на его конце, из которой вычитается приращение кривизны, обусловленной изгибающим моментом, создаваемым диском в крайнем верхнем сечении. Указанная разность будет, очевидно, равна кривизне $\varkappa_0(s)$.

Как видим, определение начального прогиба $w_0(s)$ в растущем стержне встречает некоторые трудности. Их можно преодолеть, решив следующую задачу, которая не только представляет интерес с точки зрения отыскания начального прогиба растущего стержня, но и позволяет получить решение реальной технологической задачи.

Предположим, что в процессе роста стержня производится измерение его прогиба во времени и по длине. После завершения роста стержня (по истечении отрезка времени $[0, t_1]$) прогиб продолжает изменяться во времени вследствие вязких свойств материала. Необходимо предсказать, какой величины он достигнет по истечении промежутка времени $[0, t]$, $t > t_1$. Для получения ответа на такой вопрос можно сначала решить обратную задачу для отрезка времени $[0, t_1]$, т. е. по известным прогибам стержня путем решения краевой задачи (2.9), (2.11) найти прогиб $w_0(s)$, а затем решить прямую краевую задачу, т. е. определить функцию $w(t, s)$ по найденной функции $w_0(s)$ для промежутка времени $[0, t]$.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Арутюнян Н. Х.** Некоторые задачи теории ползучести для неоднородно стареющих тел.— Изв. АН СССР. МТТ, 1976, № 3.
2. **Арутюнян Н. Х., Колмановский В. Б.** Об устойчивости неоднородно вязкоупругих армированных стержней.— ПММ, 1981, т. 45, вып. 6.
3. **Дроздов А. Д., Колмановский В. Б., Потапов В. Д.** Устойчивость стержней из неоднородно стареющего вязкоупругого материала.— ДАН АрмССР, 1983, т. 77, № 2.
4. **Арутюнян Н. Х., Потапов В. Д.** Об устойчивости растущего вязкоупругого стержня, подверженного старению.— ДАН СССР, 1983, т. 270, № 4.
5. **Работнов Ю. Н.** Элементы наследственной механики твердых тел. М.: Наука, 1977.
6. **Арутюнян Н. Х., Метлов В. В.** Некоторые задачи теории ползучести неоднородно стареющих тел с изменяющимися границами.— Изв. АН СССР. МТТ, 1982, № 5.

Поступила 11/VII 1983 г.

УДК 539.374

К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ О ПРЕДЕЛЬНЫХ НАГРУЗКАХ ДЛЯ ЖЕСТКОПЛАСТИЧЕСКОГО АНИЗОТРОПНОГО ТЕЛА

А. И. ЧАНЫШЕВ

(Новосибирск)

С использованием результатов [1, 2] рассмотрены и исследованы уравнения плоской деформации жесткопластического анизотропного тела. Получены характеристики, соотношения на характеристиках. В качестве примера решена задача Прандтля о вдавливании штампа в жесткопластическую анизотропную среду. Исследована зависимость предельной нагрузки от свойств анизотропного тела.

Для простоты изложения материала будем предполагать, что анизотропное тело в упругости в фиксированной системе координат x, y подчиняется следующему закону деформирования *:

(1) $$\varepsilon_x = a_{11}\sigma_x - a_{12}\sigma_y,\ \varepsilon_y = -a_{12}\sigma_x + a_{22}\sigma_y,\ \varepsilon_{xy} = a_{33}\tau_{xy},$$

где a_{ij} — упругие податливости $(a_{ij} > 0)$, причем $a_{11} \neq a_{22}$.

Определим собственные значения и собственные тензоры T_k $\left(\mathrm{T}_k = \| t_{ij}^k \|\right)$ тензора упругих податливостей [1]:

$$\lambda_1 = \frac{a_{11} + a_{22}}{2} + \sqrt{\left(\frac{a_{11} - a_{22}}{2}\right)^2 + a_{12}^2},\quad \lambda_2 = \frac{a_{11} + a_{22}}{2} - \sqrt{\left(\frac{a_{11} - a_{22}}{2}\right)^2 + a_{12}^2},\quad \lambda_3 = a_{33},$$

$$\mathrm{T}_1:\ t_x^1 = \pm \frac{\sqrt{2}\, a_{12}}{\sqrt{a_{12}^2 + (a_{11} - \lambda_1)^2}},\quad t_y^1 = \pm \frac{\sqrt{2}\,(a_{11} - \lambda_1)}{\sqrt{a_{12}^2 + (a_{11} - \lambda_1)^2}},\quad t_{xy}^1 = 0,$$

---

* Предположение о форме закона Гука в виде (1) не ограничивает общности последующих построений.

$$\mathrm{T}_2\colon\quad t_x^2 = \pm\frac{\sqrt{2}\,a_{12}}{\sqrt{a_{12}^2+(a_{11}-\lambda_2)^2}},\quad t_y^2 = \pm\frac{\sqrt{2}\,(a_{11}-\lambda_2)}{\sqrt{a_{12}^2+(a_{11}-\lambda_2)^2}},\quad t_{xy}^2 = 0,$$

$$\mathrm{T}_3\colon\quad t_x^3 = t_y^3 = 0,\quad t_{xy}^3 = \pm 1.$$

Можно проверить, что

(2)
$$\frac{1}{2}\,t_{ij}^k t_{ij}^l = \delta_{kl},$$

поскольку $a_{11}-\lambda_1 = \lambda_2 - a_{22}$*.

