

5. Наймарк М. А. Линейные представления группы Лоренца.— М.: Физматгиз, 1958.
6. Годунов С. К. Интересный класс квазилинейных систем // ДАН.— 1961.— Т. 139, № 3.
7. Годунов С. К. Разностные методы решения уравнений газовой динамики.— Новосибирск: НГУ, 1962.
8. Годунов С. К. Элементы механики сплошной среды.— М.: Наука, 1978.
9. Блохин А. М. Интегралы энергии и их приложения к задачам газовой динамики.— Новосибирск: Наука, 1986.
10. Шугрин С. М. Об одном классе квазилинейных систем // Динамика сплошной среды.— Новосибирск: ИГ СО АН СССР, 1969.— Вып. 2.
11. Шугрин С. М. Галилеевы системы дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения.— 1980.— Т. 16, № 12.
12. Воеводин А. Ф., Шугрин С. М. Численные методы расчета одномерных систем.— Новосибирск: Наука, 1981.
13. Чакыров Е. П. Конечномерные расширения группы Галилея // Динамика сплошной среды.— Новосибирск: ИГ СО АН СССР, 1985.— Вып. 68.
14. Чакыров Е. П. Дифференциальные инварианты некоторых расширений группы Галилея // Динамика сплошной среды.— Новосибирск: ИГ СО АН СССР, 1985.— Вып. 69.
15. Вейнберг С. Гравитация и космология.— М.: Мир, 1975.
16. Ландау Л. Д., Лившиц Е. М. Гидродинамика.— М.: Наука, 1986.
17. Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т. Современная геометрия.— М.: Наука, 1986.

*Поступила 1/VIII 1988 г.*

УДК 532.5 + 517.946

## ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ МЕТОД И ЛОКАЛИЗАЦИЯ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ МЕХАНИКИ СПЛОШНЫХ СРЕД

*С. П. Антонцев, J. T. Diaz*

*(Новосибирск, Мадрид)*

Многие актуальные математические модели механики сплошной среды приводят к изучению нелинейных систем дифференциальных уравнений с частными производными составного типа. В таких системах различные компоненты искомого вектор-решения (например, скорость, плотность, давление, насыщенность, температура и т. д.) удовлетворяют уравнениям различных типов (параболического, гиперболического, эллиптического). Системы уравнений вырождаются в смысле типа или порядка при определенных значениях искомого решения или его производных. Сами решения обладают при этом конечным временем локализации (обращения в нуль), конечной скоростью распространения возмущений от начальных данных, пространственной локализацией с инерцией (метастабильной) и т. д. Свойство решений вырождающихся параболических уравнений (типа уравнения нелинейной теплопроводности) обладать конечной скоростью распространения возмущений впервые, по-видимому, отмечено и начало изучаться в [1—3], а для решений вырождающегося эллиптического уравнения аналогичное свойство отмечено в [4] в связи с исследованием задачи об истечении плоской звуковой струи. Затем изучению этих вопросов для одного параболического уравнения посвящено большое количество работ, достаточно полный обзор которых приведен в [5, 6]. В настоящее время для квазилинейных параболических уравнений также активно изучаются вопросы локализации решений, неограниченно растущих за конечное время [7]. Результаты работ для одного параболического уравнения получены, как правило, на основе теорем сравнения исследуемого решения со вспомогательным, например автомодельным. К системам уравнений составного типа аналогичные методы в основном не применимы. В [8—10] предложен и обоснован энергетический метод изучения характера возмущений, описываемых решениями общих уравнений эллиптического, параболического и составного типов. Идея метода состоит в получении и исследовании обыкновенных дифференциальных неравенств для энергетических функций. Метод получил обобщение и развитие в [11—18], в том числе и на уравнения высших порядков. Он оказался эффективным при изучении слабых обобщенных решений систем составного типа, возникающих в механике сплошных сред.

В [11, 19—23] энергетическим методом установлены конечное время локализации и конечная скорость распространения возмущений от начальных данных в ряде математических моделей механики сплошных сред (фильтрационные течения двух фазной жидкости, совместные течения поверхностных и подземных вод, течения воды в открытых руслах, течения несжимаемых неоднородных вязкопластических сред одномерных течений вязкого газа и др.). В [21] доказано, что осесимметрическая струя, движущаяся вдоль оси симметрии со звуковой скоростью, выравнивается (аналогично плоскому случаю [4]) на конечном расстоянии.

В настоящей работе устанавливаются конечное время локализации и метастабильная локализация (локализация с инерцией) решений для некоторых из вышеперечисленных моделей при наличии «источников» — заданных правых частей. Отметим, что не рассматриваются вопросы существования соответствующих решений, изучаются лишь их качественные свойства.

