

8. Елагин М. П., Лебедев А. П., Шмелев А. В. Лабораторное моделирование устойчивости и динамики свободной жидкой зоны // Гидромеханика и тепло- и массообмен. — М.: Наука, 1982.
9. Ламб Г. Гидродинамика. — М.: ОГТИ, 1947.

г. Одесса

Поступила 30/V 1990 г.,
в окончательном варианте — 2/X 1990 г.

УДК 533.6.011

А. С. Фонарев

СКАЧОК И ВОЛНА РАСШИРЕНИЯ В ТРАНСЗВУКОВОМ ПОТОКЕ

Рассмотрена задача о распространении ударной и простой волн расширения в трансзвуковом потоке. Определены приближенные соотношения для параметров потока и проанализированы получающиеся асимптотические зависимости при стремлении к нулю малых параметров трансзвуковой теории. С использованием полученных соотношений показано, что при числе Маха $M \geq 1$ для обычно применяемого в теории индукции стенок труб условия Дарси отсутствует не зависящая от обтекаемого тела универсальная связь коэффициента оптимальной проницаемости с числом Маха набегающего потока, как это имеет место в линейной теории сверхзвукового потока.

А. А. Никольскому [1] удалось получить в случае сверхзвукового потока в трубе универсальную зависимость для коэффициента оптимальной проницаемости перфорированной стенки (с полным исключением ее влияния на поток в трубе), удовлетворяющей условию Дарси $v/u + R = 0$ (u, v — значения горизонтальной и вертикальной составляющей возмущенной скорости, R — коэффициент перфорации). В предположении о небольших отклонениях скорости от скорости набегающего потока им показано, что в неограниченном потоке как в ударной волне, так и в волне расширения, вызываемых обтекаемым телом, выполняется соотношение $v/u = -\sqrt{M_1^2 - 1}$, причем оно не зависит от параметров обтекаемого тела (M_1 — число Маха набегающего сверхзвукового потока). Это соотношение предложено взять в [1] в качестве условия для получения безиндукционного течения в сверхзвуковой трубе, для чего коэффициент проницаемости стенок должен удовлетворять соотношению $R_{opt} = \sqrt{M_1^2 - 1}$.

Ниже исследованы свойства течения в скачке и волне расширения, когда $M \approx 1$. Показано, что для сверхзвукового течения, мало отличающегося от звукового, уже нет единой зависимости для оптимального коэффициента проницаемости стенки, он в каждом случае течения есть переменная по длине стенки трубы величина и различная для каждого эксперимента.

1. Рассмотрим точные соотношения для косоугольного скачка уплотнения [2,3] (рис. 1):

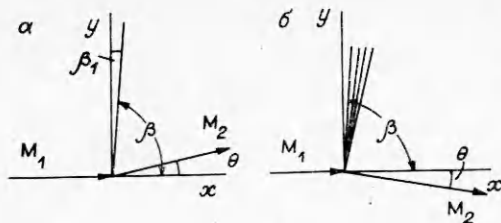
$$(1.1) \quad \frac{p_2}{p_1} - 1 = \frac{2\gamma}{\gamma + 1} (M_1^2 \sin^2 \beta - 1);$$

$$(1.2) \quad \operatorname{tg} \theta = \frac{\sin^2 \beta - 1/M_1^2}{(\gamma + 1)/2 - \sin^2 \beta + 1/M_1^2} \operatorname{ctg} \beta;$$

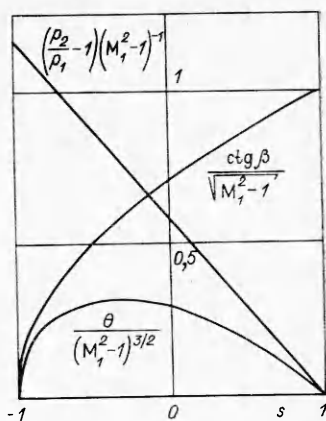
$$(1.3) \quad M_2^2 \sin^2(\beta - \theta) = \frac{1 + [(\gamma - 1)/2] M_1^2 \sin^2 \beta}{\gamma M_1^2 \sin^2 \beta - (\gamma - 1)/2}.$$

Здесь p — давление; θ — угол поворота потока, а β — угол наклона скачка, отсчитываемые от оси x ; β_1 — дополнительный угол, отсчитываемый от оси y ; индексы 1 и 2 относятся к состоянию потока перед скачком и после него; γ — показатель адиабаты.