Из (2) следует, что собственные тензоры T_k не зависят от значений тензоров напряжения T_σ и деформации T_ε. Естественно предположить, что ориентация базисных тензоров T_k в тензорном пространстве сохранится и с появлением пластических деформаций [2]. Эта гипотеза будет существенно использована в дальнейшем при построении уравнений жесткопластического анизотропного тела.

Тензоры напряжения T_σ и деформации T_ε разложим по базисным тензорам T_k:

$$\mathrm{T}_\sigma = S_k \mathrm{T}_k,\quad \mathrm{T}_\varepsilon = \text{Э}_k \mathrm{T}_k,$$

где

$$S_1 = \frac{1}{2}\left(\sigma_x t_x^1 + \sigma_y t_y^1\right),\quad S_2 = \frac{1}{2}\left(\sigma_x t_x^2 + \sigma_y t_y^2\right),\quad S_3 = \tau_{xy},$$

$$\text{Э}_1 = \frac{1}{2}\left(\varepsilon_x t_x^1 + \varepsilon_y t_y^1\right),\quad \text{Э}_2 = \frac{1}{2}\left(\varepsilon_x t_x^2 + \varepsilon_y t_y^2\right),\quad \text{Э}_3 = \varepsilon_{xy}.$$

В силу определения собственных значений и собственных тензоров T_k тензора упругих податливостей имеем

(3)
$$\text{Э}_k = \lambda_k S_k.$$

В зависимости от соотношений между собственными значениями λ_k возможны различные виды условия текучести анизотропной среды и различные схемы жесткопластического анизотропного тела.

Рассмотрим наиболее характерные ситуации.

А. Пусть $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \lambda_3$ и условие текучести выполняется при деформировании вдоль оси T_1:

(4)
$$|S_1| = k \text{ или } \frac{1}{2}\left(\sigma_x t_x^1 + \sigma_y t_y^1\right) = \pm k.$$

Принимая схему жесткопластического материала, имеем также уравнения и для деформаций вида

(5)
$$\text{Э}_2 = \text{Э}_3 = 0 \text{ или } \frac{1}{2}\left(\varepsilon_x t_x^2 + \varepsilon_y t_y^2\right) = 0,\quad \varepsilon_{xy} = 0.$$

Получаем, таким образом, статически определимые задачи — отдельно для напряжений и отдельно для перемещений [3].

Характеристики системы уравнений равновесия и условия текучести (4) имеют вид

(6)
$$\frac{dy}{dx} = \pm\sqrt{-\frac{t_x^1}{t_y^1}}.$$

Соотношения на характеристиках — $d\sigma_y = -d\tau dy/dx$. Рассматривая систему (5) относительно перемещений, получаем характеристики, совпадающие с (6), и соотношения на характеристиках

$$du = -dv dy/dx.$$

Б. Пусть $\lambda_1 = \lambda_3$, условие текучести имеет вид [2]

(7)
$$S_1^2 + S_3^2 = k^2 \text{ или } \frac{1}{4}\left(\sigma_x t_x^1 + \sigma_y t_y^1\right)^2 + \tau_{xy}^2 = k^2$$

и уравнения для деформаций по схеме жесткопластического тела таковы, что

(8)
$$\text{Э}_3/S_3 = \text{Э}_1/S_1,\quad \text{Э}_2 = 0 \text{ или } \varepsilon_{xy}/\tau_{xy} = \left(\varepsilon_x t_x^1 + \varepsilon_y t_y^1\right),\quad \varepsilon_x t_x^2 + \varepsilon_y t_y^2 = 0.$$

---

* В дальнейшем для определенности в формулах (2) будем выбирать только верхний знак.

Условие (7) выражает тот факт, что вектор напряжения на равнонаклоненных к главным осям тензора $S_1\mathrm{T}_1 + S_3\mathrm{T}_3$ площадках сохраняет постоянное значение, первое из условий (8) означает, что вектор деформации на указанных площадках коллинеарен вектору напряжения, а второе из условий (8) означает, что вектор деформации на равнонаклоненных к главным осям тензора T_2 площадках изменяется упруго.