**1. Несжимаемые неоднородные неньютоновские жидкости.** Система уравнений, представляющих законы сохранения, имеет составной тип может быть записана в виде [24—26]

$$.1) \quad \frac{d\rho}{dt} \equiv \frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \rho = 0, \quad \nabla \rho = \left( \frac{\partial \rho}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial \rho}{\partial x_n} \right);$$

$$.2) \quad \operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \quad \mathbf{v} = (v_1, \dots, v_n);$$

$$.3) \quad \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} \equiv \rho \left( \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right) = \operatorname{div} P + \rho \mathbf{f};$$

$$.4) \quad P = -pE + F(D), \quad D = \{D_{ij}\} = \left\{ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \right\},$$

$$x \in \Omega \subset R^n, \quad t \in (0, T), \quad Q = \Omega \times (0, T).$$

Здесь  $\mathbf{v}(t, x)$ ,  $\rho(t, x)$ ,  $p(t, x)$  — искомые скорость, плотность и давление жидкости;  $P$ ,  $D$  — тензоры напряжений и скоростей деформации;  $E$  — единичный тензор;  $\mathbf{f}(t, x)$  — заданная массовая сила — «источник».

Предположим, что заданный симметричный тензор  $F$ , определяющий удовлетворяет условию

$$.5) \quad \delta |D|^q \leq F : D = F_{ij} D_{ij}, \quad 1 < q, \quad \delta = \operatorname{const} > 0.$$

Для классической несжимаемой вязкой жидкости  $P = -pE + 2\mu D$  в (1.5)  $\delta = 2$ ,  $q = 2$ . Для вязкопластических жидкостей [25, 26]  $P = -pE + 2(\mu + \tau |D|^{\sigma-1})D$ ,  $0 \leq \sigma < 1$  и, применяя неравенство Юнга, с (1.5) с

$$.6) \quad \delta = \mu^{1/\theta} \tau^{(\theta-1)/\theta} \theta^{1/\theta} (\theta/\theta - 1)^{(\theta-1)/\theta}, \\ q = \{2/\theta + [(\sigma + 1)(\theta - 1)]/\theta\} \in (\sigma + 1, 2).$$

Рассмотрим для  $\mathbf{w} = (\mathbf{v}, \rho, p)$  начально-краевую задачу

$$.7) \quad \mathbf{v}(t, x) = 0, \quad (x, t) \in \Gamma_T = \partial\Omega \times (0, T);$$

$$.8) \quad \mathbf{v}(0, x) = v_0(x), \quad \rho(0, x) = \rho_0(x), \quad x \in \Omega.$$

Отметим, что в [27] для задачи (1.1)—(1.4), (1.7), (1.8) при зависимости (1.5) с  $\sigma = 0$  доказана теорема существования слабого обобщенного решения  $\mathbf{w} = (v, \rho, p) \in V_q$ , где  $V_q = \{\mathbf{w} : \mathbf{v} \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) \cap L^2(0, T; W_0^{1,q}(\Omega)), 1/M \leq \rho \leq M, \rho_t \in L^2(0, T; W^{-1,2}(\Omega))\}$  ( $q = 2$ ) с учетом обозначений [28]. Для однородной несжимаемой жидкости ( $\rho(t, x) = \operatorname{const}$ ) теоремы существования решения системы (1.1)—(1.4) для некоторых зависимостей (1.5) доказаны в [28, 29]. Будем исследовать далее некоторые свойства решений  $\mathbf{w} \in V_q$  системы (1.1)—(1.4), предполагая, что  $\Omega$  — ограниченная область с гладкой границей. Пусть выполнено условие (1.5), в котором

$$.9) \quad q \in (2n/(2 + n), 2), \quad n \geq 2,$$

дополнительно

$$.10) \quad \|\mathbf{v}_0(x)\|_{2,\Omega} \leq C_v = \operatorname{const}, \quad 1/M \leq \rho_0 \leq M;$$

$$.11) \quad \|\mathbf{f}(t, \cdot)\|_{2,\Omega}^{q/(q-1)} \leq C_f (1 - t/T_+)^{q/(2-q)}, \\ C_f = \operatorname{const}, \quad u_+ = \max(0, u), \quad T_f \in (0, T).$$

**Теорема 1.1 (конечное время локализации).** Пусть  $\mathbf{w} = (\mathbf{v}, \rho, p) \in V_q$  — обобщенное решение задачи (1.1)—(1.4), (1.7), (1.8) и выполнены условия (1.5), (1.9)—(1.11). Тогда для любого  $T_f \in (0, T)$  существуют по-

стоянные  $C_v, C_f$  (вообще говоря, малые по отношению к  $\delta$ ) и  $C$  такие, что

$$(1.12) \quad \|\mathbf{v}(t, \cdot)\|_{2,\Omega}^2 \leq C(1 - t/T_f)^{q/(2-q)}$$

