

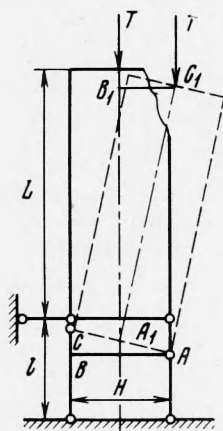
## ОБ УСТОЙЧИВОСТИ И ВЫПУЧИВАНИИ НЕОДНОРОДНЫХ СТЕРЖНЕЙ ЗА ПРЕДЕЛОМ УПРУГОСТИ

И. Т. Вохмянин, Ю. В. Немировский

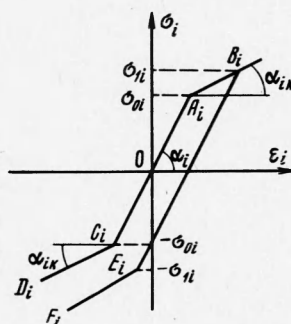
(Новосибирск)

В работе [1] было отмечено, что поведение неоднородных (биметаллических, трехслойных, подкрепленных и др.) конструкций за пределом упругости обладает некоторыми особенностями, исключающими использование концепции продолжающегося нагружения (концепции Шенли) в задачах об их неупругой устойчивости. Сжатие таких конструкций за пределом упругости характеризуется появлением нескольких критических нагрузок различного типа, зависящих от свойств используемых в конструкции материалов и ее геометрических параметров. Тем не менее, можно с уверенностью утверждать, что при сжатии неоднородных конструкций за пределом упругости критические нагрузки типа Шенли (в смысле концепции продолжающегося нагружения) не реализуются, за исключением случая «пропорциональных» диаграмм растяжения материалов слоистой конструкции.

В общем случае критической нагрузкой (в обычном смысле первоначального перехода одной формы движения в другую) неоднородной конструкции следует считать нагрузку, соответствующую достижению предела текучести. При этом для некоторого класса геометрических и физических параметров конструкции эта нагрузка определяет несущую способность ее, для остальных параметров может служить нижней оценкой нагрузок несущей способности. Под нагрузками несущей способности понимаем максимальные нагрузки, которые может выдержать конструкция при сжатии за пределом упругости. Эти общие утверждения обосновываются в данной работе на примере неоднородного идеализированного стержня Шенли.



Фиг. 1



Фиг. 2

1. Рассмотрим сжатие идеализированного стержня Шенли [2] (фиг. 1), полки которого выполнены из различных упруго-пластических материалов с линейным упрочнением (фиг. 2).

Пусть  $L$  — длина жесткой части стержня,  $l$  — длина деформируемой части,  $F_i$  — площади поперечного сечения несущих полок,  $H_i$  — расстояние середин полок до линии действия внешнего сжимающего усилия  $T$ ,  $\sigma_{0i}$  — пределы пропорциональности,  $E_i$  — модули упругости,  $E_{ki}$  — касательные модули, соответствующие первой и второй полкам стержня ( $i = 1, 2$ ). Предполагаем поведение материалов при растяжении и сжатии одинаковым. Линию действия внешнего сжимающего усилия выберем так, чтобы до достижения критической нагрузки Эйлера

$$T_3 = \sigma_{02} F_2 t_3, \quad t_3 = \frac{\omega^2 e_2}{1 + \alpha f} \quad (1.1)$$

$$\left( \omega^2 = \frac{H^2}{Ll}, \quad \alpha = \frac{e_2}{e_1}, \quad f = \frac{F_2}{F_1}, \quad e_i = \frac{E_i}{\sigma_{02}} \right)$$

в стержне реализовалось безмоментное невыпученное состояние. Тогда

$$h_1 = \frac{\alpha f}{1 + \alpha f}, \quad h_2 = \frac{1}{1 + \alpha f}, \quad h_i = \frac{H_i}{H} \quad H_1 + H_2 = H$$

Упруго устойчивый стержень остается прямым, пока хотя бы одна из полок не перейдет в пластическое состояние. Пусть материалы полок таковы, что

$$\frac{1}{e_2} < \frac{s_{01}}{e_1} \quad \left( s_{0i} = \frac{\sigma_{0i}}{\sigma_{02}} \right) \quad (1.2)$$

