ЛИТЕРАТУРА

1. **Linhart J. G.** Very-high-density plasmas for thermonuclear fusion.— Nucl. Fusion, 1970, vol. 10, N 3.
2. **Linhart J. G.** Rocket-driven liners for fusion triggers and for very-high-density reactors.— Nucl. Fusion, 1973, vol. 13, N 3.
3. **Turchi P. J., Baker W. L.** Generation of high-energy plasmas by electromagnetic implosion.— Appl. Phys., 1973, vol. 44, N 11.
4. **Varnum W. S.** Electrically imploded cylindrical fusion targets.— Nucl. Fusion, 1975, vol. 15, N 6.
5. **Harris E. G.** Rayleigh — Taylor instabilities of a collapsing cylindrical shell in a magnetic field.— Phys. Fluids, 1962, vol. 5, N 9.
6. **Бакулин Ю. Д., Лучинский А. В.** Оценки возможности получения высоких плотностей энергии при электровзрыве цилиндрических оболочек.— ПМТФ, 1980, № 1.
7. **Бакулин Ю. Д., Куропатенко В. Ф., Лучинский А. В.** Магнитогидродинамический расчет взрывающихся проводников.— ЖТФ, 1976, т. 46, № 9.
8. **Куропатенко В. Ф., Нечай В. З., Сапожников А. Т., Севастьянов В. Е.** Докл. на Всесоюз. семинаре по моделям механики сплошной среды. Новосибирск, 1973.
9. **Калиткин Н. Н., Кузьмина Л. В., Рогов В. С.** Таблицы термодинамических функций и транспортных коэффициентов плазмы. ИПМ АН СССР, 1972.
10. **Григорьев Ф. В., Кормер С. Б., Михайлова О. Л., Толочко А. П., Урлин В. Д.** Уравнение состояния молекулярной фазы водорода в твердом и жидком состояниях при высоком давлении.— ЖЭТФ, 1975, т. 69, вып. 2(8).
11. **Брагинский С. И.** Вопросы теории плазмы. Госатомиздат, 1963.
12. **Mason B. J., Morse R. L.** Tamped thermonuclear burn of DT-microspheres.— Nucl. Fusion, 1975, vol. 15, N 5.

УДК 533.6.01

КУМУЛЯЦИЯ СХОДЯЩИХСЯ УДАРНЫХ ВОЛН С УЧЕТОМ ДИССИПАТИВНЫХ ПРОЦЕССОВ

В. С. Имшенник

(*Москва*)

1. Одномерные (сферически- и цилиндрически-симметричные) сходящиеся ударные волны являются одним известным примером кумулятивных газодинамических процессов, играющих столь важную роль в природе и технике [1]. Асимптотическим решением в окрестности центра или оси симметрии для задачи о сходящейся ударной волне служат известные автомодельные решения, указанные независимо Гудерлеем [2] и Ландау и Станюковичем [3]. Область применимости этих решений зависит от начальных и граничных условий (простейшие начальные и граничные условия — холодный неподвижный газ с постоянной плотностью ρ_0 и сходящийся с постоянной скоростью поршень), но практически всегда в достаточно тесной окрестности осуществляется автомодельное решение [4]. В этом решении к моменту кумуляции ударного фронта (обычно он выбирается за $t=0$) и только в центре или на оси симметрии неограниченно возрастает скорость фронта $\dot{r}_\text{ф} \sim (-t)^{1/k-1} \sim r_\text{ф}^{1-k} (r_\text{ф}^k \sim -t)$, давление и температура на фронте $p_\text{ф} \sim T_\text{ф} \sim (-t)^{2\left(\frac{1}{k}-1\right)} \sim r_\text{ф}^{2(1-k)}$, где оказаптель автомодельности $k = k(\gamma) \geqslant 1$ при показателе изэнтропы газа $\gamma \geqslant 1$ [4, 5]. Автомодельная переменная, от которой зависят все искомые функции автомодельного решения, при этом имеет вид $\xi = r/r_\text{ф} = \xi_0 r^k/(-t)$, причем на фронте ударной волны $\xi=1$ и $r_\text{ф} = (-t/\xi_0)^{\frac{1}{k}}$. Постоянная размерности $\text{см}^{-k}\,\text{с}$ — единственная произвольная постоянная в автомодельном решении, характеризующая количественно «интенсивность» начального толчка. На стадии отраженной ударной волны автомодельное решение имеет продолжение. Кумуляция энергии, заключенной между фронтом ударной волны $\xi = 1$ и любым значением переменной $\xi^* > 1$ позади фронта (обычно ξ^* совмещается с особой ξ-линией,

которую нигде не пересекают C-характеристики, направленные в сторону фронта ударной волны), характеризуется следующей зависимостью от радиуса ударного фронта: $E_{\text{а}} \sim r_{\text{ф}}^{5-2k}$ (сферический случай), $E_{\text{а}} \sim r_{\text{ф}}^{4-2k}$ (цилиндрический случай) [4]. Энергия в рассматриваемой области вследствие процесса кумуляции уменьшается при $r_{\text{ф}} \to 0$ медленнее, чем $r_{\text{ф}}^3$ (сферический случай) и $r_{\text{ф}}^2$ (цилиндрический случай), поскольку показатель автомодельности $k > 1$ (при $\gamma > 1$).