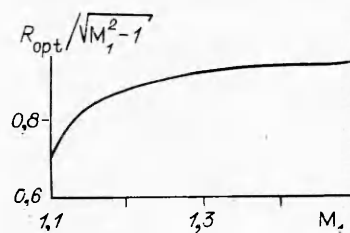
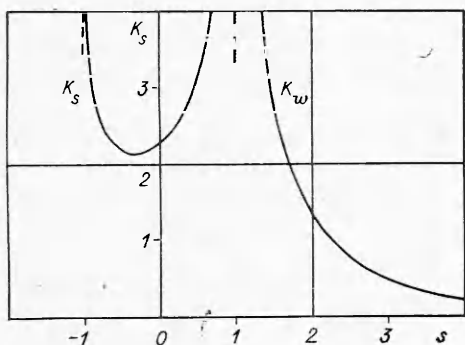
Как известно, околосзвуковой поток характеризуется двумя малыми параметрами, соотношение между которыми задает тот или иной трансзвуковой режим, определяемый параметром подобия. Для анализа течения около скачка уплотнения удобно выбрать параметры $M_1^2 - 1$ и $M_2^2 - 1$. При этом малыми величинами будут также $\theta \ll 1$ и $\beta_1 \ll 1$, которые находятся, как только заданы первые два параметра. Будем считать $M_1 > 1$, на знак величины $(M_2 - 1)$ условия налагать не будем, допуская также дозвуковой, близкий к скорости звука, режим.



Р и с. 1



Р и с. 2



Р и с. 4

Р и с. 3

Проводя разложение по малым параметрам в соотношениях (1.1)–(1.3), удерживая нужные члены, в главном приближении получим

$$(1.4) \quad \frac{p_2}{p_1} - 1 = \frac{\gamma}{\gamma + 1} (1 - s) (M_1^2 - 1);$$

$$(1.5) \quad \theta = \frac{1}{\sqrt{2}(\gamma + 1)} (1 - s) (1 + s)^{1/2} (M_1^2 - 1)^{3/2};$$

$$(1.6) \quad \text{ctg } \beta \approx \beta_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} (1 + s)^{1/2} (M_1^2 - 1)^{1/2};$$

$$(1.7) \quad \sin \beta = 1 - \frac{1}{4} (1 + s) (M_1^2 - 1),$$

где $s = (M_2^2 - 1)/(M_1^2 - 1)$. Учитывая, что в рамках теории малых возмущений в первом приближении для значений u и v (составляющих возмущенной скорости) имеют место соотношения $u = -\frac{i}{\gamma} \left(\frac{p_2}{p_1} - 1 \right)$, $v = \theta$,

находим

$$(1.8) \quad \frac{v}{u} = -\frac{1}{\sqrt{2}} (1 + s)^{1/2} (M_1^2 - 1)^{1/2}.$$

Малые величины независимы, поэтому для стоящих перед множителем $(M_1^2 - 1)$ выражений параметр s может быть выбран произвольно, ограничение на диапазон изменения s дает соотношение (1.6): $-1 \leq s \leq 1$.

Таким образом, выражения для коэффициентов при $(M_1^2 - 1)$ обладают особенностью — отсутствует двойной предел при независимом стремлении двух параметров к нулю. Давая разные значения s , получим соответственно различные коэффициенты. Эти зависимости представлены на рис. 2.

