Прикладная механика и техническая физика, 1997, т. 38, № 6

АСИМПТОТИКА КАТЯЩИХСЯ УЕДИНЕННЫХ ВОЛН

УДК 532.51

Б. В. Приходько

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск

Известно, что форма свободной поверхности вязкого слоя, стекающего по наклонной плоскости при небольших числах Вебера и числах Рейнольдса, близких к критическому, может быть приближенно описана уравнением типа Кортевега — де Вриза с решением в виде уединенной волны [1–6].

В данной работе строится соответствующее асимптотическое решение полной системы уравнений Навье — Стокса и граничных условий. Анализ старших членов разложения выявляет асимметрию решения, которая порождает дополнительное условие разрешимости, связанное с групповой инвариантностью исходной задачи. Это условие удовлетворяется тождественно по групповому параметру за счет установления зависимости между числом Рейнольдса основного потока и параметрами соответствующей ему уединенной волны. Характер зависимости показывает, что локально ветвление идет в докритическую область для плоскопараллельного потока.

1. Постановка задачи в переменных типа Мизеса. Рассматривается установившееся течение слоя вязкой несжимаемой жидкости по плоскости, наклоненной под углом α к горизонту. Система координат движется параллельно дну со скоростью волны c. Начало координат выбрано на невозмущенной свободной границе. Ось x направлена вверх по потоку, ось y — в сторону дна. Течение, ограниченное твердым дном ($y = 1$) и свободной поверхностью ($y = h(x)$), подчинено уравнениям Навье — Стокса, которые с учетом соотношения Нуссельта $\mathrm{Re}\,\mathrm{Fr}\,\sin\alpha = 3$, выполненного для плоскопараллельного потока [2], принимают вид

$$\mathrm{Re}\,(\psi_y\psi_{xy} - \psi_x\psi_{yy}) = -3 + \triangle\psi_y - \mathrm{Re}\,p_x; \tag{1.1}$$

$$\mathrm{Re}\,(-\psi_y\psi_{xx} + \psi_x\psi_{xy}) = 3\mathrm{ctg}\,\alpha - \triangle\psi_x - \mathrm{Re}\,p_y, \tag{1.2}$$

где $\psi(x,y)$ — функция тока; $\mathrm{Re} = Q/\nu$ — число Рейнольдса; $\mathrm{Fr} = gH^3/Q^2$ — число Фруда; H — невозмущенная глубина слоя; Q — расход в неподвижной системе координат. На свободной границе и дне выполнены два динамических и три кинематических условия:

$$\psi_{yy} - \psi_{xx} - \frac{4h'}{1-h'^2}\psi_{xy} = 0, \quad y = h(x); \tag{1.3}$$

$$-\mathrm{Re}\,p = 2\frac{1+h'^2}{1-h'^2}\psi_{xy} + \frac{\mathrm{We}}{3}\frac{h''}{(1+h'^2)^{3/2}}, \quad y = h(x), \tag{1.4}$$

$$\psi(x,h(x)) = 0, \qquad \psi(x,1) = c - 1, \qquad \psi_y(x,1) = c. \tag{1.5}$$

Здесь $\mathrm{We} = \mathrm{Re}\,\sigma H\,/\,Q^2$ — число Вебера; σ — коэффициент поверхностного натяжения.

Ищется решение задачи (1.1)–(1.5) типа уединенной волны, выходящее на бесконечности на плоскопараллельный поток с функцией тока

$$\Psi(\eta) = \frac{1}{2}\eta^3 + \frac{3}{2}\lambda\eta, \qquad \lambda = \frac{2}{3}c - 1, \tag{1.6}$$

где η — лагранжева координата, совпадающая на бесконечности с эйлеровой координатой y. Следуя [1], в задаче (1.1)–(1.5) в качестве поперечной независимой переменной выберем лагранжеву координату η, связанную с функцией тока формулой (1.6), а в качестве зависимой — функцию $\omega(x,\eta)$, связанную с эйлеровой координатой y формулой

$$y(x,\eta) \equiv 1 + \int\limits_1^\eta \exp\left[-\left(\frac{\omega(x,t)}{\Psi'(t)}\right)_t\right] dt = \eta - \frac{\omega(x,\eta)}{\Psi'(\eta)} + O(\omega^2)$$

и удовлетворяющую условиям

$$\omega(x,1) = \omega_\eta(x,1) = 0. \tag{1.7}$$

В рассматриваемом случае безразмерная скорость волны $c \approx 3$, поэтому $\Psi'(\eta)$ отличается от нуля на отрезке $[0,1]$.