В данной работе исследуются ограничения, которые накладываются на параметры кумуляции автомодельного решения (с включением стадии отраженной ударной волны) вследствие эффектов диссипации. Эти эффекты, очевидно, становятся существенными, когда эффективная длина свободного пробега частиц рассматриваемого газа сравнивается с радиусом ударного фронта $l_s \sim \sim r_{\text{ф}}$. Учет эффектов диссипации, во-первых, показывает, что все гидродинамические и термодинамические величины становятся ограниченными, во-вторых, приводит к весьма общим выражениям для максимальных параметров кумуляции, которые определяются совместно характеристиками автомодельного решения и диссипативных эффектов. Само собой разумеется, на параметры кумуляции могут реально повлиять и отклонения от одномерного характера движения газа, связанные в особенности с известной неустойчивостью сходящихся ударных волн [6, 7]. Будем подразумевать, что эти отклонения делаются несущественными благодаря достаточно симметричным начальным и граничным условиям задачи. К тому же нарушения одномерной симметрии движения могут не только ослаблять параметры кумуляции, но и усиливать их, как показывают примеры двумерных кумулятивных движений типа плазменного фокуса и токового слоя [8, 9].

Для достаточно интенсивных сходящихся ударных волн, вообще говоря, наиболее интересным становится случай полностью ионизованной плазмы. Если возникшая в области кумуляции высокотемпературная плазма имеет к тому же достаточно большую плотность, то ее движение описывается системой уравнений двухтемпературной газодинамики с хорошо известными эффектами диссипации, в качестве которых входят ионные вязкость и теплопроводность, электронная теплопроводность и, наконец, обмен энергией между ионами и электронами [10—12]. В классической проблеме структуры фронта плоской стационарной ударной волны было показано [4, 13], что учет этих диссипативных эффектов обеспечивает непрерывную структуру фронта при любой интенсивности ударной волны. Существование непрерывного решения в этом случае означает ограниченность производных всех величин *. С помощью указанной системы уравнений были проведены численные расчеты сложных течений плазмы в цилиндрически- или аксиально-симметричной геометриях (в последнем случае — двумерная задача), свойственных цилиндрическому и нецилиндрическому Z-пинчу [14, 12, 15]. В частности, в этих расчетах были получены параметры кумуляции сходящихся ударных волн в приосевой области пинча. При этом был обнаружен выход на автомодельное решение, хотя конкретные граничные условия и другие параметры системы не благоприятствовали широкому проявлению этого решения. Автомодельное решение для сходящейся цилиндрически-симметричной ударной волны в приосевой области плазмы было специально исследовано в работе [16]. Данная работа, по существу, является продолжением и обобщением работы [16]. Здесь выведены общие соотношения для максимальных параметров кумуляции, но не только в случае плазмы и в цилиндрически-симметричной задаче. Включен в рассмотрение другой выбор коэффициентов диссипации, соответствующий формально, согласно [17], газу из частиц с произвольными (но степенного типа) силами взаимодействия между частицами, а также учтен вариант сферической геометрии системы.

Из данного рассмотрения становится вполне ясно, как построить подобные решения для любого вида диссипативных членов в газодинамической системе уравнений, для произвольного уравнения состояния газа. Нетривиальный вопрос о применимости газодинамического описания газа вблизи оси или центра симметрии может быть решен до конца только сравнением с соответствующим кинетическим рассмотрением. Тем не менее применимость газодинамического приближения с учетом отмеченных диссипативных эффектов к задаче о структуре фронта ударной волны, точнее говоря, столкновительной ударной волны [13], дает уверенность в обоснованности данного рассмотрения. Можно даже утверждать, что неучтенные кинетические эффекты только несколько изменят количественные оценки параметров кумуляции, не влияя на порядок найденных величин и общие соотношения.

---

* Можно ожидать, что тогда и в любой окрестности центра или оси симметрии эти производные останутся ограниченными по величине, а сами функции, следовательно, конечными.

2. В окрестности центра или оси симметрии системы запишем газодинамическую одномерную систему уравнений с учетом эффектов вязкости и теплопроводности газа, коэффициенты которых имеют нелинейный характер ($\nu = 1$ — цилиндрический случай, $\nu = 2$ — сферический) [14, 18]:

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho\frac{1}{r^\nu}\frac{\partial}{\partial r}(r^\nu v) = 0, \quad \frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + v\frac{\partial}{\partial r}; \tag{2.1}$$

$$\rho\frac{dv}{dt} + \frac{\partial}{\partial r}(a\rho T) = \frac{4}{3}\frac{\partial}{\partial r}\left(\eta\frac{\partial v}{\partial r}\right) + \frac{2}{3}\nu\left[2\eta\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{v}{r}\right) - \frac{v}{r}\frac{\partial\eta}{\partial r}\right]; \tag{2.2}$$

$$\frac{a}{\gamma-1}\rho\frac{dT}{dt} - aT\frac{d\rho}{dt} = \frac{4}{3}\eta\left[\left(\frac{\partial v}{\partial r}\right)^2 - \nu\frac{v}{r}\left(\frac{\partial v}{\partial r} - \frac{3-\nu}{2}\frac{v}{r}\right)\right] + \frac{1}{r^\nu}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^\nu\varkappa\frac{\partial T}{\partial r}\right), \tag{2.3}$$

