ПМТФ, № 3, 1972

УДК 536.46:533.6

СКОРОСТЬ РАСПРОСТРАНЕНИЯ И ПРЕДЕЛЫ СУЩЕСТВОВАНИЯ ТУРБУЛЕНТНОГО ПЛАМЕНИ

В. С. Баушев, В. Н. Вилюнов

(Томск)

При теоретическом исследовании турбулентного горения обычно принимают, что средняя скорость химической реакции (тепловыделения) определяется только средней температурой. Я. Б. Зельдович [1], а позднее Т. Карман [2] отметили необходимость учета влияния пульсаций температуры на величину скорости реакции. В работе [3] дана количественная оценка этого влияния на константу скорости реакции. Критический анализ различных подходов при теоретическом исследовании турбулентных пламен дан в обзорах [4, 5].

В данной статье показывается, что при учете пульсационной составляющей температуры и концентрации средняя скорость химической реакции зависит от градиента средней температуры и масштаба турбулентных пульсаций. Подробно исследован случай, когда в пламени протекает реакция первого порядка. Сформулирована краевая задача об отыскании собственного значения, которое является кинетической скоростью распространения турбулентного пламени. Дано доказательство теорем существования и единственности, определены пределы распространения пламени. Количественные закономерности скорости распространения, пределы и структура фронта турбулентного пламени анализируются по результатам численного счета ряда вариантов. Приводятся размерностные интерполяционные формулы для суммарной скорости распространения пламени.

1. Постановка задачи. При статистически осредненном подходе к описанию одномерной диффузионно-тепловой модели распространения турбулентного пламени при наличии подобия температуры и концентрации (равенство сумм коэффициентов тепломассопереноса ламинарных и турбулентных, $a_0 + a_1 = D_0 + D_1$) и не учета теплового расширения исходим из уравнения

$$\left[\frac{d^2}{d\xi^2} - \omega_1 \frac{d}{d\xi}\right] \langle\theta\rangle = \theta_0^{1-n} \langle\Phi(\theta)\rangle \tag{1.1}$$

с условиями

$$\xi = -\infty,\ \langle\theta\rangle = \theta_0;\ \xi = +\infty,\ \langle\theta\rangle = 0$$

где $\Phi(\theta)$ — актуальная скорость химической реакции

$$\Phi(\theta) = \theta^n \exp\left(\frac{-\theta}{1-\beta\theta}\right) \tag{1.2}$$

$\langle\theta\rangle$, $\langle\Phi(\theta)\rangle$, ξ, ω_1 — соответственно безразмерные средняя температура, средняя скорость химической реакции, координата, кинетическая скорость распространения турбулентного пламени. Связи между безразмерными и размерными величинами, масштабы измерения и параметры задачи определены равенствами

$$\langle\theta\rangle = \frac{E(T_+ - \langle T\rangle)}{RT_+^2},\quad \xi = \frac{x}{x_+},\quad \beta = \frac{RT_+}{E}$$

$$x_+ = [(a_0 + a_1)\tau_+]^{1/2},\quad \tau_+ = \rho^{1-n} z_0^{-1} \exp\left(\frac{E}{RT_+}\right)$$

$$\theta_0 = \frac{E(T_+ - T_-)}{RT_+^2},\quad \omega_1 = w_1 (a_0 + a_1)^{-1/2} \tau_+^{1/2} \tag{1.3}$$

Здесь T — температура, x — эйлерова координата, a, D — соответственно коэффициенты теплопроводности и диффузии, ρ — плотность, z_0 — предэкспонент, E — энергия активации, R — газовая постоянная, n — порядок реакции, w — скорость распространения пламени, τ_+ — характеристическое время реакции. Индексами 0 и 1 отмечаются соответственно параметры, характеризующие ламинарное и турбулентное горения, плюс и минус — индексы, обозначающие величины, характеризующие продукт реакции и исходную смесь.