и, в частности,

$$(1.13) \quad \mathbf{v}(t, x) = 0, \quad x \in \Omega, \quad T_f \leq t.$$

**Доказательство.** Следуя методу энергетических оценок [11–13], сначала для рассматриваемого решения  $\mathbf{w}$  доказывается равенство

$$(1.14) \quad \frac{1}{2} \frac{d\Pi}{dt} = (\operatorname{div} P, \mathbf{v})_\Omega + (\rho f, \mathbf{v})_\Omega = -(F: D, 1)_\Omega + (\rho \mathbf{f}, \mathbf{v})_\Omega \equiv I,$$

$$\Pi(t) = (\rho(t, \cdot) \mathbf{v}(t, \cdot), \mathbf{v}(t, \cdot))_\Omega, \quad (u, v)_\Omega = \int_\Omega uv dx.$$

Последнее формально получается умножением уравнения (1.3) на  $\mathbf{v}(t, \cdot)$  и последующим интегрированием по частям с учетом уравнений (1.2) и граничного условия (1.7).

Далее воспользуемся неравенством Корма [26]

$$(1.15) \quad K \|\mathbf{v}\|_{m,\Omega} \leq \|D(\mathbf{v})\|_{q,\Omega}, \quad m \leq qn/(n - q)$$

при  $m = 2$  и с учетом (1.5), (1.11) оценим правую часть (1.14) следующим образом:

$$(1.16) \quad \begin{aligned} I &\leq -\delta \|D\|_{q,\Omega}^q + MK^{-1} \|\mathbf{f}\|_{2,\Omega} \|D\|_{q,\Omega} \leq \\ &\leq \frac{1}{2} (-a\Pi^{q/2} + b(1 - t/T_f)^{q/(2-q)}), \end{aligned}$$

$$a = \delta(K/\sqrt{M})^q, \quad b = (M/q)^{q/(q-1)} (q - 1)/q(\delta q/2)^{-1(q-1)} C_f.$$

Объединяя (1.14), (1.16), приходим к обыкновенному дифференциальному неравенству для энергетической функции  $\Pi(t)$ :

$$(1.17) \quad d\Pi/dt + a\Pi^{q/2} \leq b(1 - t/T_f)^{q/(2-q)}, \quad \Pi(0) \leq MC_v.$$

Все неотрицательные решения неравенства (1.17) мажорируются функцией  $\bar{\Pi}(t) = MC_v(1 - t/T_f)^{2/(2-q)}$ , если постоянные  $C_v, C_f, T_f, M, K, \delta$  удовлетворяют соотношению  $-2MC_v/(2 - q)T_f + a(MC_v)^{q/2} \geq b$ . Итерация последнего и завершает доказательство теоремы.

**З а м е ч а н и е 1.1.** Теорема 1.1 имеет следующую физическую интерпретацию. Течение ньютоновской жидкости (при условиях (1.9)), инициированное начальными данными и массовыми силами («точником»), приходит в состояние покоя  $\mathbf{v} \equiv 0$  начиная с момента времени  $T_f$  — выключения «источников».

**З а м е ч а н и е 1.2.** Теорема 1.1 может быть сформулирована так и таким образом: для любой постоянной  $C_v \in (0, \infty)$  в (1.10) и достаточной малой  $C_f$  в (1.11) существует  $T_f \in (0, \infty)$  такое, что справедливы (1.13). При  $f \equiv 0$  аналогичное утверждение доказано в [11].

**З а м е ч а н и е 1.3.** Постоянная  $K$  в неравенстве (1.15) не зависит от  $\Omega$ , если  $m = 2, q = 2n/(n + 2), q > 1$ . Поэтому в данном случае сформулированные выше утверждения справедливы и для задачи Кортвага  $\mathbf{v}(0, x) = \mathbf{v}_0(x), \rho(0, x) = \rho_0(x), x \in R^n$  для системы (1.1)–(1.4).

Будем изучать теперь локальные свойства решений системы (1.1)–(1.4) вне связи с граничными условиями. Ограничимся рассмотрением лишь решений частного вида

$$(1.18) \quad \begin{aligned} \mathbf{v}(t, x) &= (0, 0, w(t, x_1, x_2)), \quad \rho(t, x) = 1, \\ \mathbf{f}(t, x) &= (0, 0, f(t, x_1, x_2)), \quad \partial p/\partial x_3 = a(t), \end{aligned}$$

предполагая градиент давления  $a(t)$  заданным, этому решению может соответствовать течение в трубе. Тогда систему уравнений (1.1)–(1.4) пишем в форме

$$(1.19) \quad \partial w/\partial t = \operatorname{div} \mathbf{F}(\nabla w) - \partial p/\partial x_3 + f.$$

Предполагается, что вектор  $\mathbf{F}(\nabla w)$  удовлетворяет условию

$$(1.20) \quad \delta |\nabla w|^q \leq \mathbf{F}(\nabla w) \nabla w \leq \delta^{-1} |\nabla w|^q, \quad 2 < q.$$