Условия (1.5) теперь выполняются тождественно. Исключение давления из уравнений Навье — Стокса приводит к интегродифференциальному уравнению в области $0 < \eta < 1$:

$$\begin{gathered}\omega_{\eta\eta\eta} = 3\exp\left[-3\left(\frac{\omega}{\Psi'}\right)_\eta\right] - 3 + 9\left(\frac{\omega}{\Psi'}\right)_\eta - 2\Psi'\left(\frac{\omega}{\Psi'}\right)^2_{\eta\eta} + \\ +\left\{-3\operatorname{ctg}\alpha\, y_x + \left[\frac{2\Psi'}{y_\eta}\frac{1+y_x^2}{1-y_x^2}\left(\frac{y_x}{y_\eta}\right)_\eta - \frac{\mathrm{We}}{3}\frac{y_{xx}}{(1+y_x^2)^{3/2}}\right]_x\right\}\Bigg|_{\eta=0} y_\eta^3 + \\ + y_\eta^3 \int\limits_0^\eta \left[(z_\eta y_x - z_x y_\eta)_x - \mathrm{Re}\,\Psi'^2\left(\frac{y_x}{y_\eta}\right)_{xx}\right] d\eta' - \mathrm{Re}\,\Psi'^2 y_{x\eta} + \\ + \mathrm{Re}\,\Psi'^2 y_\eta^2 y_x\left(\frac{y_x}{y_\eta}\right)_x - z_\eta y_\eta^2 y_x^2 - y_\eta^2\left[z - \frac{1}{y_\eta}\left(\frac{\Psi'}{y_\eta}\right)_\eta\right]_\eta + z_x y_\eta^3 y_x \\ \left(z \equiv \Delta\psi = \frac{1}{y_\eta}\left(\frac{\Psi'}{y_\eta}\right)_\eta - \Psi'\left(\frac{y_x}{y_\eta}\right)_x + \frac{y_x}{y_\eta}\left(\frac{\Psi' y_x}{y_\eta}\right)_\eta\right).\end{gathered} \tag{1.8}$$

Задача замыкается граничным условием (1.3), которое в новых переменных принимает вид

$$\omega_{\eta\eta} - \frac{2}{\lambda}\omega = -\frac{3}{2}\lambda\, y_\eta^2\left[\left(\frac{y_x}{y_\eta}\right)_x + \frac{3+y_x^2}{1-y_x^2}\frac{y_x}{y_\eta}\left(\frac{y_x}{y_\eta}\right)_\eta\right], \quad \eta = 0. \tag{1.9}$$

Задача (1.7)–(1.9) имеет то преимущество, что ее линейная часть в предположении малости Re и котангенса угла наклона является задачей с постоянными коэффициентами. Последняя изучалась в [7], где были найдены необходимые и достаточные условия ее разрешимости, построена функция Грина и даны соответствующие оценки.

2. Построение асимптотического решения. В задаче (1.7)–(1.9) сделаем растяжение продольной переменной $\xi = \varepsilon x$ и представим решение в виде ряда

$$\omega(\xi,\eta) = \varepsilon^2 \sum_{k=0}^{\infty} \omega_k(\xi,\eta)\varepsilon^k. \tag{2.1}$$

Кроме того, согласно [1], положим

$$2/\lambda = 2 - \varepsilon^2, \tag{2.2}$$

предполагая близость спектрального параметра $2/\lambda$ собственному значению линейной задачи. Равенство (2.2) связывает скорость распространения волны с масштабом длины ε:

$$c = \frac{3}{2}(1+\lambda) = 3 + \frac{3\varepsilon^2}{4-2\varepsilon^2} = 3 + \frac{3}{4}\varepsilon^2 + O(\varepsilon^4).$$

Число Рейнольдса будем считать неизвестной функцией параметров задачи и искать в виде ряда $\mathrm{Re} = R_0 + \varepsilon\, R_1 + \varepsilon^2\, R_2 + \ldots$, число Вебера предполагается свободным параметром порядка единицы.