Тогда вторая полка переходит в пластическое состояние при сжимающем усилии

$$T_1 = \sigma_{02} F_2 t_1, \quad t_1 = \frac{1 + \alpha f}{\alpha f} \quad (1.3)$$

Нагрузку  $t_1$  назовем первой критической нагрузкой. В дальнейшем органичимся рассмотрением стержней, для которых  $t_1 < t_0$  или

$$\omega^2 > \frac{(1 + \alpha f)^2}{\alpha f e_2} \quad (1.4)$$

При  $t > t_1$  в соответствии с диаграммами растяжения (фиг. 2), закон связи напряжений  $\sigma_i$  с деформациями  $\varepsilon_i$  без учета эффекта Баушингера имеет вид

$$\varepsilon_i = s_i / e_i + k_i \mu_i [s_i - \text{sign}(s_i) s_{0i}] + m_i \mu_i [s_i - \text{sign}(s_i) s_{1i}] + n_i \mu_i (s_{1i} - s_{0i}) \quad (1.5)$$

$$s_i = \frac{\sigma_i}{\sigma_{02}}, \quad \mu_i = \frac{(e_i - e_{ki})}{e_i e_{ki}}, \quad c_{ki} = \frac{E_{ki}}{\sigma_{02}}, \quad s_{1i} = \frac{\sigma_{1i}}{\sigma_{02}}$$

режимы  $A_i C_i$

$$k_i = m_i = n_i = 0$$

режимы  $A_i B_i, C_i D_i$

$$k_i = 1, \quad m_i = n_i = 0$$

режимы  $B_i E_i$

$$n_i = 1, \quad k_i = m_i = 0$$

режимы  $E_i F_i$

$$m_i = n_i = 1, \quad k_i = 0$$

Здесь  $\sigma_{1i}$  — пределы текучести материалов полок при сжатии после упрочнения. В дальнейшем сжимающие напряжения считаются положительными.

Уравнение совместности деформаций, которое можно получить, рассматривая подобие треугольников  $ABC$  и  $A_1 B_1 C_1$  (фиг. 1) и считая прогиб  $W$  малым по сравнению с длиной  $L$ , имеет вид

$$\varepsilon_2 - \varepsilon_1 = \omega^2 w, \quad \varepsilon_i = (l_i - l) / l, \quad w = W / H \quad (1.6)$$

Здесь  $l_i$  — длины полок после деформации.

Пользуясь уравнениями равновесия стержня

$$s_1 = ft (h_2 - w), \quad s_2 = t (h_1 + w) \quad (T = \sigma_{02} F_2 t) \quad (1.7)$$

а также законом деформирования (1.5) и уравнением совместности (1.6), получаем

$$w = \frac{c + at}{\omega^2 - bt} \quad (1.8)$$

$$a = (k_2 + m_2) \mu_2 h_1 - (k_1 + m_1) \mu_1 f, \quad b = \beta + (k_2 + m_2) \mu_2 + (k_1 + m_1) \mu_1 f$$

$$c = k_1 \text{sign}(s_1) s_{01} \mu_1 - k_2 \text{sign}(s_2) \mu_2 + m_1 \text{sign}(s_1) s_{11} \mu_1 - m_2 \text{sign}(s_2) s_{12} \mu_2 +$$

$$+ n_2 \mu_2 (s_{12} - 1) - n_1 \mu_1 (s_{11} - s_{01}), \quad \beta = (1 + \alpha f) / e_2$$

Из (1.8) при  $k_i = m_i = n_i = 0$  получаем критическую нагрузку Эйлера (1.1) для неоднородного идеализированного стержня. В случае, когда выполняются неравенства (1.2) и (1.4), в (1.8) полагаем  $k_2 = 1, k_1 = m_i = n_i = 0$ .