Введем обозначение  $B_\rho(x_0) = \{x: x \in \Omega, |x - x_0| < \rho\}$  и рассмотрим в области  $B_{\rho_1} \times (0, T)$  решение уравнения (1.19) с начальным условием

$$(1.21) \quad w(0, x) = w_0(x), \quad x \in B_{\rho_1}.$$

Предполагается, что

$$(1.22) \quad \left( \|w_0\|_{2, B_\rho}^2 + \int_0^T \|f(\tau, \cdot)\|_{2, B_\rho}^2 d\tau \right) \leq C (\rho - \rho_0)_+^{1/(1-\alpha)},$$

$$\rho \in (0, \rho_1), \quad 0 < \rho_0 < \rho_1, \quad \alpha = (3q - 2)/4(q - 1);$$

$$(1.23) \quad (|a(t)| + \|w(t, \cdot)\|_{2, B_{\rho_1}}^2) \leq M.$$

**Теорема 1.2 (метастабильная локализация).** Пусть  $w(t, x) \in V_q$  — обобщенное решение уравнения (1.19) в  $B_{\rho_1} \times (0, T)$  с начальным условием (1.21) и выполнены условия (1.20)–(1.23). Тогда существует  $t_0 = t_0(M, q, \rho_1, \delta) \in (0, T)$  такое, что

$$(1.24) \quad u(t, x) = \left( w(t, x) + \int_0^t a(\tau) d\tau \right) = 0, \quad x \in B_{\rho_0}, \quad 0 \leq t \leq t_0.$$

**Доказательство.** Введем энергетические функции

$$(1.25) \quad \Pi(t, \rho) = (u(t, \cdot), u(t, \cdot))_{B_\rho}, \quad b(t, \rho) = \sup_{0 \leq \tau \leq t} \Pi(\tau, \rho),$$

$$E(t, \rho) = \int_0^t (\mathbf{F}(\nabla u), \nabla u)_{B_\rho} d\tau,$$

обладающие, как нетрудно проверить, свойствами

$$(1.26) \quad \frac{\partial E}{\partial \rho} = \int_0^t (\mathbf{F}(\nabla u), \nabla u)_{\partial B_\rho} d\tau \geq \delta \int_0^t \|\nabla u\|_{q, \partial B_\rho}^q d\tau,$$

$$\frac{\partial E}{\partial t} = (\dot{F}, \nabla u)_{B_\rho} \geq \delta \|\nabla u\|_{q, B_\rho}^q.$$

Для функции  $u(t, x) = w(t, x) + \int_0^t a(\tau) d\tau$ , согласно уравнению (1.19), получаем энергетическое равенство

$$(1.27) \quad \frac{1}{2} (\Pi(t, \rho) - \Pi(0, \rho)) + E(t, \rho) = I_1 + I_2,$$

где  $I_1 = \int_0^t (\mathbf{F} \cdot \mathbf{n}, u)_{\partial B_\rho} d\tau$ ;  $I_2 = \int_0^t (f, u)_{B_\rho} d\tau$ ;  $\mathbf{n}$  — вектор нормали к  $\partial B_\rho$ . Согласно [11–13], слагаемые в правой части (1.27) можно оценить следующим образом:

$$(1.28) \quad |I_1| \leq \frac{\varepsilon}{2} T b(t, \rho) + \frac{1}{2\varepsilon} \int_0^t \|f(\tau, \cdot)\|_{2, B_\rho}^2 d\tau, \quad \varepsilon > 0,$$

$$|I_2| \leq \frac{1}{\delta} \int_0^t \|\nabla u\|_{q, \partial B_\rho}^q \|u\|_{q, \partial B_\rho} d\tau \leq \varepsilon (E + b) + C t^\gamma \left( \frac{\partial E}{\partial \rho} \right)^{1/\alpha}$$

$$(C = C(T, M, q, \delta, \varepsilon), \quad \gamma = 8/(3q - 1), \quad \alpha = 3q - 2/4(q - 1)).$$

Объединяя (1.27), (1.28), с учетом (1.22) и при соответствующем выборе

$\varepsilon > 0$  приходим к окончательному неравенству

$$(1.29) \quad E \leq E + b \leq at^\nu (\partial E / \partial \rho)^{1/\alpha} + b(\rho - \rho_0)_+^{1/(1-\alpha)},$$

в котором  $a, b$  зависят лишь от  $M, q, \delta, T$ . Согласно результатам [30, 31] для неравенств вида (1.29) существует  $t_0 > 0$  такое, что  $E(t, \rho_0) = 0$   $t \leq t \leq t_0$ . Это и завершает доказательство теоремы.

**З а м е ч а н и е 1.4.** Таким образом, если неньютоновская жидкость (с законом (1.20)) покоилась ( $w(0, x) = u(0, x) = 0$ ) в области  $B_{\rho_0}$  при  $t = 0$ , то независимо от граничных условий и «источников» вне  $B_{\rho_0}$  ее движение определяется соотношением

$$w(t, x) = - \int_0^t a(\tau) d\tau, \quad 0 \leq t \leq t_0, \quad x \in B_{\rho_0}.$$

В частности, состояние покоя сохраняется ( $w(t, x) = 0$ ) при  $t \in [0, t_0]$  если отсутствует перепад давления ( $a = 0$ ).