Рассмотрим некоторые характерные примеры. Пусть предельный переход осуществляется так, что $M_2 = 1$, $s = 0$. Тогда формулы для дав-

ления, угла поворота и наклона скачка примут вид

$$\frac{p_2}{p_1} - 1 = \frac{\gamma}{\gamma + 1} (M_1^2 - 1), \quad \theta = \frac{1}{\sqrt{2(\gamma + 1)}} (M_1^2 - 1)^{3/2}, \quad \operatorname{ctg} \beta = \frac{1}{\sqrt{2}} (M_1^2 - 1)^{1/2}.$$

Если же предельный переход соответствует прямому скачку (угол поворота потока равен нулю, $s = -1$), то имеем

$$\frac{p_2}{p_1} - 1 = \frac{2\gamma}{\gamma + 1} (M_1^2 - 1), \quad \theta = 0, \quad \operatorname{ctg} \beta = 0,$$

при этом за скачком скорость будет дозвуковой.

Правомочны и все остальные переходы. В частности, при $s = 1$ получается линия Маха, ей соответствует режим, хорошо известный из теории характеристик для уравнений сверхзвуковой газовой динамики: $\operatorname{ctg} \beta = \sqrt{M_1^2 - 1}$.

Каждый режим отвечает значению параметра подобия Кармана

$$K_s = (M_1^2 - 1)/\theta^{2/3} = 2^{1/3} (\gamma + 1)^{2/3} (1 + s)^{-1/3} (1 - s)^{-2/3}.$$

Отметим, что для трансзвукового режима в окрестности ударной волны величина K_s ограничена снизу ($s = -1/3$), $3 \cdot 4^{-2/3} (\gamma + 1)^{2/3} \leq K_s < \infty$.

Зависимость $K_s(s)$ показана на рис. 3. Минимальное значение K_s достигается в дозвуковой области за скачком. Переход через скорость звука за скачком ($M_2 = 1$) происходит при $s = 0$. Факт ограничения K_s снизу (невозможен режим с $K_s = 0$ в области вблизи скачка) следует учитывать при изучении течений со слабыми скачками в приближении уравнения Трикоми, где параметр трансзвукового подобия для всей области полагается равным нулю.

2. Рассмотрим течение в волне разрежения Прандтля — Майера, когда скорости потока перед волной ($M_1 \geq 1$) и за ней ($M_2 > 1$) близки к скорости звука (рис. 1, б). Проводя разложение по малым параметрам точных соотношений для волны расширения [2, 3], соответствующих углу поворота потока и значению давления, в первом приближении находим

$$(2.1) \quad \theta = \frac{2}{3(\gamma + 1)} [(M_2^2 - 1)^{3/2} - (M_1^2 - 1)^{3/2}];$$

$$(2.2) \quad \frac{p_2}{p_1} - 1 = \frac{\gamma}{\gamma + 1} [(M_1^2 - 1) - (M_2^2 - 1)].$$

Вводя, как и ранее, параметр $s = (M_2^2 - 1)/(M_1^2 - 1)$, имеем

$$(2.3) \quad \theta = \frac{2}{3(\gamma + 1)} (s^{3/2} - 1) (M_1^2 - 1)^{3/2};$$

$$(2.4) \quad \frac{p_2}{p_1} - 1 = \frac{\gamma}{\gamma + 1} (1 - s) (M_1^2 - 1), \quad s \geq 1;$$

$$(2.5) \quad \frac{v}{u} = \frac{2}{3} \frac{s^{2/3} - 1}{s - 1} (M_1^2 - 1)^{1/2}.$$

Решение, отвечающее волне расширения, также не обладает единственностью для коэффициентов в выражениях (2.3), (2.4); в зависимости от значения s получаются разные коэффициенты при стремлении $(M_1^2 - 1) \rightarrow 0$. Так, для случая, когда расширяется звуковой поток $M_1 = 1$ до значения M_2 (чему соответствует $s = \infty$, и поэтому предел следует вычислять из соотношений (2.1), (2.2)), находим

$$\theta = \frac{2}{3(\gamma + 1)} (M_2^2 - 1)^{3/2}, \quad \frac{p_2}{p_1} - 1 = -\frac{\gamma}{\gamma + 1} (M_2^2 - 1).$$

Этот режим отвечает трансзвуковому параметру $K_w = (M_1^2 - 1)/\theta^{2/3} = 0$. Из выражений (2.3), (2.4) видно, что другим значениям K_w соответствуют другие значения коэффициентов в формулах для угла поворота

потока и давления; K_w связана с s как $K_w = (3/2)^{2/3}(\gamma + 1)^{2/3}(s^{3/2} - 1)^{-1}$. Эта зависимость показана на рис. 3.