В результате из задачи (1.7)-(1.9) получим рекуррентную последовательность краевых задач вида

$$\begin{gathered} \omega_{k,\eta\eta\eta} = f_k(\omega_0, \ldots, \omega_{k-1}), \quad 0 < \eta < 1, \\ \omega_{k,\eta\eta} - 2\omega_k = \varphi_k(\omega_0, \ldots, \omega_{k-1}), \quad \eta = 0, \qquad \omega_k = \omega_{k,\eta} = 0, \quad \eta = 1 \end{gathered} \tag{2.3}$$

(f_k, φ_k — известные нелинейные операторы). Необходимым и достаточным условием разрешимости задачи (2.3) является выполнение условия

$$\varphi_k(\omega_0, \ldots, \omega_{k-1}) + \int\limits_0^1 f_k(\omega_0, \ldots, \omega_{k-1})(1 - \eta^2)\, d\eta = 0. \tag{2.4}$$

В случае его выполнения общее решение задачи (2.3) можно представить как

$$\omega_k(\xi, \eta) = \Omega_k(\xi, \eta) + C_k(\xi) v_0(\eta), \tag{2.5}$$

где $v_0(\eta) = (3/2)(1 - \eta)^2$ — решение однородной задачи (2.3); $C_k(\xi)$ — произвольная функция; $\Omega_k(\xi, \eta)$ — частное решение задачи (2.3), удовлетворяющее условию $\Omega_k(\xi, 0) = 0$.

В [1] найдены следующие формулы для первых членов разложения (2.1):

$$\omega_0(\xi, \eta) = C_0(\xi) v_0(\eta), \qquad \omega_1(\xi, \eta) = C_0'(\xi) v_1(\eta) + C_1(\xi) v_0(\eta)$$

$$\Big(C_0(\xi) = \frac{3}{8} \operatorname{ch}^{-2} \frac{\xi}{4}, \qquad v_1(\eta) = \frac{\operatorname{ctg} \alpha}{16} (\eta^5 - 2\eta^3 + \eta)\Big).$$

Условие разрешимости (2.4) неоднородной задачи для определения $\omega_1(\xi, \eta)$ удовлетворяется за счет выбора $R_0 = (5/6) \operatorname{ctg} \alpha$. Это соответствует критическому значению Re, при котором плоскопараллельный поток теряет устойчивость [2, 3]. Функция $C_0(\xi)$ с точностью до преобразования переноса находится из условия разрешимости (2.4) задачи для определения $\omega_2(\xi, \eta)$, которое имеет вид стационарного уравнения Кортевега — де Вриза:

$$4C_0'' + 4C_0^2 - C_0 = 0, \tag{2.6}$$

если положить $R_1 = 0$.

При нахождении последующих членов ряда (2.1) произвольные функции $C_k(\xi)$ ($k = 1, 2, \ldots$), входящие в (2.5), определяются из условия разрешимости (2.4) краевой задачи для нахождения $(k+2)$-го члена разложения, которое является линеаризованным на $C_0(\xi)$ уравнением (2.6):

$$4C_k'' + (8C_0 - 1) C_k = F_k(C_0, \ldots, C_{k-1}), \qquad k = 1, 2, \ldots. \tag{2.7}$$

С учетом уравнений для $C_0(\xi), \ldots, C_{k-1}(\xi)$ и их дифференциальных следствий оператор $F_k(C_0, \ldots, C_{k-1})$ представляется в виде полинома относительно своих аргументов и их первых производных. Таким образом, при условии экспоненциального убывания функций $C_0(\xi), \ldots, C_{k-1}(\xi)$ правая часть уравнения (2.7) также экспоненциально убывает. Для существования экспоненциально убывающего решения в этом случае необходимо и достаточно выполнения следующего условия ортогональности:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} F_k(C_0, \ldots, C_{k-1}) C_0'(\xi)\, d\xi = 0. \tag{2.8}$$

