

Перемещения в куполе определяются по формулам (2.6). В качестве примера обратимся к сферическому куполу постоянной толщины, нагруженному и закрепленному в соответствии с зависимостями (4.4), (4.5). Примем, что предварительное армирование отсутствует ($N = 3$), что величины углов армирования ψ_1, ψ_2, ψ_3 постоянны и $G(\varphi) = 0$.

Значения G_1 (сплошные кривые), G_2 (штриховые), G_3 (штрихпунктирные), при которых в рассматриваемом куполе реализуется безмоментное состояние, подсчитанные по соотношениям (5.1)–(5.4), (4.11), приведены на фиг. 4. Кривые с крестиками отвечают случаю $G_1 = G_2$. При счете взято: $\theta_0 = \pi$, $\varphi_1 = \pi/4$, $\varphi_* = (7/16)\pi$, $p/q_0 = 0,5$, $q_*/q_0 = 15$, $m = 1$, $\nu = 0,3$, $\psi_1 = 60^\circ$, $\psi_2 = -60^\circ$, $\psi_3 = 90^\circ$. Кривые 1–5 соответствуют значениям $\theta = 0, \pi/4, \pi/2, (3/4)\pi, \pi$. Отметим также наличие равенств $G_1(\varphi, \theta) = G_2(\varphi, -\theta)$, $G_3(\varphi, \theta) = G_3(\varphi, -\theta)$.

Поступила 20 X 1981

ЛИТЕРАТУРА

1. Немировский Ю. В., Старостин Г. И. О возможности реализации безмоментного состояния оболочек путем армирования. — ДАН СССР, 1971, т. 196, № 4.
2. Немировский Ю. В., Старостин Г. И. Безмоментные упругие армированные оболочки нулевой гауссовой кривизны. — ПМТФ, 1975, № 6.
3. Немировский Ю. В., Старостин Г. И. Безмоментные армированные осесимметричные оболочки. — Изв. АН СССР. МТТ, 1972, № 3.
4. Повожилов В. В. Теория тонких оболочек. Л.: Судпромгиз, 1962.
5. Амбарцумян С. А. Теория анизотропных оболочек. М.: Физматгиз, 1961.
6. Гольденвейзер А. Л. Теория упругих тонких оболочек. М.: Наука, 1976.
7. Немировский Ю. В. Об упругопластическом поведении армированного слоя. — ПМТФ, 1969, № 6.

УДК 534.1

ИЗЛУЧЕНИЕ УПРУГИХ ВОЛН В ОДНОМЕРНЫХ СИСТЕМАХ ДВИЖУЩИМСЯ ИСТОЧНИКОМ

С. В. Крысов, С. А. Сьянов

(Горький)

Излучение волн в среде равномерно движущимся источником заданной частоты Ω характеризуется эффектом Допплера [1] — смещением частоты излучаемых волн по сравнению с частотой источника. В случае $\Omega = 0$ явление излучения принимает форму эффекта Вавилова — Черенкова [2] и возможно лишь при условии, когда скорость движения источника превышает наименьшую фазовую скорость распространения волн в среде [3].

Указанные явления достаточно подробно изучены применительно к электродинамическим системам [4, 5]. Для упругих систем, где источником может служить движущееся локальное поле деформаций, вызванное, например, действием подвижной нагрузки, подобные явления даже в одномерном случае имеют свои особенности, обусловленные спецификой дисперсии упругих волн. Изучение этих особенностей приобретает особую важность из-за необходимости решения вопросов о возбуждении вибраций применительно к широкому кругу технических систем и устройств: силовых передач с гибкими связями, лентопротяжных и перемоточных механизмов [6], канатных подъемников, проката и волочения проволоки [7] и др.

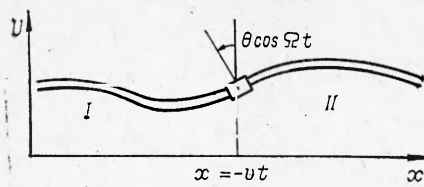
В данной работе на примере изгибных колебаний стержня рассмотрены режимы возбуждения волн движущимся вибрирующим закреплением.