Тогда при  $t > t_1$  получим

$$w = \frac{A(t - t_1)}{t_* - t}, \quad A = \frac{f h_2 (e_2 - e_{k2})}{\beta_1}, \quad \beta_1 = e_1 + e_{k2} f, \quad t_* = \frac{\omega^2 e_1 e_{k2}}{\beta_1} \quad (1.9)$$

Из уравнения равновесия (1.7), пользуясь выражением (1.9), получим

$$s_1'(t) = \frac{e_1 f [(t - t_*)^2 - B]}{\beta_1 (t_* - t)^2}, \quad s_2'(t) = \frac{e_{k2} f [(t - t_*)^2 + e_1 B / e_{k2} f]}{\beta_1 (t_* - t)^2}, \quad (1.10)$$

$$B = \frac{f t_* (e_2 - e_{k2}) (t_* - t_1)}{\beta_1 e_2}, \quad s_1'(t_1) = \frac{f (t_* e_{k2} - e_2 t_1)}{(t_* - t_1) \beta_1 \alpha}, \quad s_2'(t_1) = \frac{e_{k2} f (t_* - t_1)}{(t_* - t_1) \beta_1}.$$



Рассмотрим два возможных подслучая.

$a_1$ ) пусть материалы полки и геометрические параметры стержня таковы, что наряду с неравенствами (1.11), (1.13) выполняется также неравенство

$$t_{**} > t_{10}^- \quad (1.18)$$

Тогда на основании неравенств (1.14) и (1.15) имеем  $s_1'(t_{10}^-) < 0$ ,  $s_2'(t_{10}^-) > 0$ . Первое из этих неравенств в соответствии с (1.17) эквивалентно неравенствам

$$t_{**} - \sqrt{R^-} < t_{10}^- < t_{**} + \sqrt{R^-}, \quad R^- > 0 \quad (1.19)$$

Тогда для любых  $t$  из интервала  $t_{10}^- < t < t_{**} + \sqrt{R^-}$  имеем  $s_1'(t) < 0$ ,  $s_2'(t) > 0$ . Следовательно, решением (1.16) можно пользоваться во всем указанном интервале изменения  $t$ . В соответствии с неравенствами (1.19) прогиб является монотонно возрастающей функцией усилия  $t$  при  $t \rightarrow t_{**}$ ,  $w \rightarrow \infty$ . Таким образом, при  $t > t_1$  в случае справедливости неравенств (1.11), (1.13) и (1.18) прогиб от нуля возрастает до бесконечности при изменении нагрузки в интервале  $t_1 \leq t < t_{**}$ .

Соответствующая кривая  $KNP$  схематически изображена на фиг. 3. Нагрузку  $t_{**}$  назовем второй критической нагрузкой.

$a_2$ ) Если материалы полки и геометрические параметры стержня таковы, что наряду с неравенствами (1.11) и (1.13) выполняется также неравенство

$$t_{**} < t_{10}^- \quad (1.20)$$

то предполагая, что обе полки находятся в пластическом состоянии, имеем  $s_1'(t_{10}^-) > 0$ . Тогда из (1.7), (1.9), (1.12), (1.14), (1.15) и (1.20) следует, что при  $\Delta t = t - t_{10}^- > 0$

$$s_1 + s_{01} = \frac{e_{k1} f \Delta t [(t_{10}^- - t_{**})^2 - B - \Delta t (t_{**} - t_{10}^-)]}{\beta_2 (t_{**} - t_{10}^-) (t_{**} - t)} > 0$$

Последнее означает, что нарушается предполагаемый закон пластического деформирования в первой полке. Предположение о том, что при  $t > t_{10}^-$  напряжение в первой полке остается постоянным и равным пределу текучести при растяжении, также приводит к нарушению уравнений равновесия или совместности деформаций. Предположим теперь, что при  $t > t_{10}^-$  вторая полка догружается в пластическом состоянии (участок  $A_2B_2$ ), а первая находится в упругом состоянии на участке  $A_1C_1$  (фиг. 2). Тогда, как нетрудно убедиться, придем к противоречию с неравенствами (1.15) или, что — то же, с законом деформирования первой полки на участке  $A_1C_1$ . Предположение, что во второй полке, начиная с нагрузки  $t_{10}^-$ , происходит упругая разгрузка по некоторому участку  $B_2E_2$ , а в первой полке происходит растяжение на участке  $C_1D_1$ , очевидно, противоречит неравенству  $t > t_{10}^-$ . Возможен еще случай, когда при  $t > t_{10}^-$  вторая полка разгружается по участку  $B_2E_2$ , а напряжение в первой полке соответствует участку  $A_1C_1$  (при этом в принципе возможно увеличение нагрузки от значения  $t_{10}^-$  за счет различной скорости уменьшения модулей напряжения в полках). В этом случае из (1.5), (1.8) для прогиба  $w$  получим

$$w = \frac{w_0^- (t_9 - t_{10}^-)}{(t_9 - t)} \quad (1.21)$$

Подставляя это значение в (1.7) и пользуясь неравенствами (1.14), будем иметь

$$s_2'(t_{10}^-) = h_1 + \frac{At_9 (t_{10}^- - t_1)}{(t_{**} - t_{10}^-) (t_9 - t_{10}^-)} > 0$$