**З а м е ч а н и е 1.5.** Аналогично предыдущему энергетическим методом можно исследовать задачу (1.1)—(1.4) и с учетом изменения температуры среды  $\Theta(t, x)$ , добавив к системе уравнение

$$\rho \frac{d\Theta}{dt} \equiv \rho \left( \frac{\partial \Theta}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \Theta \right) = \operatorname{div} \mathbf{A}(t, x, \Theta, \nabla \Theta) + L(t, x, \Theta, \mathbf{v}).$$

При этом можно учитывать более общую зависимость  $F(D, \Theta)$ , а также нелинейные законы теплопроводности и объемного поглощения тепловой энергии в виде [11—13]

$$\delta_1 |\Theta|^\alpha |\nabla \Theta|^\kappa \leq \mathbf{A} \nabla \Theta \leq (1/\delta_1) |\Theta|^\alpha |\nabla \Theta|^\kappa, \quad -1 < \alpha, \quad 1 < \kappa, \\ L = -\gamma_0 |\Theta|^{\sigma-1} \Theta + L_0(t, x, \mathbf{v}), \quad 0 \leq \gamma, \quad 0 < \sigma \leq 1.$$

**2. Совместные течения поверхностных и подземных вод.** В работах [11, 23] рассмотрены математические модели совместных течений безнапорных грунтовых и поверхностных вод, основанные на уравнениях плановой фильтрации и гидравлики открытых русел.

В простейшем случае (канал прямоугольного сечения, постоянной ширины, водоупор подземных вод и дно канала горизонтальны и др.) соответствующая система уравнений и внутренние условия сопряжения имеют вид [23]

$$(2.1) \quad \frac{\partial H}{\partial t} = \operatorname{div}(H \nabla H) + f_\Omega(t, x), \quad x \in \Omega \setminus \Gamma;$$

$$(2.2) \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial s} \left( \psi(s, u) |u_s|^{-1/2} \frac{\partial u}{\partial s} \right) - \left[ H \frac{\partial H}{\partial n} \right]_\Gamma + f_\Gamma(t, x), \quad x \in \Gamma;$$

$$(2.3) \quad H \frac{\partial H}{\partial n} \Big|_{\Gamma_\pm} = \sigma_\pm (u - H_\pm), \quad x \in \Gamma, \quad 0 < \sigma_\pm = \text{const}.$$

Здесь  $H(t, x)$  — уровень грунтовых вод в области  $\Omega \subset R^2$ ;  $u(t, s)$  — уровень воды в канале, которому отвечает кривая  $\Gamma$  в  $\Omega$ ;  $s$  — длина дуги вдоль  $\Gamma$ ;  $\mathbf{n}$  — вектор нормали к  $\Gamma$ ;  $H_\pm$  — значения  $H$  при подходе к  $\Gamma$  с разных сторон (соответственно  $[H]_\Gamma = H_+ - H_-$ );  $f_\Omega(t, x)$ ,  $f_\Gamma(t, x)$  — заданные внешние поступления воды — «источники».

При  $f_\Gamma = f_\Omega = 0$  в [11, 23] энергетическим методом была доказана конечная скорость распространения возмущений для  $H(t, x)$ ,  $u(t, x)$  от нулевых начальных данных. Ниже доказано наличие метастабильной локализации для решений (2.1)—(2.3).

Будем изучать локальные свойства решения  $\mathbf{w} = (H(t, x), u(t, x))$  системы (2.1)—(2.3) в круге  $B_{\rho_1}(x_0) = \{x: x \in \Omega, |x - x_0| < \rho\}$ ,  $x_0 \in \bar{\Omega}$  без ограничения общности, полагая, что  $x_0 = 0$ ,

$$\Gamma_\rho = \{x: x \in \Omega, x_2 = 0, |x_1| < \rho\}, \quad s = x_1, \quad B_\rho^\pm = \{x: x \in B_\rho, 0 \leq x_2\}.$$

Для системы (2.1)–(2.3) в [23] для основных начально-краевых задач доказано существование обобщенного решения  $w = (H, u) \in V$ , где

$$V = \{(H, u): 0 \leq (H, u) \leq M, \sqrt{H} \nabla H \in L^2(0, T; L^2(B_{\rho_1})), \\ \psi^{2/3} |u_s| \in L^{3/2}(0, T; L^{3/2}(\Gamma_{\rho_1}))\}, \quad (|\ln(\psi u^{-5/3})| \leq M).$$