Решение уравнения (2.7) представляется в виде

$$C_k(\xi) = KF_k(C_0, \ldots, C_{k-1}) + \nu_k C_0'(\xi),$$
$$KF \equiv V_1(\xi) \int_0^{\xi} V_0(\xi')F(\xi')\,d\xi' + V_0(\xi) \int_{\xi}^{+\infty} V_1(\xi')F(\xi')\,d\xi', \tag{2.9}$$

где $V_0(\xi) = -V_1(\xi)\int V_1(\xi')^{-2}\,d\xi'$ и $V_1(\xi) = -(64/3)C_0'(\xi)$ — четное и нечетное решения однородного уравнения (2.7). Заметим, что оператор K сохраняет свойство четности по ξ. Произвольные постоянные ν_k в (2.9) описывают преобразование переноса системы координат по оси ξ на величину $\varepsilon^k\nu_k$.

Нетривиальным моментом при построении ряда возмущений является возможность удовлетворения условиям (2.8) при $k = 1, 2, \ldots$. В случае симметричных солитонов, например уединенных волн в идеальной жидкости [8], условия ортогональности оказываются выполненными на классе четных функций автоматически. Для несимметричных решений вариационных задач условия (2.8) выполняются тождественно по всем параметрам как следствия определенных законов сохранения [9]. В общем неконсервативном случае эти условия устанавливают дополнительную связь между управляющими параметрами задачи и параметрами решения — условие (2.8) в настоящей задаче удовлетворяется на каждом k-м шаге за счет определения коэффициента R_{k+1} разложения Re.

В качестве примера найдем последующий член $\omega_1(\xi,\eta)$ разложения (2.1). Неизвестная функция $C_1(\xi)$ в представлении (2.5) находится из условия разрешимости (2.4) краевой задачи для определения $\omega_3(\xi,\eta)$, в правые части которой входят члены $\omega_0(\xi,\eta)$, $\omega_1(\xi,\eta)$ и $\omega_2(\xi,\eta)$. Последний имеет вид (2.5), где

$$\Omega_2(\xi,\eta) = C_0''(\xi)v_{21}(\eta) + C_0(\xi)^2 v_{22}(\eta) + C_1'(\xi)v_1(\eta),$$
$$v_{21}(\eta) = \frac{5\operatorname{ctg}^2\alpha}{10752}\eta^9 + \frac{\operatorname{ctg}^2\alpha}{896}\eta^7 - \frac{7\operatorname{ctg}^2\alpha}{768}\eta^5 - \frac{1}{4}\eta^4 + \Big(\frac{3}{2} + \frac{5\operatorname{ctg}^2\alpha}{384}\Big)\eta^3 - \frac{9}{4}\eta^2 + \Big(1 - \frac{59\operatorname{ctg}^2\alpha}{10752}\Big)\eta,$$
$$v_{22}(\eta) = \frac{3}{4}(\eta^2+1)\operatorname{arctg}\eta + \frac{1}{(\eta^2+1)^2}\Big[-3\eta^6 + \frac{34-3\pi}{8}\eta^5 - 6\eta^4 + \frac{32-3\pi}{4}\eta^3 - 3\eta^2 - \frac{2+3\pi}{8}\eta\Big].$$

Правую часть уравнения (2.8) для $C_1(\xi)$ представим как

$$F_1(\xi) = \Big(a_{11}(\alpha, \mathrm{We}) + \frac{8}{5}R_2\Big)C_0'(\xi) + a_{12}(\alpha, \mathrm{We})\,C_0(\xi)\,C_0'(\xi).$$

Условие ортогональности (2.8) для $F_1(\xi)$ будет выполнено, если положить

$$R_2(\alpha, \mathrm{We}) = -\frac{535}{25088}\operatorname{ctg}\alpha - \frac{25}{6054048}\operatorname{ctg}^3\alpha - \frac{25}{1512}\mathrm{We}. \tag{2.10}$$

Функция $C_1(\xi)$ находится тогда по формуле (2.9). В силу нечетности функции $F_1(\xi)$ она также будет нечетной.