Рассмотрим однородный бесконечный стержень, вдоль которого с постоянной скоростью v движется втулка, совершающая периодическое с частотой Ω движение поворота относительно центра тяжести. Изгибные колебания стержня $U(x, t)$ в приближении технической теории [8] описываются уравнением

$$(1) \quad U_{tt} + \alpha^2 U_{xxxx} = 0$$

с условиями на подвижной опоре

$$(2) \quad U|_{x=-vt} = 0, \quad U_x|_{x=-vt} = \theta \cos \Omega t,$$



Ф и г. 1

где $\alpha^2 = \beta/\rho$; β — коэффициент изгибной жесткости; ρ — погонная плотность стержня; θ — амплитуда колебаний втулки.

Полагая процесс возбуждения изгибных колебаний установившимся, решение задачи (1), (2) слева (область I) и справа (область II, см. фиг. 1) от границы $x = -vt$ будем искать в виде бегущих волн:

$$(3) \quad I, II U(x, t) = I, II A \cos(I, II \omega t + I, II kx + I, II \varphi).$$

Причем среди возможных решений (3) физически реализуемыми будем считать те, которые соответствуют ограниченным прогибам на бесконечности и удовлетворяют условию излучения Мандельштама [9], т. е. отводят энергию от источника.

Частоты и волновые числа излучаемых волн определяются из уравнений

$$(4) \quad -\omega^2 + \alpha^2 k^4 = 0, \quad \omega - vk = \Omega,$$

первое из которых определяет дисперсионные свойства системы, а второе выражает равенство фаз волн (3) фазе колебания источника при $x = -vt$.

Рассмотрим сначала случай излучения постоянным источником, т. е. источником, частота которого равна нулю ($\Omega = 0$). Определяя из (4) волновые числа и частоты, а также амплитуды возбуждаемых колебаний, из (2) получаем следующее решение:

$$I U(x, t) = (\theta\alpha/v) \cos(v^2 t/\alpha + vx/\alpha + \pi/2), \quad II U(x, t) = 0.$$

Оно представляет собой волну, отводящую энергию со скоростью $v_{гр} = 2v$, $v_{гр} = d\omega/dk$ в направлении движения границы $-x$. Появление такой волны вызвано вследствие эффекта Вавилова — Черенкова излучением энергии постоянного движущегося поля деформаций, обусловленного статическим изгибающим моментом на границе $x = -vt$. Особенность проявления этого эффекта выражается в том, что излучение наступает при сколь угодно малой скорости движения источника, поскольку для данной модели стержня наименьшая фазовая скорость распространения изгибных волн равна нулю.

В случае периодического источника $\Omega \neq 0$, разрешая систему (4), выбираем лишь те пары значений ω и k , которым соответствуют физически реализуемые решения (3):

$$(5) \quad I k_{1,2} = \frac{\pm v \pm \sqrt{v^2 + 4\alpha\Omega}}{2\alpha}, \quad I \omega_{1,2} = \frac{\pm v^2 \pm v \sqrt{v^2 + 4\alpha\Omega} + 2\alpha\Omega}{2\alpha},$$

$$II k_{1,2} = \frac{\pm v \mp \sqrt{v^2 + 4\alpha\Omega}}{2\alpha}, \quad II \omega_{1,2} = \frac{\pm v^2 \mp v \sqrt{v^2 + 4\alpha\Omega} + 2\alpha\Omega}{2\alpha}.$$

Из выражений (5) следует, что процесс излучения вибраций характеризуется двумя качественно различными режимами в зависимости от значений v .

При скоростях $v < 2\sqrt{\alpha\Omega}$ решение (3) имеет вид

$$I U(x, t) = I U_1 + I U_2 = \frac{-\theta\alpha}{(v^2 + v \sqrt{v^2 + 4\alpha\Omega} + 2\alpha\Omega)^{1/2}} \times$$

$$\times \left[\cos \left(\frac{v^2 + v \sqrt{v^2 + 4\alpha\Omega} + 2\alpha\Omega}{2\alpha} t - \frac{v + \sqrt{v^2 + 4\alpha\Omega}}{2\alpha} x + I \varphi \right) - \right.$$

$$\left. - \exp \left[\frac{(4\alpha\Omega - v^2)^{1/2}}{2\alpha} (x + vt) \right] \cos \left(\frac{2\alpha\Omega - v^2}{2\alpha} t - \frac{v}{2\alpha} x + I \varphi \right) \right],$$