где a — газовая постоянная (в случае простого газа из одинаковых частиц массы m $p = a\rho T$ и $a = k/m$); η — коэффициент вязкости; $\varkappa$ — коэффициент теплопроводности. Пусть эти нелинейные коэффициенты зависят только от температуры T, притом одинаковым степенным образом

$$\eta = \eta_0(aT)^s, \quad \varkappa = \varkappa_0(aT)^s. \tag{2.4}$$

Такая зависимость получается для простого газа одинаковых частиц, взаимодействующих между собой с силой $F \sim r^{-m}$, так что $s = 1/2 + 2/(m-1)$ [17]. В этом случае число Прандтля $\Pr \sim \eta/\varkappa = \mathrm{const}$, слабо зависящей лишь от степени m в законе сил. В частном случае плазмы, когда $F \sim r^{-2}$, т. е. $m = 2$ и $s = 5/2$, сразу следует из (2.4) известная функциональная зависимость для плазмы [19]. Однако в плазме следует рассматривать не простой газ, а смесь электронов и ионов, что требует несколько усложнить исходную систему уравнений (2.1)—(2.3). Это будет сделано ниже в безразмерной форме. В уравнении (2.3) далее положим показатель изэнтропы $\gamma = 5/3$, ограничиваясь рассмотрением одноатомного газа.

Систему уравнений (2.1)—(2.3) следует привести к безразмерному виду, вводя безразмерные величины по формулам:

$$\sigma = \rho/\rho_0, \quad x = r/r_0, \quad \tau = t/t_0, \quad u = v/v_0 \quad (v_0 = r_0/t_0), \tag{2.5}$$
$$\Pi = \frac{p}{p_0}\left(p_0 = \rho_0\frac{r_0^2}{t_0^2}\right), \quad \Theta = \frac{T}{T_0}\left(T_0 = \frac{1}{a}\frac{r_0^2}{t_0^2}\right), \quad \Pi = \sigma\Theta.$$

В основу системы единиц (или масштабов) в соотношениях (2.5) положены три размерные величины r_0, t_0 и ρ_0. После подстановки этих величин в уравнения (2.1)—(2.3) получим некоторую вариацию известной безразмерной системы уравнений

$$\frac{d\sigma}{d\tau} + \sigma\frac{1}{x^\nu}\frac{\partial}{\partial x}(x^\nu u) = 0, \quad \frac{d}{d\tau} = \frac{\partial}{\partial\tau} + u\frac{\partial}{\partial x}; \tag{2.6}$$

$$\sigma\frac{du}{d\tau} + \frac{\partial}{\partial x}(\sigma\Theta) = \frac{1}{\mathrm{Re}}\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left(\Theta^s\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \nu\left[\Theta^s\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{u}{x}\right) - \frac{1}{2}\frac{u}{x}\frac{\partial\Theta^s}{\partial x}\right]\right\}; \tag{2.7}$$

$$\frac{3}{2}\sigma\frac{d\Theta}{d\tau} - \Theta\frac{d\sigma}{d\tau} = \frac{\Theta^s}{\mathrm{Re}}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 - \nu\frac{u}{x}\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{3-\nu}{2}\frac{u}{x}\right)\right] + \frac{1}{\mathrm{Re}\,\Pr}\frac{1}{x^\nu}\frac{\partial}{\partial x}\left(x^\nu\Theta^s\frac{\partial\Theta}{\partial x}\right), \tag{2.8}$$

где безразмерные числа Re и Pr, согласно (2.4), (2.5), имеют выражения

$$\frac{1}{\mathrm{Re}} = \frac{4}{3}\frac{\eta_0}{\rho_0}\frac{r_0^{2s-2}}{t_0^{2s-1}}, \quad \frac{1}{\mathrm{Pr}} = \frac{3}{4}\frac{\varkappa_0}{a\eta_0}. \tag{2.9}$$

До сих пор масштабы длины и времени (r_0 и t_0) были произвольны (масштаб плотности ρ_0 естественно должен совпадать с постоянной плотностью невозмущенного газа). Теперь свяжем их с параметрами автомодельного решения: примем, что их соотношение удовлетворяет уравнению фронта ударной волны — $\xi_0 r_\text{ф}^k t_\text{ф}^{-1} = 1$:

$$\xi_0 r_0^k t_0^{-1} = 1. \tag{2.10}$$

Для окончательного определения r_0 и t_0 потребуем, чтобы безразмерное число Re из соотношений (2.9) было равно единице, т. е.

$$\frac{4}{3}\frac{\eta_0}{\rho_0}\frac{r_0^{2s-2}}{\xi_0^{2s-1} r_0^{k(2s-1)}} = \frac{4}{3}\frac{\eta_0}{\rho_0}\frac{r_0^{2s(1-k)+k-2}}{\xi_0^{2s-1}} = 1, \tag{2.11}$$

откуда имеем единицы r_0 и t_0 в явном виде (с учетом (2.10)):

$$r_0 = \left(\frac{3}{4}\frac{\rho_0}{\eta_0}\xi_0^{2s-1}\right)^{\frac{1}{2s(1-k)+k-2}}, \quad t_0 = \left(\frac{3}{4}\frac{\rho_0}{\eta_0}\xi_0^{2s-2}\right)^{\frac{1}{2s(1-k)+k-2}}. \tag{2.12}$$

Таким образом, при выборе r_0 и t_0, согласно (2.12), мы должны в уравнениях (2.7), (2.8) положить Re = 1, сохранив за числом Pr, не зависящим от масштабов r_0 и t_0, его определение из (2.9). Безразмерное число Pr, как уже отмечалось выше, слабо зависит только от степени m в законе сил, и если пренебречь этой зависимостью (получаемой в высших приближениях метода Энскога — Чэпмена), то в первом приближении [17]:

$$\frac{1}{\mathrm{Pr}} = \frac{3}{4}\frac{\varkappa_0}{a\eta_0} = \frac{45}{16}{}^{*}. \tag{2.13}$$

Можно считать, что система уравнений (2.6)—(2.8) с Re = 1 не содержит уже никаких параметров. Остается сформулировать граничные условия, чтобы завершить постановку задачи о движении газа вблизи оси или центра симметрии для сходящейся автомодельной ударной волны.