3. Инвариантное свойство условий ортогональности. При получении каждого последующего члена разложения в формуле (2.9) появляется дополнительный свободный параметр ν_k, отвечающий, как отмечено выше, за перенос системы координат. Важно понять теперь, как параметры $\nu_1, \ldots, \nu_{n-2}$ входят в условия ортогональности (2.8) для $F_{n-1}(C_0, C_1, \ldots, C_{n-2})$ и какое влияние они оказывают на определение коэффициента R_n.

Теорема. *Коэффициенты R_n, определенные из условий ортогональности* (2.8) *для $F_{n-1}(C_0, C_1, \ldots, C_{n-2})$, не зависят от параметров $\nu_1, \ldots, \nu_{n-2}$.*

Доказательство проводится индукцией по n. Выделим зависимость функций C_k от параметров ν_j. Последовательными вычислениями получим

$$C_0(\xi) \equiv U_0(\xi), \qquad C_1(\xi;\nu_1) = U_1(\xi) + \nu_1 U_0'(\xi),$$
$$C_2(\xi;\nu_1,\nu_2) = U_2(\xi) + \nu_1 U_1'(\xi) + \frac{\nu_1^2}{2} U_0''(\xi) + \nu_2 U_0'(\xi). \tag{3.1}$$

Здесь $U_k(\xi) \equiv KF_k(U_0,\ldots,U_{k-1})$ — функции, не зависящие от параметров ν_j. Для выписывания общего члена удобно рассматривать $C_k(\xi;\nu_1,\ldots,\nu_k)$ как производящие функции по переменным $\nu_1,\ldots,\nu_k$ (см. [10]). Введем операторы Φ_i над переменными ν_j по формуле ?

$$\Phi_i\Big(\prod_{j=1}^{s}\nu_j^{l_j}\Big) = \nu_i\prod_{j=1}^{s}\nu_j^{l_j}\Big/\Big(1+\sum_{j=1}^{s}l_j\Big).$$

Тогда для $C_k(\xi;\nu_1,\ldots,\nu_k)$ справедлива следующая рекуррентная запись:

$$C_k(\xi;\nu_1,\ldots,\nu_k) = U_k(\xi) + \sum_{l=1}^{k-1}\Phi_l C'_{k-l,\xi}(\xi;\nu_1,\ldots,\nu_{k-l}) + \nu_k C_0'(\xi), \tag{3.2}$$

которая также устанавливается по индукции.

Основанием индукции являются формулы (3.1). Предположим, что для $k=0,\ldots,n$ функции $C_k(\xi)$, определенные как решения уравнений (2.7), имеют представления (3.2). Если теперь подставить эти представления в общую формулу для оператора $F_{n+1}(C_0,\ldots,C_n)$, то после некоторых преобразований с учетом уравнений (2.7) для $C_k(\xi;\nu_1,\ldots,\nu_k)$ $(k=1,\ldots,n)$ и их дифференциальных следствий получим

$$F_{n+1}(C_0,\ldots,C_n) = F_{n+1}(U_0,\ldots,U_n) + L\sum_{l=0}^{n}\Phi_l C'_{n+1-l}, \tag{3.3}$$

где L — линейный оператор, стоящий в левой части уравнения (2.7). Так как оператор L самосопряженный, а $C_0'(\xi)$ — элемент его ядра, то из (3.3) вытекает

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F_{n+1}(C_0,\ldots,C_n)C_0'(\xi)\,d\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} F_{n+1}(U_0,\ldots,U_n)C_0'(\xi)\,d\xi.$$

Интеграл, стоящий в правой части, не зависит от параметров ν_j. Если теперь выражение (3.3) подставить в формулу (2.9) и учесть, что операторы K и L взаимно обратные, то получим, что решение $C_{n+1}(\xi;\nu_1,\ldots,\nu_{n+1})$ уравнения (2.7) также имеет структуру (3.2). Теорема доказана.