3. Такая многозначность полученных зависимостей в трансзвуковом диапазоне скоростей принципиально отличается от хорошо известных вполне однозначных соотношений для сверхзвукового режима течения, когда возмущения малы по сравнению с величиной $M_1^2 - 1$, т. е. $|M_2 - M_1| \ll M_1 - 1$.

Для слабых скачков уплотнения это условие равносильно предположению, что разница между углом наклона скачка и характеристики много меньше, чем угол отклонения скачка уплотнения от вертикали β_1 (см. рис. 1, *a*). Это условие дает дополнительную связь между параметрами (M_1 и M_2), приводит к замыканию системы (1.1)–(1.3) и обеспечивает однозначную зависимость коэффициентов от M_1 для всех углов отклонения потока, если они невелики. Поэтому зависимость оптимального коэффициента проницаемости стенки от M в сверхзвуковом потоке получается универсальной [1].

Для сверхзвукового течения, но в трансзвуковом режиме уже нет единой зависимости для оптимального коэффициента проницаемости, он в каждом случае течения есть переменная по длине стенки трубы величина и различная для каждого эксперимента. Для иллюстрации этого приведем пример расчета обтекания тонкого клина под нулевым углом атаки потоком газа, скорость которого немного больше, чем скорость звука. Угол полураствора клина $\theta = 1^\circ 22'$.

На рис. 4 показано, как меняется величина R_{opt} , отнесенная к $\sqrt{M_1^2 - 1}$, с изменением M_1 в области над клином за скачком уплотнения. Расчеты выполнены по точным газодинамическим соотношениям и таблицам [4].

ЛИТЕРАТУРА

1. Гродзовский Г. Л., Никольский А. А., Свищев Г. П., Таганов Г. И. Сверхзвуковые течения газа в перфорированных границах.— М.: Машиностроение, 1967.
2. Овсянников Л. В. Лекции по газовой динамике.— М.: Наука, 1981.
3. Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа.— М.: Наука, 1973.
4. Ферри А. Аэродинамика сверхзвуковых течений.— М.: ГИТТЛ, 1953.

г. Жуковский

Поступила 12/Х 1989 г.,
в окончательном варианте — 27/ІХ 1990 г.

УДК 533.69

Н. Ф. Воробьев

ОБ ОДНОМ ТОЧНОМ РЕШЕНИИ ЗАДАЧИ О КОНЦЕВОМ ЭФФЕКТЕ КРЫЛА КОНЕЧНОГО РАЗМАХА В СВЕРХЗВУКОВОМ ПОТОКЕ

Задача обтекания сверхзвуковым потоком тонкого крыла конечного размаха, рассматриваемая в линейной постановке, сводится к решению волнового уравнения для потенциала скорости. Условия непротекания с поверхности крыла при этом сносятся на базовую плоскость, а в остальной части этой плоскости (вне проекции крыла) на газодинамические параметры потока накладываются некоторые условия. Решение задачи, когда потенциал скорости определяется через нормальную произвольную в базовой плоскости Φ'_η , а вне проекции крыла ставится условие обращения потенциала в нуль, дано в [1]. Газодинамические параметры потока (давление, скос потока вне крыла), получаемые из этого решения, в окрестности дозвуковой передней кромки принимают физически не оправданные бесконечные значения. В [2] выражения для потенциала скорости и его производных представлены через первые и вторые производные потенциала на базовой плоскости, что дает возможность ставить дополнительные граничные условия и получать решения задачи обтекания, в которых газодинамические параметры потока находятся в классе ограниченных функций.