3. Можно показать, что безразмерное число Re $\sim r_0/l_s$, где l_s — эффективная длина свободного пробега частиц. В самом деле по порядку величины коэффициент вязкости $\eta \sim \rho l_s v_T$, где $v_T \sim (aT)^{\frac{1}{2}}$ — средняя тепловая скорость частиц. Составим отношение r_0/l_s и используем снова определения безразмерных величин (2.5) и соотношения (2.4):

$$\frac{r_0}{l_s} \sim \frac{r_0\rho v_T}{\eta} \sim \frac{r_0\rho\,(aT)^{\frac{1}{2}}}{\eta_0\,(aT)^s} \sim \frac{r_0\rho_0}{\eta_0\,(aT_0)^{s-\frac{1}{2}}} \sim \frac{\rho_0}{\eta_0}\frac{t_0^{2s-1}}{r_0^{2s-2}}, \tag{3.1}$$

т. е., согласно (2.9), $r_0/l_s \sim$ Re. Поэтому, выбирая число Re = 1, тем самым масштаб r_0 в (2.12) делаем по порядку величины равным эффективной

---

* В случае жестких молекул ($m \to \infty$) во втором приближении возникает множитель 1,0088, т. е. $(\mathrm{Pr})^{-1} \simeq 2{,}84$, тогда как для случая кулоновских сил ($m = 2$) во втором приближении соответствующий множитель равен 1,0854, т. е. $(\mathrm{Pr})^{-1} = 3{,}05$ [17].

длине пробега частиц. Это означает, что внешнюю границу области решения безразмерной системы уравнений (2.6)—(2.8) (с Re = 1) следует выбирать $x = X_0(\tau) \gtrsim 1$. В качестве такой границы естественно задать лагранжеву траекторию и давление на ней, заимствованные из автомодельного решения. Итак, зададим граничные условия

$$(3.2)\qquad u = 0,\ \partial\Theta/\partial x = 0,\ x = 0;$$

$$dX_0/d\tau = u,\quad \partial\Theta/\partial x = 0,\quad \sigma\Theta - \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{2}\nu\frac{u}{x}\right) = \Pi(\tau),\quad x = X_0(\tau).$$

В (3.2) к давлению из автомодельного решения $\Pi(\tau)$ приравнивается, строго говоря, не давление, а радиальная компонента потока импульса. Однако добавочный вязкий член в скобках $(\sim \sigma'_{rr})$ очень мал, если лагранжева траектория выбрана описанным выше образом — достаточно далеко от центра или оси симметрии.

Можно показать, что $\Pi(\tau)$ есть универсальная функция, не зависящая в принятой системе единиц (2.5) от размерных параметров автомодельного решения ξ_0 и ρ_0. В самом деле, согласно [4, 5], автомодельное решение имеет вид $v = (r/t)U(\xi)$, $p = \rho_0(r^2/t^2)P(\xi)$, где $\xi = -\xi_0 r^k t^{-1}$, а в безразмерных переменных (2.5) с учетом соотношения (2.10) между масштабами r_0 и t_0:

$$(3.3)\qquad u = \frac{1}{v_0}\frac{r_0}{t_0}\frac{x}{\tau}U(\xi) = \frac{x}{\tau}U(\xi),\quad \Pi = \frac{1}{p_0}\rho_0\frac{r_0^2}{t_0^2}\frac{x^2}{\tau^2}P(\xi) = \frac{x^2}{\tau^2}P(\xi),$$

$$\xi = -\xi_0 r_0^k t_0^{-1} x^k\tau^{-1} = -x^k\tau^{-1},$$

причем специфичность выбора (2.10) проявляется только в инвариантности автомодельной переменной ξ. Безразмерные функции $U(\xi)$, $P(\xi)$ и т. д. сами оказываются инвариантными в новой системе единиц. Запишем элементарное уравнение для произвольной лагранжевой траектории $X_1(\tau)$

$$(3.4)\qquad \frac{dX_1}{d\tau} = \frac{x_\text{ф}}{\tau}\xi^{\frac{1}{k}}U(\xi),\quad \xi = -X_1^k\tau^{-1},\quad \tau > \tau_0 = -\left(X_1^0\right)^k,$$

где начальное значение $X_1^0 \gtrsim 1$ соответствует моменту прохождения ударного фронта, т. е. при $\tau = \tau_0$, $X_1^0 = x_\text{ф}(\tau_0)$ $(1 = -x_\text{ф}^k\tau_\text{ф}^{-1}$ — уравнение ударного фронта в безразмерных координатах). На траектории $X_1(\tau)$ функция $\Pi(\tau)$, входящая в граничные условия (3.2), согласно (3.3), имеет вид

$$(3.5)\qquad \Pi(\tau) = \frac{X_1^2(\tau)}{\tau^2}P\left(-\frac{X_1^k(\tau)}{\tau}\right),$$