$$II U(x, t) = II U_1 + II U_2 = \frac{-\theta\alpha}{(v^2 - v \sqrt{v^2 + 4\alpha\Omega} + 2\alpha\Omega)^{1/2}} \times$$

$$\times \left[\cos \left(\frac{v^2 - v \sqrt{v^2 + 4\alpha\Omega} + 2\alpha\Omega}{2\alpha} t + \frac{v + \sqrt{v^2 + 4\alpha\Omega}}{2\alpha} x + \text{II}\varphi \right) - \right. \\ \left. - \exp \left[\frac{(4\alpha\Omega - v^2)^{1/2}}{-2\alpha} (x + vt) \right] \cos \left(\frac{2\alpha\Omega - v^2}{2\alpha} t - \frac{v}{2\alpha} x + \text{II}\varphi \right) \right],$$

$$\text{где } \text{I}\varphi = \text{arctg} \left[\frac{2v + (v^2 + 4\alpha\Omega)^{1/2}}{(4\alpha\Omega - v^2)^{1/2}} \right]; \quad \text{II}\varphi = \text{arctg} \left[\frac{2v - (v^2 + 4\alpha\Omega)^{1/2}}{(4\alpha\Omega - v^2)^{1/2}} \right],$$

и представляет собой четыре волны: по две слева и справа от источника $\text{I}U_{1,2}, \text{II}U_{1,2}$. Две из них имеют постоянные амплитуды и отводят энергию от источника со скоростями

$$\text{I,II}v_{\text{гп1}} = v \pm \sqrt{v^2 + 4\alpha\Omega}$$

в направлении $+x$ соответственно. Две другие волны в переносе энергии не участвуют, поскольку их групповые скорости по модулю и направлению совпадают с v , а амплитуды стремятся к нулю при $x \rightarrow \mp\infty$. Эти неоднородные волны являются локальной характеристикой источника при излучении.

Данный режим качественно не отличается от режима излучения неподвижным источником $v = 0$. Движение же, согласно эффекту Доплера, приводит лишь к изменению пространственных характеристик и частот излучаемых волн. Вычисляя усредненные на периоде плотности энергии $\epsilon = \frac{1}{2}(\rho U_t^2 + \beta U_{xx}^2)$ и плотности потока энергии $S = \epsilon v_{\text{гп}}$ этих волн, можно показать, что процесс излучения характеризуется следующими адиабатическими инвариантами:

$$\frac{I_{\epsilon_1}}{I_{\omega_1}} = \frac{\text{II}_{\epsilon_1}}{\text{II}_{\omega_1}} = \frac{1}{4} \theta^2 (\beta\rho)^{1/2}, \quad \frac{\text{I}S_1}{I_{\omega_1} I_{k_1}} = \frac{\text{II}S_1}{\text{II}_{\omega_1} \text{II}_{k_1}} = \frac{1}{2} \theta^2 \beta.$$

Отметим, что аналогичные инварианты выполняются и в случае двойного эффекта Доплера [10, 11].

При $v > 2\sqrt{\alpha\Omega}$ решение (3) также представляет собой суперпозицию четырех волн от источника соответственно слева и справа

$$\text{I}U(x, t) = \text{I}U_1 + \text{I}U_2 = \frac{-2\alpha\theta}{2v + (v^2 + 4\alpha\Omega)^{1/2} + (v^2 - 4\alpha\Omega)^{1/2}} \times \\ \times \left[\cos \left(\frac{v^2 + v \sqrt{v^2 + 4\alpha\Omega} + 2\alpha\Omega}{2\alpha} t + \frac{v + \sqrt{v^2 + 4\alpha\Omega}}{2\alpha} x + \frac{\pi}{2} \right) + \right. \\ \left. + \cos \left(\frac{v^2 + v \sqrt{v^2 - 4\alpha\Omega} + 2\alpha\Omega}{2\alpha} t + \frac{v + \sqrt{v^2 - 4\alpha\Omega}}{2\alpha} x - \frac{\pi}{2} \right) \right], \\ \text{II}U(x, t) = \text{II}U_1 + \text{II}U_2 = \frac{-2\alpha\theta}{2v - (v^2 + 4\alpha\Omega)^{1/2} - (v^2 - 4\alpha\Omega)^{1/2}} \times \\ \times \left[\cos \left(\frac{v^2 - v \sqrt{v^2 + 4\alpha\Omega} + 2\alpha\Omega}{2\alpha} t + \frac{v - \sqrt{v^2 + 4\alpha\Omega}}{2\alpha} x + \frac{\pi}{2} \right) + \right. \\ \left. + \cos \left(\frac{v^2 - v \sqrt{v^2 - 4\alpha\Omega} + 2\alpha\Omega}{2\alpha} t + \frac{v - \sqrt{v^2 - 4\alpha\Omega}}{2\alpha} x - \frac{\pi}{2} \right) \right].$$