Систему координат удобно выбрать, требуя прохождения оси y через максимум возвышения свободной границы. Этому требованию соответствует условие $\omega_x(0,0)=0$, эквивалентное условиям $C_k'(0)=0$, которые выполняются при $\nu_k=0$ $(k=1,2,\ldots)$. По индукции можно доказать, что в данном случае каждый член $\omega_k(\xi,\eta)$ обладает определенной четностью по ξ, совпадающей с четностью его порядкового номера k. При этом выясняется, что коэффициенты R_k, определенные из условий ортогональности (2.8), равны нулю при нечетных k. Таким образом, разложение Re идет только по четным степеням ε.

4. Выводы. В исходных переменных полученное асимптотическое решение принимает вид

$$\psi(x,y) = \Psi(\eta(x,y)) = \Psi(y) + \varepsilon^2\omega_0(\varepsilon x,y) + \varepsilon^3\omega_1(\varepsilon x,y) + O(\varepsilon^4),$$
$$h(x) = y(x,\eta)\Big|_{\eta=0} = -\varepsilon^2 C_0(\varepsilon x) - \varepsilon^3 C_1(\varepsilon x) + O(\varepsilon^4).$$

Нулевые коэффициенты разложения находятся в полном соответствии с результатами приближенной теории пленочных течений [2–6] для аналогичных значений управляющих параметров.

Полученное выражение $\mathrm{Re} = (5/6)\mathrm{ctg}\alpha + \varepsilon^2 R_2(\alpha, \mathrm{We}) + O(\varepsilon^4)$, где коэффициент $R_2(\alpha, \mathrm{We})$ отрицателен при всех значениях угла наклона и числах Вебера (см. формулу (2.10)), показывает, что при малых ε ветвление идет в докритическую область для плоскопараллельного потока. Это значит, что для построенного семейства «непрерывный» переход к волновому режиму течения в форме мягкой потери устойчивости основного потока принципиально невозможен.

Работа выполнена в рамках интеграционного проекта СО РАН № 43 «Исследование поверхностных и внутренних гравитационных волн в жидкости».

ЛИТЕРАТУРА

1. **Тер-Крикоров А. М.** К теории длинных волн в наклонном канале // ПММ. 1985. Т. 49, вып. 1. С. 94–101.
2. **Алексеенко С. В., Накоряков В. Е., Покусаев Б. Г.** Волновое течение пленок жидкости. Новосибирск: Наука, 1992.
3. **Шкадов В. Я.** Некоторые методы и задачи гидродинамической устойчивости // Науч. тр. ин-та механики МГУ. 1973. № 25. С. 105–154.
4. **Benney D. J.** Long waves on liquid films // J. Math. Phys. 1966. V. 45, N 2. P. 150–155.
5. **Nakaya C.** Long waves on a thin fluid layer flowing down an inclined plane // Phys. Fluids. 1975. V. 18. P. 1407–1412.
6. **Иванилов Ю. П.** Катящиеся волны в наклонном канале // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1961. Т. 1, № 6. С. 1061–1076.
7. **Приходько Б. В.** Об одной линейной задаче теории катящихся длинных волн // Динамика сплошной среды: Сб. науч. тр. / РАН. Сиб. отд-ние. Ин-т гидродинамики. 1994. Вып. 109. С. 83–91.
8. **Friedrichs K. O., Hyers D. H.** The existence of solitary waves // Comm. Pure Appl. Math. 1954. V. 6. P. 515–550.
9. **Макаренко Н. И.** Асимптотика несимметричных внутренних волн // Вычислительные технологии: Сб. науч. тр. / РАН. Сиб. отд-ние. Ин-т вычисл. технологий. 1993. Т. 2, № 4. С. 22–29.
10. **Риордан Дж.** Введение в комбинаторный анализ. М.: Изд-во иностр. лит., 1963.

Поступила в редакцию 1/VII 1996 г.