где $X_1(\tau)$ определяется уравнением (3.4). Из (3.4), (3.5) видно, что функция $\Pi(\tau)$ носит универсальный характер. Отметим, что в (3.2) траектория $X_0(\tau)$ в принципе отличается от исходной автомодельной траектории $X_1(\tau)$, поскольку на зависимость $X_0(\tau)$, следующую из решения системы уравнений (2.6)—(2.8) с Re = 1, влияют уже диссипативные эффекты. Однако для достаточно большой величины $X_1^0 \gtrsim 1$ диссипативные эффекты становятся несущественными, и $X_0(\tau) \simeq X_1(\tau)$. Близость этих функций можно рассматривать в качестве количественного критерия правильного выбора внешней лагранжевой траектории. Совершенно ясно, что если $\left(X_1^0\right)'$ достаточно велико в указанном выше смысле, то решение уравнений (2.6)—(2.8) с любым иным значением $\left(X_1^0\right)'' > \left(X_1^0\right)'$ ничем не будет отличаться от их решения с предыдущим значением $(X_1^0)'$. Отсюда следует существование единственного асимптотического решения задачи в окрестности центра или оси симметрии *.

4. Допустим, что указанная задача решена численным методом. Замечательно, что при фиксированном законе взаимодействия частиц (степень s и число Pr в уравнениях (2.7), (2.8)) в заданной геометрии (степень ν в уравнениях (2.6)—(2.8)), при заданном автомодельном решении (показатель автомодельности в соотношениях (3.4), (3.5) и граничном условии (3.2)) оно не зависит ни от каких других параметров. Физические соображения, приведенные в п. 1, подсказывают, что это решение для величин σ, u и Θ будет с конечной величиной функции $\Pi(\tau)$ в граничном условии ограниченным. Пусть определены максимальные значения $u_{\max}$, $\Theta_{\max}$, $\Pi_{\max}$. Выразим через них соответствующие характерные величины скорости $u'_{\max}$, температуры $\Theta'_{\max}$ и давления $\Pi'_{\max}$ для полной газодинамической задачи о сходящейся ударной волне в автомодельном случае.

Для масштабов величин в полной задаче естественно принять, помимо начальной плотности $\rho'_0 = \rho_0$ и радиуса системы r'_0, еще и величину характерного давления p'_0. Последняя величина буквально определяет «интенсивность» начального толчка. Тогда соответствующие безразмерные величины (аналогично (2.5)) имеют вид

$$(4.1)\qquad \sigma' = \frac{\rho}{\rho'_0} \quad (\rho'_0 = \rho_0), \quad x' = \frac{r}{r'_0}, \quad \Pi' = \frac{p}{p'_0}, \quad \tau' = \frac{t}{t'_0} \left(t'_0 = \frac{r'_0}{(p'_0/\rho_0)^{\frac{1}{2}}} \right),$$

$$u' = \frac{v}{v'_0} \quad \left(v'_0 = \frac{r'_0}{t'_0} = \left(\frac{p'_0}{\rho_0} \right)^{\frac{1}{2}} \right), \quad \Theta' = \frac{T}{T'_0} \quad \left(T'_0 = \frac{1}{a} \frac{p'_0}{\rho_0} \right).$$

Постоянная ξ_0 в автомодельном решении в этих переменных имеет выражение

$$(4.2)\qquad \xi_0 = -r_\text{ф}^{-k} t_\text{ф} = -r_0'^{-k} t'_0 x_\text{ф}'^{-k} \tau'_\text{ф} = \xi'_0 (r'_0)^{1-k} \left(\frac{p'_0}{\rho_0} \right)^{-\frac{1}{2}}, \quad \xi'_0 = -x_\text{ф}'^{-k} \tau'_\text{ф},$$

где ξ'_0 — постоянная автомодельного решения в единицах (4.1).

Характерная максимальная температура $\Theta'_{\max}$ тогда может быть выражена через вычисленную величину $\Theta_{\max}$ следующим образом (с учетом (2.5), (4.1), (2.10) и (2.12)):

$$(4.3)\qquad \Theta'_{\max} = \Theta_{\max} \frac{T_0}{T'_0} = \Theta_{\max} \frac{r_0^2}{t_0^2} \frac{\rho_0}{p'_0} = \Theta_{\max} \frac{r_0^{2(1-k)}}{\xi_0^2} \frac{\rho_0}{p'_0} =$$

$$= \Theta_{\max} \frac{1}{p'_0} \frac{\rho_0}{\xi_0^2} \left(\frac{3}{4} \frac{\rho_0}{\eta_0} \xi_0^{2s-1} \right)^{\frac{2(1-k)}{2s(1-k)+k-2}} = \Theta_{\max} \frac{1}{p'_0} \left(\frac{3}{4\eta_0} \right)^{\frac{2(1-k)}{2s(1-k)+k-2}} \times$$

$$\times\, \xi_0^{\frac{2}{2s(1-k)+k-2}} \rho_0^{-\frac{k+2s(k-1)}{2s(1-k)+k-2}}.$$

---

* Обратим внимание на условие $\partial\Theta/\partial x = 0$ (при $x = 0$), которое фактически предопределяет конечность температуры в точке $x = 0$, но не других величин (плотности и скорости) (сравни с изотермическим скачком). Тем не менее, как показало непосредственное численное решение [16], проведенное, правда, в частном случае, все гидродинамические и термодинамические величины в данной постановке задачи получаются ограниченными. Это соответствовало нашим предположениям в связи с существованием непрерывного решения задачи о структуре фронта ударной волны (см. предыдущую сноску).

