

ЛИТЕРАТУРА

1. Тихонов А. Н. О становлении электрического тока в однородном проводящем пространстве. М., Изд-во АН СССР. Сер. геофиз., 1946, № 3.
2. Тихонов А. Н. О распределении переменного электромагнитного поля в слоистой среде.—«Докл. АН СССР», 1959, т. 125, № 5.
3. Тихонов А. Н. Об асимптотическом поведении интегралов, содержащих бесселевы функции.—«Докл. АН СССР», 1959, т. 126, № 5.
4. Тихонов А. П., Скугаревская О. А. О становлении электрического тока в неоднородной слоистой среде. М., Изд-во АН СССР. Сер. геофиз., 1950, № 4.
5. Дмитриев В. И. Расчет электромагнитного поля в методе частотного зондирования.— В кн.: Вычисл. методы и программирование. Изд. Моск. ун-та, 1965, вып. III.
6. Дмитриев В. И. Общий метод расчета электромагнитного поля в слоистой среде.— В кн.: Вычисл. методы и программирование. Изд. Моск. ун-та, 1968, вып. X.
7. Ваньян Л. Л. Основы электромагнитных зондирований. М., «Недра», 1965.
8. Михлин С. Г. Вариационные методы в математической физике. М., «Наука», 1970.

УДК 539.374

ОБ ОДНОЙ МОДЕЛИ УПРОЧНЯЮЩЕГОСЯ ПЛАСТИЧЕСКОГО МАТЕРИАЛА

Я. А. Каменярж

(Москва)

В работе [1] делается попытка построения феноменологической модели упрочняющегося упругопластического тела. Введены обозначения: Σ , Σ_{Δ} , $\Omega_{p\Delta}$ — тензоры напряжений, приращения напряжений, приращения пластических деформаций, σ_1 , σ_2 , σ_3 ($\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$) и Δe_1 , Δe_2 , Δe_3 — главные значения тензоров Σ и $\Omega_{p\Delta}$. В числе одиннадцати явно сформулированных гипотез принимается следующее основное допущение II: если направление главных осей Σ_{Δ} совпадает с направлением главных осей Σ , то направление главных осей $\Omega_{p\Delta}$ также совпадает с направлением главных осей Σ . Если догружение Σ_{Δ} не изменяет главных осей Σ , то пластические деформации находятся при помощи условия пластической несжимаемости и дифференциальных соотношений (допущение IV):

$$\begin{aligned}\Delta\gamma_{13} &= \frac{\Delta T_{13}}{g_{13}} + \frac{\Delta T_{12}}{2g_{12}}(1 + \lambda_{12}) + \frac{\Delta T_{23}}{2g_{23}}(1 + \lambda_{23}), \\ \Delta\gamma_{12} &= \frac{\Delta T_{13}}{2g_{13}}(1 + \lambda_{13}) + \frac{\Delta T_{12}}{g_{12}} - \frac{\Delta T_{23}}{2g_{23}}(1 - \lambda_{23}), \\ \Delta\gamma_{23} &= \frac{\Delta T_{13}}{2g_{13}}(1 - \lambda_{13}) - \frac{\Delta T_{12}}{2g_{12}}(1 - \lambda_{12}) + \frac{\Delta T_{23}}{g_{23}},\end{aligned}$$

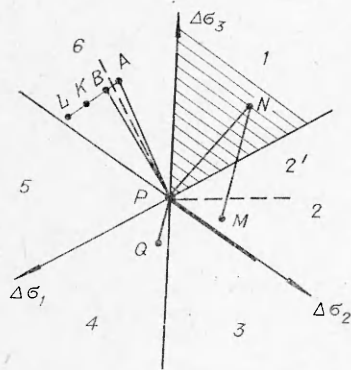
$$2T_{13} = \sigma_1 - \sigma_3, \quad 2T_{12} = \sigma_1 - \sigma_2, \quad 2T_{23} = \sigma_2 - \sigma_3; \quad \Delta\gamma_{ij} = \Delta e_i - \Delta e_j.$$

Свойства материала задаются здесь модулями g_{ij} , а величины параметров λ_{ij} находятся с учетом граничных условий при помощи допущения VII — принципа максимальности приращения пластической работы (максимум находится по λ_{ij} при дополнительных условиях $|\lambda_{ij}| \leq 1$). Величины модулей g_{ij} должны определяться из опытов, они различны в состоянии полной ($T \geq \tau_s$, $T_1 \geq \tau_{s1}$) и неполной ($T \geq \tau_s$, $T_1 < \tau_{s1}$) пластичности (через T , T_1 , T_2 обозначены величины T_{ij} в порядке их убывания, τ_s и τ_{s1} — характеристики материала, которые находятся экспериментально). Величины модулей g_{ij} зависят также от характера

догружения: $\Delta T > 0$, $\Delta T_1 > 0$, $\Delta T_2 > 0$ — активное догружение; $\Delta T < 0$, $\Delta T_1 < 0$, $\Delta T_2 < 0$ — общая разгрузка $\Omega_{p\Delta} = 0$ (допущение III); остальные типы догружения (соответствующие другим сочетаниям знаков ΔT , ΔT_1 , ΔT_2) — различные виды частичных разгрузок. В описываемой модели при частичной разгрузке продолжается пластическое деформирование, причем величины модулей g_{ij} изменяются по сравнению с их значениями в процессе активного догружения; при соответствующих ограничениях на ΔT , ΔT_1 , ΔT_2 наступает частичное упрочнение, при котором некоторые из g_{ij} обращаются в ∞ . Величины модулей g_{ij} изменяются при переходе от догружения одного типа к догружению другого.