что противоречит исходному предположению о разгрузке при  $t = t_{10}^-$  во второй полке.

Таким образом, в случае стержней, для которых справедливы неравенства (1.11), (1.13), (1.20) равновесные состояния при  $t > t_{10}^-$  невозможны. Дальнейшее увеличение прогиба возможно только при уменьшении нагрузки. График зависимости прогиба от нагрузки в этом случае изображен на фиг. 3 линией  $KNQ$ . При этом отрезку  $KN$  соответствует решение (1.9), а отрезку  $NQ$  при  $e_{k1}^0 \leq e_{k1} \leq e_{k1}^1$  — решение (1.16), при  $0 \leq e_{k1} \leq e_{k1}^0$  — следующее решение

$$w = w_0^- + D_y^- \frac{(t - t_{01}^-)}{(t_{***} - t)}, \quad D_y^- = \frac{-\mu_1 h_2 f + (\beta + \mu_1 f) w_0^-}{\beta + \mu_1 f} \quad (1.22)$$

$$e_{k1}^0 = \frac{e_1 e_{k2} f t_{10}^- (t_{**} - t_{10}^-)}{e_{k2} f t_{**} (t_{**} - t_{10}^-) + e_1 B}, \quad e_{k1} = \frac{e_1 e_{k2} f t_{10}^-}{t_{**} \beta_1 - e_1 t_{10}^-}, \quad t_{***} = \frac{\omega^2}{\beta + \mu_1 f}$$

(соответствующее режиму  $D_1C_1$  в первой полке и режиму  $B_2E_2$  во второй полке).

Нагрузку  $t_{10}^-$  назовем третьей критической нагрузкой. Для указанного класса стержней эта нагрузка характеризует их несущую способность.

Отметим, что нагрузка  $t_{10}^-$  (и ей подобные) является критической нагрузкой в обычном бифуркационном смысле, так как при уменьшении нагрузки после достижения уровня  $t_{10}^-$  наряду с равновесной кривой  $NQ$  возможна также равновесная кривая  $NR$ , описываемая решением (1.21), соответствующим упругой разгрузке в обеих полках. Как и выше, нетрудно убедиться, что при выполнении неравенств (1.18) и  $t_* > t_1$ ,

$$t_9 e_{k2} \leq t_1 e_2 \quad (1.23)$$

поведение стержней соответствует ветви  $KNP$ , описываемой (1.9) и (1.16), а при выполнении неравенств (1.20) и (1.23) — ветви  $KNQ$ , описываемой (1.21) или (1.22), с критической нагрузкой  $t_{10}^-$ . Если же выполняются неравенства  $t_* < t_1$ ,  $t_9 e_{k2} \leq t_1 e_2$ , то поведение стержня соответствует кривой  $KM$ , определяемой уравнением (1.9) и для таких стержней первая критическая нагрузка (1.3) определяет их несущую способность. Опуская подробности анализа, приведем окончательные результаты для других случаев.

$$b) t_* > t_1, \quad t_9 e_{k2} > t_1 e_2, \quad t_m > t_{10}^+, \quad e_{k1} > e_{k1}^*$$

$$e_{k1}^* = \frac{e_1 e_{k2} f t_{10}^+ (t_* - t_{10}^+)}{e_{k2} f t_* (t_* - t_{10}^+) + e_1 B}$$

$$w = w_0^+ + \frac{D^+(t - t_{10}^+)}{(t_{**}^+ - t)} \quad (t_{10}^+ \leq t \leq t_{11}^+, A_1 B_1, A_2 B_2, KN) \quad (1.24)$$