Теперь аналогично (3.1) вычислим отношение некоторой эффективной длины свободного пробега $l_s^* = \frac{4}{3}\eta_0 (aT'_e)^{s-\frac{1}{2}} \rho_0^{-1} = \frac{4}{3}\eta_0 \left(\frac{p'_0}{\rho_0}\right)^{s-\frac{1}{2}} \rho_0^{-1}$ к масштабу длины r'_0, обозначив его буквой α:

$$\alpha = \frac{l_s^*}{r'_0} = \frac{4}{3}\frac{\eta_0}{\rho_0 r'_0}\left(\frac{p'_0}{\rho_0}\right)^{s-\frac{1}{2}} = \frac{4}{3}\eta_0 \frac{p_0'^{\,s-\frac{1}{2}}}{\rho_0^{s+\frac{1}{2}} r'_0}. \tag{4.4}$$

Параметр α из (4.4) определяет роль диссипативных эффектов, и поэтому войдет в виде коэффициента во все диссипативные члены системы уравнений (2.1)—(2.3), записанной в единицах (4.1). В более сложном случае плазмы это показано в [12]. Ясно, что только при условии $\alpha \ll 1$ возникает возможность автомодельного решения для сходящейся ударной волны, причем характеристики этого решения, в частности постоянная ξ'_0 из (4.2), не зависят от безразмерного параметра α. Тогда, подставив постоянную ξ_0 из (4.2) в (4.3) и учтя определение (4.4) для параметра α, получим окончательно

$$\Theta'_{\max} = \Theta_{\max} (\xi'_0)^{\frac{2}{2s(1-k)+k-2}} \alpha^{\frac{2(k-1)}{2s(1-k)+k-2}}. \tag{4.5}$$

Добавим к (4.5) соответствующие выражения для $\Pi'_{\max}$ и $u'_{\max}$

$$\Pi'_{\max} = \Pi_{\max} (\Theta'_{\max}/\Theta_{\max}), \quad u'_{\max} = u_{\max} (\Theta'_{\max}/\Theta_{\max})^{1/2}. \tag{4.6}$$

Разумеется, формулы (4.5), (4.6) связывают между собой не только максимальные значения величин Π', Θ' и u' с величинами Π, Θ и u, а любые значения этих величин для произвольного момента времени t и точки пространства r. Следует заметить, что сами величины $\Theta'_{\max}$, $\Pi'_{\max}$ и $u'_{\max}$ как раз дают степень кумуляции в сходящейся ударной волне, поскольку в системе единиц (4.1) все характерные величины порядка единицы. Постоянная $\xi'_0 \sim 1$.

Чтобы проиллюстрировать общее соотношение (4.5), рассмотрим частные случаи кулоновских ($m = 2$, $s = 5/2$) и жестких ($m \to \infty$, $s = 1/2$) частиц для сферически-симметричной сходящейся ударной волны ($\nu = 2$), когда, согласно [3, 5], при $\gamma = 5/3$ $k = 1{,}453$. Соответственно получим из (4.5) две зависимости от параметра α, указанного в скобках для рассматриваемых случаев:

$$\Theta'_{\max} \sim \Theta_{\max}\alpha^{-0{,}322}\left(\alpha \sim \frac{p_0'^2}{\rho_0^3 r'_0}\right), \quad \Theta'_{\max} \sim \Theta_{\max}\alpha^{-0{,}906}\left(\alpha \sim \frac{1}{\rho_0 r'_0}\right).$$

5. В случае полностью ионизованной идеальной плазмы с однократно заряженными ионами ($Z = 1$) исходные уравнения с учетом всех существенных эффектов диссипации вместо (2.6)—(2.8) имеют вид [14, 16]

$$\sigma\frac{du}{d\tau} + \frac{\partial}{\partial x}[\sigma(\Theta_i + \Theta_e)] = \frac{\partial}{\partial x}\left(\Theta_i^{5/2}\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \nu\left[\Theta_i^{5/2}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{u}{x}\right) - \frac{1}{2}\frac{u}{x}\frac{\partial\Theta_i^{5/2}}{\partial x}\right]; \tag{5.1}$$

$$\frac{3}{2}\sigma\frac{d\Theta_i}{d\tau} - \Theta_i\frac{d\sigma}{d\tau} = \Theta_i^{5/2}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 - \nu\frac{u}{x}\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{3-\nu}{2}\frac{u}{x}\right)\right] + \frac{3{,}1}{x^\nu}\frac{\partial}{\partial x}\left(x^\nu\Theta_i^{5/2}\frac{\partial\Theta_i}{\partial x}\right) - 5{,}4\left(\frac{m}{M}\right)^{1/2}\sigma^2\frac{\Theta_i - \Theta_e}{\Theta_e^{3/2}}; \tag{5.2}$$

$$\frac{3}{2}\sigma\frac{d\Theta_e}{d\tau}-\Theta_e\frac{d\sigma}{d\tau}=1{,}76\left(\frac{M}{m}\right)^{1/2}\frac{1}{x^\nu}\frac{\partial}{\partial x}\left(x^\nu\Theta_e^{5/2}\frac{\partial\Theta_e}{\partial x}\right)+ \tag{5.3}$$
$$+5{,}4\left(\frac{m}{M}\right)^{1/2}\sigma^2\frac{\Theta_i-\Theta_e}{\Theta_e^{3/2}}.$$

