средняя температура их поверхности существенно отличается от температуры





Зависимости  $f_{th}^*$  от средней температуры  $T_{iS}$  при различных значениях числа Кнудсена:

1 —  $Kn = 0,01$ , 2 —  $Kn = 0,05$ , 3 —  $Kn = 0,09$ , 4 —  $Kn = 0,20$ , 5 —  $Kn = 0$

газообразной среды вдали от них с учетом степенного вида зависимости коэффициентов молекулярного переноса (вязкости, теплопроводности) и плотности газообразной среды от температуры. Граничные условия записаны в линейном приближении по числу Кнудсена. Полученные формулы имеют общий вид. Численные оценки показывают, что термофоретическая сила и скорость существенно зависят от числа Кнудсена и от средней температуры поверхности частицы.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Epstein P. S. Zur theorie des radiometers // Z. Phys. 1929. Bd 54. N 7/8. S. 537–539.
2. Галоян В. С. Динамика капель в неоднородных вязких средах / В. С. Галоян, Ю. И. Яламов. Ереван: Луйс, 1985.
3. Berger C., Harvath H., Scindler W. The deposition of so or particles from hot gas streams through pipes // J. Aerosol Sci. 1995. V. 26. P. 211–218.
4. Selim A., Hossain M. A., Rees D. A. S. The effect of surface mass transfer on mixed convection flow past a heated vertical flat permeable plate with thermophoresis // Intern. J. Thermal Sci. 2003. V. 42. P. 973–982.
5. Малай Н. В., Щукин Е. Р., Стукалов А. А., Рязанов К. С. Гравитационное движение равномерно нагретой твердой частицы в газообразной среде // ПМТФ. 2008. Т. 49, № 1. С. 74–80.
6. Малай Н. В., Рязанов К. С., Щукин Е. Р., Стукалов А. А. О силе, действующей на нагретую сферическую каплю, движущуюся в газообразной среде // ПМТФ. 2011. Т. 52, № 4. С. 63–71.
7. Малай Н. В., Лиманская А. В., Щукин Е. Р., Стукалов А. А. Фотофорез нагретых крупных аэрозольных частиц сферической формы // Журн. техн. физики. 2012. Т. 82, вып. 10. С. 42–50.

8. Малай Н. В., Лиманская А. В., Шукин Е. Р. Термофоретическое движение нагретых крупных аэрозольных частиц сферической формы // ПМТФ. 2016. Т. 57, № 2. С. 164–171.
9. Бубенчиков А. М., Потекаев А. И., Бубенчиков М. А. Термофорез ультрамелких и наноразмерных частиц // Изв. вузов. Физика. 2013. Т. 56, № 7. С. 59–61.
10. Reineck P., Wienken C. J., Braun D. Thermophoresis of single stranded DNA // Electrophoresis. 2010. V. 31, N 2. P. 279–286.
11. Jerabek-Willemsen M., André T., Wanner A., et al. Microscale thermophoresis: interaction analysis and beyond // J. Molecular Structure. 2014. V. 1077. P. 101–113.
12. Бретшнайдер Ст. Свойства газов и жидкостей. Инженерные методы расчета. М.: Химия, 1966.
13. Ландау Л. Д. Механика сплошных сред / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. М.: Гостехтеоретиздат, 1954.
14. Поддоскин А. Б., Юшканов А. А., Яламов Ю. И. Теория термофореза умеренно крупных аэрозольных частиц // Журн. техн. физики. 1982. Т. 52, № 11. С. 2253–2262.
15. Юшканов А. А., Савков С. А., Яламов Ю. И. О зависимости коэффициентов скольжения от модели межмолекулярного взаимодействия // Инж.-физ. журн. 1986. Т. 51, № 4. С. 686–687.
16. Яламов Ю. И., Юшканов А. А., Савков С. А. О зависимости коэффициентов теплового и изотермического скольжения от температуры // Докл. АН СССР. 1987. Т. 296, № 5. С. 1107–1112.

*Поступила в редакцию 5/VI 2018 г.,  
после доработки — 5/XI 2018 г.  
Принята к публикации 24/XII 2018 г.*

---