Догружение, изменяющее направление главных осей Σ , представляется в виде суммы квазипростого (не изменяющего главные оси Σ) и ортогонального (не изменяющего главные значения Σ) догружений, соответствующие им $\Omega_{p\Delta}$ суммируются (допущение X). Для ортогонального догружения приняты соотношения (допущение XI) между компонентами $\Omega_{p\Delta}$ и Σ_{Δ} , аналогичные предложенным ранее в [2]. Эти соотношения содержат дополнительные характеристики материала, с помощью которых находится положение главных осей $\Omega_{p\Delta}$ относительно главных осей Σ и главные значения $\Omega_{p\Delta}$.

По части данных четырех известных серий испытаний трубчатых образцов определялись величины g_{ij} , которые далее использовались для расчета и сравнения с данными других опытов из тех же серий.



торная плоскость *) отличаются на конечную величину, даже когда точка K достигается нагружениями PVK и $PAVK$ (сколь угодно близкими и совпадающими на последнем участке BK), что едва ли пристрастно в модели упрочняющегося пластического материала.

2. В работе не вводится представление о поверхности нагружения. Наличие поверхности нагружения хорошо обосновано экспериментами, и в традиционных теориях пластичности принимаются определения поверхности нагружения: а) как геометрического места пределов упругости, б) как границы области напряженных состояний, получающихся в результате разгрузок, причем эти поверхности совпадают. В рамках развиваемых в работе представлений указанные понятия приводят к различным

* Состояние полной пластичности P достигнуто простым нагружением. При не изменяющихся главных оси Σ догружениях, направленных в разные области, которые показаны на фигуре, величины g_{ij} , λ_{ij} различны (догружение в область 1 — общая разгрузка, в область 4 — активное догружение, в области 2, 3, 5, 6 — частичные разгрузки). Штриховой линией отмечены границы областей, при догружении в которые наступает частичное упрочнение. $T = T_{13}$, $T_1 = T_{12}$, $T_2 = T_{23}$.

1. В работе [1], как отмечает автор, исследуется только случай однородного напряженного состояния. Однако и в этом случае описание поведения материала не завершено. Так повторные нагружения (т. е. следующие за процессом, состоящим из активного нагружения и частичной или полной разгрузки) рассмотрены лишь частично, для некоторых путей нагружения не указан даже характер деформирования — упругий или пластический. С другой стороны, в работе сделаны предположения о сильной зависимости модулей g_{ij} от пути нагружения (в частности, п. 1. 5, случай 3). Вычисленные с учетом этих предположений деформации, например, на пути KL (фигура — деви-

поверхностям вблизи точки нагружения: часть следа поверхности а) на девиаторной плоскости показана на фигуре жирной линией — геометрическое место пределов упругости при активных нагружениях вслед за общей разгрузкой из состояния P , поверхность б) — граница области $1-2'$.

3. Автор указывает, что некоторые соотношения в работе можно считать следствием постулата Дракера — Ильюшина, который приведен в следующей формулировке: «... в пластически деформируемой среде нет, кроме упругой энергии, других видов внутренней энергии, которые можно в процессе деформации преобразовать в работу». Совпадение или связь постулата в такой формулировке с постулатами Дракера и Ильюшина не обсуждается. Применение данных в работе соотношений к некоторым конкретным процессам нагружения показывает, что ни постулат пластичности Дракера, ни постулат пластичности Ильюшина не удовлетворяются. В самом деле, пусть происходит нагружение при неизменных главных осях Σ по пути $MNPQPNM$ (см. фигуру), процесс деформирования свободный (отсутствуют кинематические ограничения, задается Σ_Δ); пусть участок пути MNP лежит в начальной упругой области, в точке P достигается состояние неполной пластичности, PQ — активное догружение, QPN — общая разгрузка. Пластическое деформирование происходит тогда только при догружении PQ , причем $\lambda_{13}=0$, $\lambda_{12}=\lambda_{23}=1$, $g_{12}=g_{23}=g_0$ ([1], с. 152). В силу соотношений, предложенных для нахождения пластических деформаций, можно вычислить для пути $MNPQPNM$

$$\int [\sigma_{ij} - \sigma_{ij}(M)] de_{ij} = \Delta T_{12} \left[\frac{1}{2g_p} (t_1 - t_3) + \frac{1}{3g_0} (2t_1 - t_2 - t_3) \right] + \Delta T_{23} \times \\ \times \left[\frac{1}{2g_p} (t_1 - t_3) + \frac{1}{3g_0} (t_1 + t_2 - 2t_3) \right].$$