В уравнения (5.2), (5.3) для температур ионов Θ_i и электронов Θ_e входит отношение масс иона M и электрона m. Член обмена энергией ионов и электронов пропорционален $(m/M)^{\frac{1}{2}}$, а член электронной теплопроводности обратно пропорционален $(m/M)^{\frac{1}{2}}$. Система уравнений двухтемпературной полностью ионизованной плазмы (2.6), (5.1)—(5.3) записана в безразмерных единицах (2.5) (для обеих температур масштаб один и тот же T_0, $\Pi=\sigma(\Theta_i+\Theta_e)$ и $a=k/M$). Масштабы длины r_0 и времени t_0 при этом определяются соотношениями (2.12). Вместо числа Pr простого газа из (2.13) здесь появляется несколько безразмерных чисел, характеризующих ионную теплопроводность $\left(\mathrm{Pr}_i^{-1}=3{,}1\right)$, электронную теплопроводность $\left(\mathrm{Pr}_e^{-1}=1{,}76\,(M/m)^{\frac{1}{2}}\right)$ и, наконец, обмен энергией ионов и электронов $\left(C_{ei}^{-1}=5{,}4\,(m/M)^{\frac{1}{2}}\right)$. Для полного определения выписанных выражений добавим постоянный множитель коэффициента ионной вязкости η_0 (см. (2.4), (2.12)):

$$\eta_0=0{,}81M^3e^{-4}L^{-1}, \tag{5.4}$$

где L — кулоновский логарифм (в соответствии с [17] $L=2\Lambda$, где Λ — кулоновский логарифм, принятый обычно (см., например, [19])); e — элементарный электрический заряд.

Для цилиндрически-симметричной сходящейся ударной волны ($\nu=1$) с показателем автомодельности $k=1{,}226$ и в случае дейтериевой плазмы $(M/m)^{\frac{1}{2}}=60{,}5$ эта задача была численно решена в работе [16]. При этом граничные условия формулировались согласно (3.2), а функции $X_1(\tau)$ и $\Pi(\tau)$, определенные соотношениями (3.4), (3.5), были также заимствованы из автомодельного решения. Некоторые детали численного решения можно найти в работе [16]. Область значительного отклонения от автомодельного решения оказалась при $x\lesssim 0{,}1$. Здесь выпишем значения $\Theta_{i\,\max}=0{,}614$ и $\Theta_{e\,\max}=0{,}268$ ($u_{\max}\approx-0{,}95$, $\Pi_{\max}\approx 19$), максимальных параметров плазмы в приосевой области. В соответствии с этими данными запишем максимальные параметры уже в системе единиц полной задачи (4.1), обобщая соотношения (4.5) на двухтемпературный случай:

$$\Theta'_{i\max}=0{,}614\,(\xi'_0)^{-1{,}05}\alpha^{-0{,}237},\quad \Theta'_{e\max}=0{,}268\,(\xi'_0)^{-1{,}05}\alpha^{-0{,}237},$$

где безразмерный параметр α определен в (4.4) с $s=5/2$ и η_0 из (5.4),

$$\alpha=1{,}08\frac{M^3}{e^4L}\frac{p_0'^2}{\rho_0^3r_0'}.$$

Постоянная автомодельного решения в системе единиц (4.1) $\xi'_0=-X_\Phi'^{-1{,}226}\tau'_\Phi$ должна быть задана из результатов численного решения полной задачи, в которой эффекты диссипации фактически несущественны. Если величина p'_0, принятая за масштаб давления в (4.1), действительно характеризует внешний толчок, т. е. выбирается в соответствии с граничными условиями полной задачи, а r_0' характеризует радиус системы, то очевидно, что эта постоянная, как уже отмечалось, $\xi_0' \sim 1$ и количественно степень кумуляции в основном определяется параметром α, который, вообще говоря, очень мал ($\alpha \ll 1$). Максимальные параметры кумуляции для скорости и давления можно найти по формулам (4.6).

6. Изложенная в этой заметке постановка задачи о сходящейся ударной волне фактически подразумевает три различных этапа кумулятивного процесса. Сперва некоторый внешний толчок (приложенное извне давление, движущийся поршень и т. п.) вызывает движение газа в заданной системе (с некоторыми значениями, скажем, начальной плотности и радиуса), в ходе которого формируется автомодельная сходящаяся ударная волна. Второй этап состоит в ее распространении к центру или оси системы по известному автомодельному закону. На этих двух этапах эффекты диссипации не играют существенной роли. Третий этап процесса, наоборот, происходит при доминирующем влиянии диссипативных эффектов, характер которых определяется свойствами газа или плазмы. На этом этапе фронт сходящейся ударной волны достигает центра или оси системы и отражается от них. Для известных параметров автомодельного решения мы сформулировали газодинамическую задачу с учетом эффектов диссипации, соответствующую третьему этапу движения. А затем связали общими соотношениями результаты ее решения с решением полной задачи с исходными начальными и граничными условиями.