Каждая из волн имеет постоянную амплитуду и участвует в переносе энергии. Волны $\text{I}U_{1,2}$ отводят энергию в направлении $-x$ со скоростями

$$\text{I}v_{\text{гп1,2}} = v + \sqrt{v^2 \pm 4\alpha\Omega},$$

две другие волны отводят энергию в противоположную от источника сторону со скоростями

$$\text{II}v_{\text{гп1,2}} = v - \sqrt{v^2 \pm 4\alpha\Omega}.$$

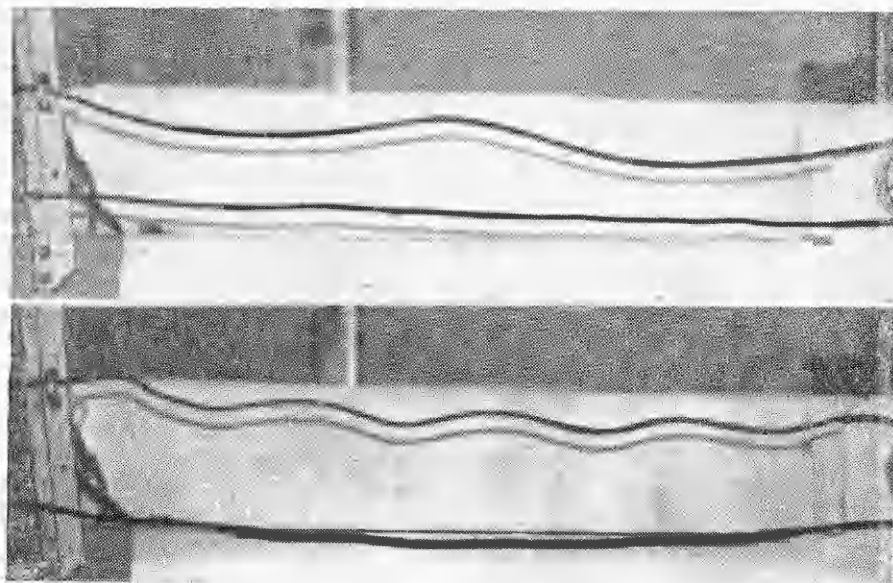
Особенность излучения в данном случае состоит в том, что наряду с волнами ${}^{I,II}U_1$ излучаются еще две волны ${}^{I,II}U_2$, которые при малых скоростях $v < 2\sqrt{\alpha\Omega}$ служили лишь локальной характеристикой источника. Это обусловлено тем, что, начиная со скоростей источника, превышающих некоторое значение $v = 2\sqrt{\alpha\Omega}$, становится возможным излучение «дополнительной» энергии (за счет движения источника) посредством бегущих волн подобно тому, как это происходит в случае эффекта Вавилова — Черепкова.

Заметим, что приведенные результаты остаются справедливыми и при неподвижном источнике, но движущейся среде. Это позволяет наблюдать указанные режимы излучения на простых технических системах, например на силовых передачах с гибкой связью.

Так, излучение Вавилова — Черенкова наблюдалось при протяжке круглого резинового стержня через неподвижную опору, в качестве которой использовалась фторопластовая шайба, внутренний диаметр которой совпадал с диаметром стержня d . Необходимый угол наклона по отношению к такой границе обеспечивался как прогибом стержня под действием силы тяжести, так и под действием центробежных сил, возникающих при протяжке. Стержень, используемый в эксперименте, имел следующие параметры: $l = 96$ см, $\rho = 0,45$ г/см, $d = 0,8$ см, $T = 1-1,5 \cdot 10^6$ дин, $\beta = 381478,88$ дин·см², где l — длина рабочего участка стержня, T — сила продольного натяжения стержня. Скорость протяжки изменялась от 0 до 19 м/с.