**Теорема 2.1 (метастабильная локализация).** Пусть  $w = (H, u) \in V$  — обобщенное решение системы (2.1)–(2.3) в  $B_{\rho_1} \times (0, T)$  и

$$(2.4) \quad (\|H(0, \cdot)\|_{L^2(B_{\rho_0}^{\pm})}^2 + \|u(0, \cdot)\|_{L^2(\Gamma_{\rho_0})}^2 + \int_0^T (\|f_{\Omega}\|_{L^2(B_{\rho_0}^{\pm})}^2 + \|f_{\Gamma}\|_{L^2(\Gamma_{\rho_0})}^2) d\tau) \leq \\ \leq C(\rho - \rho_0)_+^{1/(1-\alpha)}, \quad \rho \in (0, \rho_1), \quad 0 < \rho_0 < \rho_1, \quad \alpha = 5/6.$$

Тогда существует  $t_0 = t_0(M, C, \rho_1, T)$  такое, что  $w = (H, u) = 0$ ,  $x \in B_{\rho_0}$ ,  $0 \leq t \leq t_0$ .

**Доказательство.** Введем обозначения

$$\Pi(t, \rho) = (\|H(t, \cdot)\|_{L^2(B_{\rho}^{\pm})}^2 + \|u(t, \cdot)\|_{L^2(\Gamma_{\rho})}^2), \quad \bar{\rho}(t, \rho) = \sup_{0 \leq \tau \leq t} \Pi(\tau, \rho),$$

$$E(t, \rho) = \int_0^t ((H \nabla H, \nabla H)_{B_{\rho}} + (\psi |u_s|^{3/2})_{\Gamma_{\rho}}) d\tau,$$

$$D^2 = \int_0^t \sum_{\pm} (\sigma_{\pm}, (u - H_{\pm})^2)_{\Gamma_{\rho}} d\tau, \quad F = \int_0^t ((f_{\Omega}, H)_{B_{\rho}} + (f_{\Gamma}, u)_{\Gamma_{\rho}}) d\tau.$$

Тогда энергетическое равенство, соответствующее системе (2.1)–(2.3), имеет вид

$$(2.5) \quad \frac{1}{2}(\Pi(t, \rho) - \Pi(0, \rho)) + E(t, \rho) + D^2 = \\ = F + \int_0^t \left( \left( H \frac{\partial H}{\partial n}, H \right)_{\partial B_{\rho}} + \psi |u_s|^{-1/2} u_s u \Big|_{x_1 = -\rho}^{x_1 = \rho} \right) d\tau.$$

Проводя оценки, аналогичные (1.28), приходим к неравенству типа (1.29), анализ которого и завершает доказательство теоремы.

**З а м е ч а н и е 2.1.** Теорема 2.1 имеет следующую физическую интерпретацию. Область  $B_{\rho_0}$ , не занятая водой в начальный момент времени  $t = 0$ , остается таковой и при  $t \leq t_0$  независимо от граничных условий и источников вне  $B_{\rho_0}$ .

**3. Двухфазная фильтрация несмешивающихся несжимаемых жидкостей.** Нестационарная фильтрация двух несмешивающихся несжимаемых жидкостей в неоднородной анизотропной пористой среде описывается системой уравнений составного типа [22]:

$$(3.1) \quad m(x) \frac{\partial s}{\partial t} = \operatorname{div}(K_0(x) a(s) \nabla s - b(s) \mathbf{v} + \mathbf{F}(x, s));$$

$$(3.2) \quad \operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \quad \mathbf{v} = -(K(x, s) \nabla p + \mathbf{f}(x, s)), \quad x \in \Omega \subset R^n.$$

Здесь искомые функции — насыщенность  $s(t, x)$  ( $0 \leq s \leq 1$ ), «приведенное» давление  $p(t, x)$ , скорость смеси  $\mathbf{v}$ . Коэффициенты системы (3.1), (3.2) определяются формулами

$$(3.3) \quad a(s) = k_{01} k_{02} \left| \frac{\partial p_h}{\partial s} \right| / (k_{01} + k_{02}), \quad b = k_{01}/k,$$

$$F = - \frac{k_{01} k_{02}}{k} K_0 (\nabla_x p_h + (\rho_2 - \rho_1) g), \quad k = k_{01} + k_{02},$$

где  $p_h$  — капиллярное давление;  $\mu_i k_{0i}$  — относительные фазовые проницаемости;  $\mu_i, \rho_i$  — вязкости и плотности жидкостей;  $g$  — ускорение силы