Можно было бы избежать такого расчленения полной задачи, если бы мы обладали возможностью корректно учитывать диссипативные эффекты на всех трех упомянутых этапах, скажем, имели бы универсальный численный метод решения. Но даже в этой нереальной ситуации не удалось бы получить общие соотношения для параметров кумуляции, притом с минимальным использованием численных методов. Достаточно также сказать, что выделение третьего этапа (аналогично классической задаче с пограничным слоем в идеальной жидкости), для которого выписана система уравнений (2.6)—(2.8) (газ) или (2.6), (5.1)—(5.3) (плазма) с граничными условиями (3.2), демонстрирует, осторожно говоря, на физическом уровне строгости, ограниченность всех параметров кумуляции, имевших особенность в автомодельном решении. Это утверждение, по всей вероятности, справедливо в самом общем случае автомодельной сходящейся ударной волны. По отношению к общей проблеме кумуляции, которая рассматривалась в работе [20], случай сходящихся автомодельных ударных волн, таким образом, оказывается с учетом указанных оговорок примером, где, вопреки утверждению [20], диссипативные эффекты, выбранные физически обоснованным образом, устраняют неограниченный рост параметров кумуляции.

Автор искренне благодарен за внимание к этой работе и полезные обсуждения ее результатов В. Ф. Дьяченко и Я. М. Каждану. Кроме того, Я. М. Каждану автор еще благодарен за предоставление некоторых данных об автомодельном решении в цилиндрически-симметричном случае и серьезные критические замечания по поводу существования решения газодинамической задачи с учетом эффектов диссипации.

Поступила 10 IV 1980

ЛИТЕРАТУРА

1. **Лаврентьев М. А.** Кумулятивный заряд и принципы его работы.— УМН, 1957, т. 12, вып. 4.
2. **Guderley G.** Starke kugelige und zylindrische Verdichtungsstösse in der Nähe des Kugelmittelpunktes bzw der Zylinderachse.— Luftfahrtforschung, 1942, Bd 19, N 9.

3. Станюкович К. П. Неустановившиеся движения сплошной среды. М., Гостехиздат, 1955.
4. Зельдович Я. Б., Райзер Ю. П. Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений. М., Физматгиз, 1963.
5. Брушлинский К. В., Каждан Я. М. Об автомодельных решениях некоторых задач газовой динамики.— УМН, 1963, т. 18, № 2.
6. Whitham G. B. A new approach to problems of shock dynamics. Pt 1. Two dimensional problem.— J. Fluid Mech., 1957, vol. 2, pt 1.
7. Вахрамеев Ю. С. О кумуляции ударных волн в неоднородной среде.— ПММ, 1966, т. 30, № 4.
8. Имшенник В. С. Двумерные нестационарные модели плазмы и проблема перетяжки в Z-пинчах и плазменном фокусе.— В сб.: Численные методы в физике плазмы. М., Наука, 1977.
9. Имшенник В. С., Сыроватский С. И. Двумерные течения идеального проводящего газа в окрестности нулевой линии магнитного поля.— ЖЭТФ, 1967, т. 52, вып. 4.
10. Брагинский С. И. Явления переноса в плазме.— В сб.: Вопросы теории плазмы. Вып. 1. Под ред. М. А. Леонтовича. М., Госатомиздат, 1963.
11. Имшенник В. С. О структуре ударных волн в высокотемпературной плотной плазме.— ЖЭТФ, 1962, т. 42, вып. 1.
12. Дьяченко В. Ф., Имшенник В. С. К магнитогидродинамической теории пинч-эффекта в высокотемпературной плотной плазме.—В сб.: Вопросы теории плазмы. Вып. 5. Под ред. М. А. Леонтовича. М., Атомиздат, 1967.
13. Имшенник В. С. Структура ударных волн в плотной высокотемпературной плазме.— Физика плазмы, 1975, т. 1, вып. 2.
14. Дьяченко В. Ф., Имшенник В. С. Сходящаяся цилиндрическая ударная волна в плазме с учетом структуры фронта.— ЖВММФ, 1963, т. 3, № 5.
15. Дьяченко В. Ф., Имшенник В. С. Двумерная магнитогидродинамическая модель плазменного фокуса Z-пинча.— В сб.: Вопросы теории плазмы. Вып. 8. Под ред. М. А. Леонтовича. М., Атомиздат, 1974.
16. Дьяченко В. Ф., Имшенник В. С. О сходящейся цилиндрически-симметричной ударной волне при наличии диссипативных эффектов.— ПММ, 1965, т. 29, № 6.
17. Chapman S., Cowling T. G. The mathematical theory of non-uniform gases. Cambridge Univ. Press, 1970.
18. Кочин Н. Е. Векторное исчисление и начала тензорного исчисления. М., Изд-во АН СССР, 1951.
19. Спитцер Л. Физика полностью ионизованного газа. М., ИЛ, 1956.
20. Забабахин Е. И. Неустойчивость неограниченной кумуляции.— Письма ЖЭТФ, 1979, т. 30, с. 97.

УДК 533.6.011.72.

ОТРАЖЕНИЕ СИЛЬНОЙ УДАРНОЙ ВОЛНЫ ОТ ЭЛЛИПСОИДА

Л. П. Горбачев, В. Б. Соколов

(Москва)

Рассматривается отражение от эллипсоида сильной плоской ударной волны (с равномерными параметрами за ней), движущейся вдоль одной из его осей. Вязкость и теплопроводность газа не учитываются. Решение ищется в окрестности критической точки методом малого параметра [1]. Нелинейные дифференциальные уравнения для безразмерных компонент скорости газа в рассматриваемой области решаются методом разделения переменных с дополнительным условием [2]. Найдены аналитические выражения для параметров течения, которые для случаев эллиптического цилиндра и эллипсоида вращения совпадают с соответствующими выражениями, полученными ранее [2].

Следуя приближениям [3], исходные уравнения непрерывности, количества движения и энергии [4], описывающие течение газ за отраженной от эллипсоида ударной волной, в окрестности критической точки