Здесь e_{ij} — компоненты тензора пластических деформаций; $\Delta T_{12} = T_{12}(Q) - T_{12}(P)$; $\Delta T_{23} = T_{23}(Q) - T_{23}(P)$; t_1, t_2, t_3 — главные значения тензора $\Sigma(P) - \Sigma(M)$; $g_p = g_{13}$. Если точки M, P, Q выбраны так, что $t_1 - t_3 < -2g_p(t_1 + t_2 - 2t_3)/3g_0$ и отношение $\Delta T_{12}/\Delta T_{23}$ достаточно мало, то для пути $MNPQPNM$

$$\int [\sigma_{ij} - \sigma_{ij}(M)] de_{ij} < 0,$$

что противоречит постулату Дракера. Аналогично можно указать замкнутый путь в пространстве полных деформаций ϵ_{ij} , на котором совершается отрицательная работа $\oint \sigma_{ij} de_{ij} < 0$, что противоречит постулату Ильюшина.

4. Основное допущение II, очевидно, справедливо для начально изотропных материалов в случае процессов нагружения с неизменяющимися главными осями Σ . Однако и для таких материалов в более общем случае нагружения оно неприемлемо. Например, пусть образец подвергается простому нагружению, затем разгрузке и новому нагружению; и пусть в новом нагружении направление главных осей Σ остается неизменным, но не совпадает с их направлением при первом нагружении. Как известно, основное свойство упрочняющегося материала состоит в том, что предварительное пластическое деформирование оказывает влияние на законы последующего. Это влияние может проявляться, в частности, в приобретении пластической анизотропии (через компоненты тензора пластических деформаций), что и приводит к нарушению основного допущения II.

5. Сравнение результатов опытов с расчетами по предложенной в работе схеме не является достаточно убедительным. Это связано со следующими обстоятельствами. При значительном количестве подбираемых из опыта и входящих в расчеты величин гипотезы, положенные в основу всей схемы, по отдельности не проверялись. Разобранные эксперименты содержат мало данных о путях нагружения с поворотом главных осей тензора на-

пряжений: в трех из четырех рассмотренных серий испытаний главные оси Σ в течение всего процесса нагружения оставались фиксированными, в последней серии в условиях плоского напряженного состояния поворот главных осей Σ был малым (не превышал $11,5^\circ$), кроме образца B_1 , при испытании которого поворот осей был значительным, однако осуществлялся лишь в упругой области в процессе разгрузки. Расхождение расчетов с данными испытаний ряда образцов достигает 30% для значений деформаций при заданных напряжениях (см. [1], фиг. 11, 14, 18 (№ 5), 26, 33 и др.).

Таким образом, работа не содержит законченного описания новой модели пластической среды, позволяющей ставить и решать достаточно общие механические задачи.

Поступила 8 VII 1975

ЛИТЕРАТУРА

1. Христианович С. А. Деформация упрочняющегося пластического материала.— «Изв. АН СССР. МТТ», 1974, № 2.
2. Христианович С. А., Шемякин Е. И. О плоской деформации пластического материала при сложном нагружении.— «Изв. АН СССР. МТТ», 1969, № 5, с. 138—149.

ПОЯСНЕНИЯ К СТАТЬЕ Я. А. КАМЕНЯРЖА «ОБ ОДНОЙ МОДЕЛИ УПРОЧНЯЮЩЕГОСЯ ПЛАСТИЧЕСКОГО МАТЕРИАЛА»

С. А. Христианович

(Москва)

В заметке Я. А. Каменяржа [1] содержатся замечания по поводу моей работы [2].

Начну с того, что с общим заключением автора заметки согласен в том смысле, что работа еще далеко не завершена.

В работе разобрана только часть вопросов, относящихся к сложным траекториям нагружения, особенно с различными повторными нагружениями и поворотом осей тензора нагружения. Это связано с ограниченностью имевшегося в моем распоряжении экспериментального материала, а также с отсутствием в то время адекватной микроскопической теории, которая позволяла бы определить изменение модулей при различных траекториях нагружения с помощью более ограниченного числа опытов. Не рассмотрены и вопросы деформации первоначально анизотропного материала.

Я вообще считаю, что едва ли возможно создание теории, которая, опираясь только на данные одного опыта, например на кривую простого растяжения, позволяла вычислить деформацию при сколь угодно сложных траекториях нагружения. В процессе пластической деформации при сложных траекториях нагружения могут происходить изменения структуры материала, отличные от тех, которые имеют место при простом растяжении первоначально изотропного образца. Задача сводится, таким образом, к постепенному расширению класса нагружений с указанием минимума необходимых экспериментальных данных. Неизвестно, когда этот процесс можно будет считать завершенным. Эта точка зрения всегда высказывалась А. А. Ильюшиным и практически осуществлялась в его работах и работах его последователей. Я ее тоже разделяю.