тяжести;  $K_0$  — симметричный тензор фильтрации для однородной жидкости;  $m$  — пористость. Коэффициент  $a(s)$  в (3.1) в зависимости от вида функциональных параметров  $k_{01}$ ,  $p_k$  модели может обращаться либо в нуль, либо в бесконечность при значениях  $s = 0, 1$ , определяя тем самым различный характер распространения возмущений насыщенности  $s(t, x)$ . В [22] для системы (3.1), (3.2) доказана теорема существования обобщенного решения  $\mathbf{w} = (s, p) \in V$ , где  $V = \{(s, p): 0 \leq s \leq 1, \sqrt{a} \times \nabla s \in L^2(0, T; L^2(\Omega)), \nabla p \in L^\infty(0, T; L^q(\Omega))\}$ ,  $n < q \leq \infty$ , а в [10, 11] установлены конечное время локализации  $s(t, x)$  ( $a(0) = \infty$ ,  $s = 0$ ) в случае краевой задачи и конечная скорость распространения возмущений от начальных данных ( $s(0, x) = 0$  или  $s(0, x) = 1$ ,  $a(0) = a(1) = 0$ ). Ниже показано, что при дополнительном условии на начальные данные  $s(0, x) = s_0(x)$  это решение обладает и свойством метастабильной локализации (локализации с инерцией) при  $a(0) = 0$ .

Рассмотрим систему (3.1), (3.2) в области  $B_{\rho_1} \times (0, T)$ , предполагая выполненными условия

$$(3.4) \quad M^{-1} \leq \left( m; \frac{(K_0 \xi, \xi)}{(\xi, \xi)}; k; \left| \frac{\partial p_k}{\partial s} \right| \right) \leq M, \quad 0 \leq s \leq 1;$$

$$(3.5) \quad (|\ln(as^{-\alpha})|; |\mathbf{F}'_s|s^{1-\alpha}; |\operatorname{div}_x \mathbf{F}|s^\alpha; |b'_s|s^{-(\alpha+\nu)/2}) \leq M;$$

$$(3.6) \quad \|s(0, x)\|_{2, B_\rho}^2 \leq C(\rho - \rho_0)_+^{1/(1-\alpha)}, \quad 2 + \alpha n/q \leq \nu + 2 \leq \alpha.$$

**Теорема 3.1 (метастабильная локализация).** Пусть  $\mathbf{w} = (s, p) \in V$  — обобщенное решение системы (3.1), (3.2) и выполнены условия (3.4), (3.5). Тогда существует  $t_0 = t_0(M, C, \alpha, q, \rho_1) > 0$  такое, что

$$s(t, x) = 0, \quad x \in B_{\rho_0}, \quad 0 \leq t \leq t_0.$$

**Доказательство.** Введем энергетические функции

$$\Pi(t, \rho) = (ms(t, \cdot), s(t, \cdot))_{B_\rho}, \quad E(t, \rho) = \int_0^t (K_0 a \nabla s, \nabla s)_{B_\rho} d\tau$$

и будем использовать уравнение (3.1) в виде

$$(3.7) \quad m \frac{\partial s}{\partial t} = \operatorname{div}(K_0 a \nabla s) - (b'_s \mathbf{v} + \mathbf{F}'_s) \nabla s + \operatorname{div}_x \mathbf{F}.$$

Соответствующее (3.7) энергетическое равенство

$$\frac{1}{2} \left( \Pi(t, \rho) - \Pi(0, \rho) + E(t, \rho) = \int_0^t ((b'_s \mathbf{v} + \mathbf{F}'_s) \nabla s, s) + \right. \\ \left. + \operatorname{div}_x \mathbf{F}, s)_{B_\rho} + (K_0 a \nabla s n, s)_{\partial B_\rho} \right) d\tau$$

приводит аналогично теоремам 1.2 и 2.1 к неравенству вида (1.29), из следования которого и завершает доказательство теоремы.

**З а м е ч а н и е 3.1.** Аналогичное утверждение справедливо и для функции  $s(t, x) = 1 - s(t, x)$ .

**З а м е ч а н и е 3.2.** В области  $B_{\rho_0} \times (0, t_0)$  приведенное давление удовлетворяет эллиптическому уравнению  $\operatorname{div}(K(x, 0) \nabla p + \mathbf{f}(x, 0)) = 0$

**З а м е ч а н и е 3.3.** Теореме 3.1 можно дать следующую физическую интерпретацию. Пусть в начальный момент  $t = 0$  область  $B_{\rho_0}$  занята только одной жидкостью ( $s(0, x) = 0$  или  $s(0, x) = 1$ ). Тогда при любых воздействиях вне  $B_{\rho_0}$  вытеснение данной жидкости из  $B_{\rho_0}$  начнется не ранее времени  $t_0 > 0$ .

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Зельдович Я. Б., Компанец А. С. К теории распространения тепла при теплопроводности, зависящей от температуры // Сборник, посвященный семидесятилетию акад. А. Ф. Иоффе. — М.: Изд-во АН СССР, 1950.