Отметим, что в случае обычного закона Гука ($a_{11} = a_{22}$) $t_x^1 = t_x^2 = t_y^2 = -t_y^1 = 1$ и $\lambda_1 = \lambda_3$, т. е. этот случай является частным случаем рассматриваемого.

Дополнив уравнения равновесия условием текучести (7) и введя стандартным образом переменные σ, θ:

$$\tau_{xy} = k\cos 2\theta, \quad \frac{1}{2}\left(\sigma_x t_x^1 + \sigma_y t_y^1\right) = -k\sin 2\theta, \quad \frac{1}{2}\left(\sigma_x t_x^2 + \sigma_y t_y^2\right) = \sigma,$$

получаем систему двух нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка относительно неизвестных функций $\sigma(x, y)$, $\theta(x, y)$. Эта система гиперболического типа. Характеристическое уравнение имеет вид

$$\mu^2 - 2\mu\frac{\operatorname{ctg} 2\theta}{t_y^1} + \frac{t_x^1}{t_y^1} = 0, \quad \text{где} \quad \mu = \frac{dy}{dx}. \tag{9}$$

Как следует из (9), характеристики пересекаются между собой, вообще говоря, не под прямым углом: если $a_{11} > a_{22}$, то $t_x^1/t_y^1 < -1$, если $a_{11} < a_{22}$, то $t_x^1/t_y^1 > -1$.

Приведем теперь выражения характеристик и соотношения на характеристиках:

$$\mu_{1,2} = \frac{\operatorname{ctg} 2\theta \mp \sqrt{\operatorname{ctg}^2 2\theta - t_x^1 t_y^1}}{t_y^1}, \quad \sigma + \frac{k\sin 2\theta}{2}\left(\frac{t_y^2}{t_y^1} + \frac{t_x^2}{t_x^1}\right) \pm \frac{k\Delta}{2t_x^1 t_y^1}E(2\theta, \varkappa) = \xi_{1,2},$$

где $\Delta = t_x^1 t_y^2 - t_y^1 t_x^2 = -\dfrac{2t_x^2}{t_y^1}$, $\varkappa = \sqrt{1 + t_x^1 t_y^1}$, E — эллиптический интеграл второго рода.

Обратимся к системе уравнений (8). Выражая здесь деформации через перемещения, получаем систему уравнений

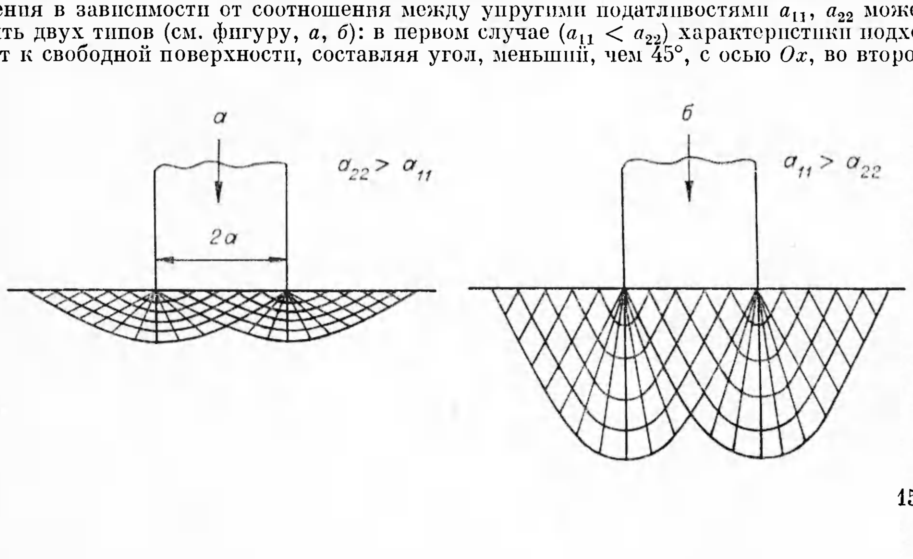
$$\frac{\partial u}{\partial x}t_x^2 + \frac{\partial v}{\partial y}t_y^2 = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = -\left(\frac{\partial u}{\partial x}t_x^1 + \frac{\partial v}{\partial y}t_y^1\right)\operatorname{ctg} 2\theta,$$

которая также относится к гиперболическому типу, ее характеристики совпадают с характеристиками системы дифференциальных уравнений для напряжений, и соотношения на характеристиках имеют вид

$$du = -dv\,dy/dx.$$

Отметим, что в рассматриваемом случае совершенно аналогично [4] показывается существование простых напряженных состояний.