$$w_0^+ = \frac{A(t_{10}^+ - t_1)}{t_* - t_{10}^+}, \quad t_{11}^+ = t_{**}^+ - \sqrt{\frac{D^+}{e_{k1}} \beta_2 t_{**}^+ (t_{**}^+ - t_{10}^+)}$$

$$J_1^+ = \frac{f[(e_2 - e_{k2})\beta_2(t_* - t_1) - e_{k2}e_2(e_1 - e_{k1})\beta(t_* - t_{10}^+)]}{e_2\beta_1\beta_2(t_* - t_{10}^+)}$$

$$w = w_1^+ + \frac{D_1^+(t - t_{11}^+)}{t_* - t} \quad (t_{11}^+ \leq t \leq t_{11}^-, B_1 E_1, A_2 B_2, KN)$$

$$w_1^+ = w_0^+ + \frac{D^+(t_{11}^+ - t_{10}^+)}{(t_{**}^+ - t_{11}^+)}, \quad t_{11}^- = p_1 + \sqrt{p_1^2 + q_1}$$

$$p_1 = \frac{f(h_2 - w_1^+)t_* + D_1^+ f t_{11}^+ + s_{11}}{f(h_2 - w_1^+ + D_1^+)}, \quad q_1 = \frac{s_{11} t_*}{f(h_2 - w_1^+ + D_1^+)}$$

$$s_{11} = f t_{11}^+ (h_2 - w_1^+), \quad D_1^+ = \frac{\mu_2 h_1 + (\mu_2 + \beta) w_1^+}{\mu_2 + \beta}$$

$$b_1) t_{**} > t_{11}^-$$

$$w = w_1^- + \frac{D_1^-(t - t_{11}^-)}{t_{**}^- - t} \quad (t_{11}^- \leq t < t_{**}^-, E_1 F_1, A_2 B_2, KNP) \quad (1.25)$$

$$w_1^- = w_1^+ + \frac{D_1^+(t_{11}^- - t_{11}^+)}{t_* - t_{11}^-}$$

$$D_1^- = \frac{\mu_2 h_1 - \mu_1 h_2 f + (\beta + \mu_2 + \mu_1 f) w_1^-}{\beta + \mu_2 + \mu_1 f}$$

$$b_2) t_{**} \leq t_{11}^-, \quad r_1 > 0$$

$$w = w_1^- + \frac{D_1^-(t - t_{11}^-)}{(t_{**}^- - t)} \quad (t \leq t_{11}^-, E_1 F_1, A_2 B_2, KNQ) \quad (1.26)$$

$$r_1 = (t_* - t_{11}^-)(t_{**}^- - t_{11}^-) - \frac{(\mu_2 + \beta h_2)}{(\beta + \mu_2 + \mu_1 f)} \left[ (t_* - t_{11}^-)^2 - \frac{(\mu_2 + \beta)}{(\mu_2 + \beta h_2)} D_1^+ t_* (t_* - t_{11}^+) \right]$$

$$b_3) t_{**} < t_{11}^-, \quad r_1 \leq 0$$

$$w = w_1^- + \frac{D_{1y}^-(t - t_{11}^-)}{t_{**}^- - t} \quad (t \leq t_{11}^-, E_1 F_1, B_2 E_2, KNQ) \quad (1.27)$$

$$D_{1y}^- = \frac{-\mu_1 h_1 f + (\beta + \mu_1 f) w_1^-}{\beta + \mu_1 f}$$

$$b_4) t_{**} < t_{11}^-$$

$$w = \frac{w_1^- (t_9 - t_{11}^-)}{(t_9 - t)} \quad (t \leq t_{11}^-, B_1 E_1, B_2 E_2, KNR) \quad (1.28)$$

$$c) t_* > t_1, t_0 e_{k2} > t_1 e_2, t_m > t_{10}^+, e_{k1} \leq e_{k1}^*, t_{**} > t_{10}^+$$

$$w = w_0^+ + \frac{D_2^+(t - t_{10}^+)}{t_{***} - t} \quad (t_{10}^+ \leq t \leq t_2, A_1 B_1, B_2 E_2, F U) \quad (1.29)$$