2. Баренблатт Г. И. О некоторых неустановившихся движениях жидкости и газа в пористой среде // ПММ.— 1952.— Т. 15, вып. 1.
3. Баренблатт Г. И., Вишик М. И. О конечной скорости распространения в задачах нестационарной фильтрации жидкости и газа // ПММ.— 1956.— Т. 20, вып. 3.
4. Овсянников Л. В. Об одном газовом течении с прямой линией перехода // ПММ.— 1949.— Т. 13, вып. 5.
5. Калашников А. С. Некоторые вопросы качественной теории нелинейных вырождающихся параболических уравнений второго порядка // УМН.— 1987.— Т. 42, вып. 2(254).
6. Мартинсон Л. К. Исследование математической модели процесса нелинейной теплопроводности в средах с объемным поглощением // Математическое моделирование. Процессы в нелинейных средах.— М.: Наука, 1986.
7. Самарский А. А., Галактионов В. А., Курдюмов С. П., Михайлов А. П. Режимы с обострением в задачах для квазилинейных параболических уравнений.— М.: Наука, 1987.
8. Антоңцев С. Н. О характере возмущений, описываемых решениями многомерных вырождающихся параболических уравнений // Динамика сплошной среды.— Новосибирск: ИГ СО АН СССР, 1979.— Вып. 40.
9. Антоңцев С. Н. О локализации решений нелинейных вырождающихся эллиптических и параболических уравнений // ДАН СССР.— 1981.— Т. 260, № 6.
10. Антоңцев С. Н. Конечная скорость распространения возмущений в многомерных задачах двухфазной фильтрации // Зап. науч. семинара ЛОМИ АН СССР.— Л., 1980.— Т. 96.
11. Антоңцев С. Н. Локализация решений вырождающихся уравнений механики сплошной среды.— Новосибирск: ИГ СО АН СССР, 1986.
12. Diaz J. I., Veron L. Compacité du support des solutions d'équations quasilineaires elliptiques // C. r. acad. sci. Paris.— 1983.— Т. 297.— P. 149.
13. Diaz J. I., Veron L. Local vanishing properties of solutions of elliptic and parabolic quasilinear equations // Trans. Amer. Math. Soc.— 1985.— V. 290, N 2.
14. Bernis F. Compactness of the support for some nonlinear elliptic problems of arbitrary order in dimension N // Comm. Partial Diff. Equat.— 1984.— V. 9, N 3.
15. Bernis F. Finite speed of propagation and asymptotic rates for some nonlinear higher order parabolic equation with absorption // Proc. Roy. Soc. Edinburgh.— 1986.— V. 104A.
16. Палымский И. Б. Некоторые качественные свойства решений уравнений нелинейной теплопроводности с поглощением // ЧММСС.— 1985.— Т. 16, № 1.
17. Рыков Ю. Г. О конечной скорости распространения возмущений для обобщенных решений квазилинейных вырождающихся параболических уравнений // Дифференциальные уравнения и их приложения.— М.: Изд-во МГУ, 1984.
18. Рыков Ю. Г. О поведении при возрастании времени обобщенных вырождающихся параболических уравнений с неізотропными нестепенными нелинейностями // Дифференциальные уравнения и их приложения.— М.: Изд-во МГУ, 1984.
19. Антоңцев С. Н. О локализации решений некоторых вырождающихся уравнений механики сплошной среды // Проблемы математики и механики.— Новосибирск: Наука, 1983.
20. Антоңцев С. Н., Панин А. А. Локализация решений уравнений вязкого газа с вязкостью, зависящей от плотности // Динамика сплошной среды.— Новосибирск: ИГ СО АН СССР, 1988.— Вып. 86.
21. Антоңцев С. Н. О локализации решений нелинейных вырождающихся эллиптических уравнений // Уравнения в частных производных и задачи со свободной границей.— Киев: Наук. думка, 1983.
22. Антоңцев С. Н., Кажихов А. В., Монахов В. Н. Краевые задачи механики неоднородных жидкостей.— Новосибирск: Наука, 1983.
23. Антоңцев С. Н., Епихов Г. П., Кашеваров А. А. Системное математическое моделирование процессов водообмена.— Новосибирск: Наука, 1986.
24. Овсянников Л. В. Введение в механику сплошных сред.— Новосибирск: НГУ, 1977.— Ч. II.
25. Мирзаджанзаде А. Х., Огибалов П. М. Нестационарные движения вязкопластических сред.— М.: Изд-во МГУ, 1970.
26. Мосолов П. П., Мясников В. П. Механика жесткопластических сред.— М.: Наука, 1981.
27. Bohm M. On a nonhomogeneous non newtonian fluid.— Providence, 1983.— (Rept./Lefschetz Center for Dynam. Systems. Division Appl. Math. Brown Univ.; 83—8).
28. Лионе Ж. Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач.— М.: Мир, 1972.
29. Ладыженская О. А. Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости.— М.: Наука, 1970.
30. Антоңцев С. Н. Метастабильная локализация решений вырождающихся параболических уравнений общего вида // Динамика сплошной среды.— Новосибирск: ИГ СО АН СССР, 1987.— Вып. 83.
31. Diaz J. I. Nonlinear partial differential equations and free boundaries. V. 1. Elliptic equations.— Putman, 1985.— (Putman Res. Not. Math.; 106).

Поступила 11/VIII 1988 г.