В качестве иллюстрации применения полученных соотношений решим задачу Прандтля о вдавливании штампа в жесткопластическую анизотропную среду. Предполагается, что пластическая среда ограничена плоскостью, трение по поверхности контакта отсутствует. В предельном состоянии штамп движется вниз (см. фигуру). Требуется определить предельную нагрузку, отвечающую наступлению пластического течения. Приведем здесь решение, аналогичное решению Прандтля. Поле линий скольжения в зависимости от соотношения между упругими податливостями a_{11}, a_{22} может быть двух типов (см. фигуру, *а*, *б*): в первом случае ($a_{11} < a_{22}$) характеристики подходят к свободной поверхности, составляя угол, меньший, чем 45°, с осью Ox, во втором



случае ($a_{11} > a_{22}$) этот угол больше, чем 45°. Предельная нагрузка в том и в другом случае вычисляется по формуле

$$P_* = -\frac{4ak}{t_y^1}\left(1 + E\left(\frac{\pi}{2}, \varkappa\right)\right).$$

Нетрудно показать, что предельная нагрузка при фиксированном k является функцией параметра $\alpha = 2a_{12}/(a_{11} - a_{22})$. Предельная нагрузка достигает экстремальных значений при $\alpha \to \pm 0$: при $\alpha \to +0$ предельная нагрузка неограниченно возрастает (см. фигуру, *б*), при $\alpha \to -0$ предельная нагрузка стремится к величине $4\sqrt{2}ak$ (см. фигуру, *а*), при $\alpha \to \pm\infty$ получаем нагрузку, полученную Прандтлем.

В. Пусть $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$. В этом случае $a_{11} = a_{22} = a_{33}$, $a_{12} = 0$, ортонормированный тензорный базис T_k формулами (2) определяется неединственным образом. В качестве ортонормированного тензорного базиса может быть принят следующий:

$$T_1{:}\ t_x^1 = -t_y^1 = 1,\ t_{xy}^1 = 0,\ T_2{:}\ t_x^2 = t_y^2 = 1,\ t_{xy}^2 = 0,\ T_3{:}\ t_x^3 = t_y^3 = 0,\ t_{xy}^3 = 1.$$

В этом случае условие текучести будет иметь вид

$$\frac{1}{4}(\sigma_x + \sigma_y)^2 + \frac{1}{4}(\sigma_x - \sigma_y)^2 + \tau_{xy}^2 = k^2.$$

Введем следующим образом переменные θ, α:

(10) $(\sigma_x + \sigma_y)/2 = k \sin\alpha,\ (\sigma_x - \sigma_y)/2 = -k \sin 2\theta \cos\alpha,\ \tau_{xy} = k \cos 2\theta \cos\alpha.$

Подставляя (10) в уравнения равновесия, получаем систему двух нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка относительно неизвестных функций $\theta(x, y)$, $\alpha(x, y)$. Эта система гиперболического типа при $-\pi/4 \leqslant \alpha \leqslant \pi/4$. Ее характеристики и соотношения на характеристиках следующие:

$$\mu_{1,2} = \frac{-\cos 2\theta \cos\alpha \pm \sqrt{\cos 2\alpha}}{\sin\alpha + \sin 2\theta \cos\alpha},\quad 2\theta = \pm\left(-u + \sqrt{2}\,\mathrm{arctg}\left(\sqrt{2}\,\mathrm{tg}\,u\right)\right) + \mathrm{const},$$

$$\text{где } u = \arcsin(\mathrm{tg}\,\alpha).$$

Выражая условие коллинеарности вектора деформации и вектора напряжения на равнонаклоненных к главным осям тензора T_0 площадках, имеем

$$\frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2\varepsilon_{xy}} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2\tau_{xy}},\quad \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2\varepsilon_{xy}} = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\tau_{xy}}.$$

Подставляя выражения деформаций через перемещения, получаем систему двух дифференциальных уравнений относительно смещений. Эта система также гиперболического типа. Ее характеристики совпадают с характеристиками системы дифференциальных уравнений для напряжений, а соотношения на характеристиках имеют тот же самый вид, что и в разобранных ранее случаях:

$$du = -dv\,dy/dx.$$

Приведенные примеры показывают, сколь могут быть разнообразными пластические свойства анизотропных сред. Эти свойства диктуются структурными особенностями среды, которые в первом приближении определяются матрицей упругих податливостей.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Лурье К. А.** Некоторые задачи оптимального изгиба и растяжения упругих пластин.— Изв. АН СССР. МТТ, 1979, № 6.
2. **Чанышев А. И.** О пластичности анизотропных сред.— ПМТФ, 1984, № 2.
3. **Качанов Л. М.** Основы теории пластичности. М.: Наука, 1969.
4. **Христианович С. А.** Плоская задача математической теории пластичности при внешних силах, заданных на замкнутом контуре.—Мат. сб. Нов. сер., 1936, т. 1, вып. 4.

Поступила 22/VII 1983 г.