Начиная со скоростей $v > c_0$, где $c_0 = \sqrt{T/\rho}$ — наименьшая фазовая скорость распространения волн, в стержне наблюдалось возбуждение поперечных колебаний, пространственный период которых уменьшался по мере возрастания v . Так, при $T = 1032995$ дин и $v = 1587$ см/с возбуждались волны длиной $\lambda = 64$ см; при $T = 1454047,6$ дин и $v = 1817$ см/с $\lambda = 21,3$ см (фиг. 2), что с погрешностью не более чем 5% отличается от результатов теоретического расчета. Если пространственный период волн был кратен удвоенной длине рабочего участка $2l = \lambda N$ ($N = 1, 2, 3, \dots$), то в силу резонансных свойств системы амплитуда колебаний была наибольшей.

В заключение отметим, что поскольку каждому значению v в указанных режимах соответствует определенная частота возбуждаемых колебаний, то при неравномерном движении источника, по-видимому, возможно



Ф и г. 2

возбуждение колебаний с широким спектром подобно тому, как двойной эффект Доплера при периодическом движении границы приводит к генерации импульсов [12].

Авторы признательны А. И. Весницкому за предложенную идею, обсуждения и замечания.

Поступила 27 XI 1981

ЛИТЕРАТУРА

1. Эйнштейн А. К электродинамике движущихся сред.— В кн.: Принцип относительности. Л., 1935.
2. Франк И. М. Оптика источников света, движущихся в преломляющих средах.— УФН, 1959, т. 68, вып. 3.
3. Тамм И. Е. Общие свойства излучения, испускаемого системами, движущимися со сверхсветовыми скоростями, и некоторые приложения к физике плазмы.— Там же.
4. Болотовский Б. М., Гинзбург В. Л. Эффект Вавилова — Черенкова и эффект Доплера при движении источников со скоростью больше скорости света в вакууме.— УФН, 1972, т. 106, вып. 4.
5. Болотовский Б. М., Столяров С. Н. Современное состояние электродинамики движущихся сред.— В кн.: Эйнштейновский сборник. М.: Наука, 1976.
6. Филиппов А. П., Кохмашок С. С., Воробьев Ю. С. Воздействие динамических нагрузок на элементы конструкций. Киев: Наукова думка, 1974.
7. Светлицкий В. А. Механика гибких стержней и нитей. М.: Машиностроение, 1978.
8. Вибрации в технике. Справочник. М.: Машиностроение, 1978.
9. Мандельштам Л. И. Лекции по оптике теории относительности и квантовой механике.— Сб. трудов, т. 2. М.: Изд-во АН СССР, 1947.
10. Островский Л. А., Степанов Н. С. Нерезонансные параметрические явления в распределенных системах.— Изв. высш. учеб. заведений. Сер. Радиофизика, 1971, т. 14, № 4.
11. Весницкий А. И., Потапов А. И. Теория колебаний распределенных систем. Ч. 1. Горький: изд. Горьк. ун-та, 1977.
12. Весницкий А. И., Крысов С. В. Генерация импульсов в распределенных системах с подвижными границами. — Письма в ЖТФ, 1977, т. 3, вып. 19.

Зав. редакцией Н. С. Калашикова
Художественный редактор Э. С. Филонычева
Технический редактор Г. Я. Герасимчук
Корректоры С. В. Блинова, Е. Н. Зимина

Сдано в набор 06.10.82. Подписано к печати 20.12.82. МН-00324. Формат 70×108^{1/16}. Высокая печать. Усл. печ. л. 14. Усл. кр.-отт. 14,3. Уч.-изд. л. 16. Тираж 1692 экз. Заказ № 363.

Издательство «Наука», Сибирское отделение. 630099, Новосибирск, 99, Советская, 18.
4-я типография издательства «Наука». 630077, Новосибирск, 77, Станиславского, 25.