$$D_2^+ = \frac{-\mu_1 h_2 f + (\beta + \mu_1 f) w_0^+}{\beta + \mu_1 f}, \quad t_2 = p_2 + \sqrt{p_2^2 + q_2}$$

$$p_2 = \frac{(h_1 + w_0^+) t_{***} - (h_1 + w_0^+ + D_2^+) t_{10}^+}{(h_1 + w_0^+ + D_2^+)}, \quad q_2 = \frac{t_{10}^+ t_{***} (h_1 + w_0^+)}{(h_1 + w_0^+ + D_2^+)}$$

$$c_1) t_{**} > t_2$$

$$w = w_2 + \frac{D_2^-(t - t_2)}{t_{**} - t} \quad (t_2 \leq t \leq t_{**}, A_1 B_1, E_2 F_2, U L) \quad (1.30)$$

$$w_2 = w_0^+ + \frac{D_2^+(t_2 - t_{10}^+)}{t_{***} - t_2}, \quad D_2^- = \frac{\mu_2 h_1 - \mu_1 h_2 f + (\beta + \mu_2 + \mu_1 f) w_2}{(\beta + \mu_2 + \mu_1 f)}$$

$$c_2) t_{**} \leq t_2, \quad g > 0$$

$$w = w_2 + \frac{D_2^-(t - t_2)}{t_{**} - t} \quad (t \leq t_2, A_1 B_1, E_2 F_2, U G) \quad (1.31)$$

$$g = (t_{***} - t_2)(t_{**} - t_2)(\beta + \mu_2 + \mu_1 f) - (\beta h_1 + \mu_1 f)(t_{***} - t_2)^2 +$$

$$+ D_2^+(\beta + \mu_1 f) t_{***}(t_{***} - t_{10}^+)$$

$$c_3) t_{**} \leq t_2, \quad g \leq 0$$

$$w = w_2 + \frac{D_{2y}^-(t - t_2)}{(t_* - t)} \quad (t \leq t_2, B_1 E_1, E_2 F_2, U G) \quad (1.32)$$

$$D_{2y}^- = \frac{\mu_2 h_1 + (\beta + \mu_2) w_2}{\beta + \mu_2}$$

$$c_4) t_{**} \leq t_2$$

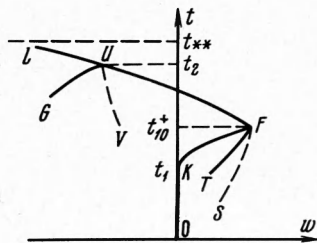
$$w = \frac{w_2(t_0 - t_2)}{t_0 - t} \quad (t \leq t_2, B_1 E_1, B_2 E_2, U V) \quad (1.33)$$

$$d) t_* > t_1, t_0 e_{k2} > t_1 e_2, t_m > t_{10}^+, e_{k1} \leq e_{k1}^*, t_{**} < t_{10}^+ \quad (1.34)$$

$$w = w_0^+ + \frac{D_2^+(t - t_{10}^+)}{t_{***} - t} \quad (t \leq t_{10}^+, A_1 B_1, B_2 F_2, F T)$$

$$w = \frac{w_0^+(t_0 - t_{10}^+)}{(t_0 - t)} \quad (t \leq t_{10}^+, A_1 C_1, B_2 E_2, F S)$$

Для каждого случая (1.24) — (1.34) в скобках указаны интервалы задаваемых нагрузок и режимы, для которых



Фиг. 4

получены приведенные рядом решения. Там же указаны кривые, которыми схематически изображены приведенные зависимости прогиба от нагрузки. Случаи а), б) приведены на фиг. 3, и случаи с), д) — на фиг. 4. Нагрузки  $t_{10}^+$ ,  $t_{11}^-$  изображены на фиг. 3 одной точкой.

Окончательно можно сделать следующие выводы. В общем случае неоднородного идеализированного стержня, сохраняющего прямолинейное невыпученное состояние в пределах упругости, изгиб начинается при первой критической нагрузке  $t_1$ , соответствующей достижению в одной из несущих полок предела текучести. При этом, если материалы и геометрические параметры стержня таковы, что удовлетворяются неравенства (1.4) и  $t_* < t_1$ ,  $t_0 e_{k2} \leq t_1 e_2$ , то критическая нагрузка  $t_1$  определяет несущую способность стержня. Если же удовлетворяются неравенства (1.4), (1.11), (1.13) и (1.20) или (1.4), (1.20), (1.23), то несущая способность стержня определяется критической нагрузкой  $t_{10}^+$ . В случае, когда справедливы неравенства (1.4), (1.24),

(1.26) или (1.27), несущая способность стержня определяется критической нагрузкой  $t_{11}^-$ , когда выполняются неравенства (1.4), (1.29) и (1.31) или (1.32) — критической нагрузкой  $t_2$  и когда удовлетворяются неравенства (1.4), (1.34) — критической нагрузкой  $t_{10}^+$ .

Если удовлетворяются неравенства (1.4), (1.11), (1.13) и (1.18), или (1.4), (1.18) и (1.23), или (1.4), (1.24) и (1.25), или (1.4), (1.29) и (1.30), то несущую способность стержня можно оценивать нагрузкой  $t_{**}$ .

2. Предыдущий анализ показывает, что в общем случае неоднородный идеализированный стержень начинает выпучиваться при нагрузке, соответствующей переходу одной из полок в пластическое состояние. Однако при некоторых ограничениях на характеристики материалов невыпученное безмоментное состояние стержня может сохраняться и после перехода полок в пластическое состояние. Чтобы выяснить эти ограничения, положим в выражении (1.8)  $w = 0$ ,  $k_i = 1$ ,  $m_i = n_i = 0$  при нескольких (по крайней мере двух) близких значениях  $t > t_1$ . Тогда получим

$$h_1\mu_2 - h_2\mu_1 f = 0, \quad \sigma_{01}\mu_1 - \sigma_{02}\mu_2 = 0 \quad (2.1)$$

Из (2.1) следует

$$\frac{E_2}{E_1} = \frac{E_{k2}}{E_{k1}} = \frac{\sigma_{02}}{\sigma_{01}} =: \alpha \quad (2.2)$$

Диаграммы материалов, характеристики которых связаны соотношением (2.2), назовем пропорциональными [1]. Считая диаграммы материалов полок стержня пропорциональными, из (1.8) для критической нагрузки получим выражение

$$t_k = \frac{\omega^2 e_{k2}}{1 + \alpha f}$$

Полагая материалы и размеры полок стержня одинаковыми, приходим к нагрузке Шенли [2] для идеализированного стержня.

Таким образом, в случае пропорциональных диаграмм растяжения материалов полок обычную постановку задачи об устойчивости стержня за пределом упругости можно сохранить.

В некоторых случаях, когда диаграммы материалов полок различны, для получения приближенных оценок для реальных критических нагрузок полезно найти критические нагрузки для стержней из материалов с пропорциональными диаграммами, полученными перестроением реальных диаграмм [1].

Если заменить реальную диаграмму материала первой полки пропорциональной по сравнению с диаграммой материала второй полки с коэффициентом пропорциональности  $\alpha = E_2 / E_1$ , то получим критическую нагрузку

$$t_{k1} = t_k \quad (2.3)$$

Перестраивая диаграмму реального материала второй полки пропорционально первой с коэффициентом  $\alpha$  и определяя критическую нагрузку, получим

$$t_{k2} = \frac{\omega^2 e_{k1} \alpha}{1 + \alpha f} \quad (2.4)$$

Сравнивая вторую критическую нагрузку  $t_{k2}$  с критическими нагрузками (2.3) и (2.4), нетрудно убедиться, что

$$\begin{aligned} t_{k2} < t_{**} < t_{k1} & \text{ при } E_{k2} / E_{k1} > \alpha \\ t_{k1} < t_{**} < t_{k2} & \text{ при } E_{k2} / E_{k1} < \alpha \end{aligned}$$

Эти неравенства показывают возможность получения оценок для критических нагрузок при помощи нагрузок Шенли для стержней из материалов, соответствующих пропорционально перестроенным диаграммам.

Поступила 15 VIII 1968

#### ЛИТЕРАТУРА

- Немировский Ю. В. Об устойчивости за пределом упругости слоистых оболочек несимметричного строения. Инж. ж. МТТ, 1966, № 4.
- Шенли Ф. Р. Анализ веса и прочности самолетных конструкций. М., Оборонгиз, 1957.