Левая часть дифференциального оператора в уравнении (1.1) получена на основе рейнольдсова осреднения. Особую трудность составляет осреднение правой части, ибо функция мгновенной скорости химической реакции (1.2) существенно нелинейна. Здесь возможны несколько подходов. Наиболее общий подход заключается в разложении $\langle\Phi(\langle\theta\rangle + \theta')\rangle$ в ряд Тейлора и последующего использования правил Рейнольдса

$$\langle\Phi(\langle\theta\rangle + \theta')\rangle = \langle\Phi(\langle\theta\rangle) + \dot\Phi(\langle\theta\rangle)\theta' + {}^1/_2\ddot\Phi(\langle\theta\rangle)\theta'^2 + \ldots\rangle = \Phi(\langle\theta\rangle) + {}^1/_2\ddot\Phi(\langle\theta\rangle)\langle\theta'^2\rangle + \ldots \tag{1.4}$$

Здесь и далее точками обозначается дифференцирование по θ, штрихом — турбулентная пульсация.

При некоторых допущениях относительно старших моментов пульсаций получаются суммируемые ряды, что существенно облегчает теоретический анализ турбулентного горения. Первые члены разложения (1.4) приведены в [6]. Другой приближенный подход — использование простейшего правила среднего арифметического осреднения

$$2\langle\Phi(\theta)\rangle = \Phi(\langle\theta\rangle + \sqrt{\overline{\theta'^2}}) + \Phi(\langle\theta\rangle - \sqrt{\overline{\theta'^2}}) \tag{1.5}$$

Осреднение (1.5) удовлетворяет всем правилам Рейнольдса. Для реакции нулевого порядка осреднение (1.5) использовалось в [3]. В общем случае зависимости (1.2) имеем

$$2\langle\Phi(\theta)\rangle = (\langle\theta\rangle + \sqrt{\overline{\theta'^2}})^n \exp\left(-\frac{\langle\theta\rangle + \sqrt{\overline{\theta'^2}}}{1-\beta(\langle\theta\rangle + \sqrt{\overline{\theta'^2}})}\right) + (\langle\theta\rangle - \sqrt{\overline{\theta'^2}})^n \exp\left(-\frac{\langle\theta\rangle - \sqrt{\overline{\theta'^2}}}{1-\beta(\langle\theta\rangle - \sqrt{\overline{\theta'^2}})}\right) \tag{1.6}$$

В частности, если принять $\langle\theta'^m\rangle = 0$, при m четном и $\langle\theta'^m\rangle = (\sqrt{\overline{\theta'^2}})^m$ при m нечетном, то для $\beta = 0$ осреднение по способу (1.6) совпадает с осреднением по методу разложения в ряд (1.4).

Среднеквадратичная пульсационная составляющая температуры в (1.6) согласно теории пути смешения выражается через градиент осредненной температуры

$$\sqrt{\overline{\theta'^2}} = \frac{l_1}{x_+}\left|\frac{d\langle\theta\rangle}{d\xi}\right|, \quad \sqrt{\overline{\theta'^2}} = \frac{E\sqrt{\overline{T'^2}}}{RT_+^2} \tag{1.7}$$

где l_1 — тепловой масштаб пульсаций. Таким образом, средняя скорость химической реакции в отличие от актуальной зависит не только от температуры, но и от градиента и относительного масштаба турбулентных пульсаций $F = l_1 / x_+$.

Параметр F характеризует кинетические и гидродинамические свойства турбулентного горения. Полагая $a_1 = l_1\sqrt{\overline{w'^2}}$, где $\sqrt{\overline{w'^2}}$ — средняя квадратичная пульсационная составляющая скорость потока, получаем

$$\frac{1}{F^2\omega_0^2} = \frac{l_0}{l_1}\left[\frac{l_0}{l_1} + \frac{\sqrt{\overline{w'^2}}}{w_0}\right] \tag{1.8}$$

$$l_0 = a_0 / w_0, \quad \omega_0^2 = l_* / l_0, \quad l_* = w_0\tau_+$$

Здесь ω_0 — безразмерная скорость ламинарного горения, l_0 — тепловая ширина ламинарного фронта пламени, l_* — химическая ширина фронта пламени. Для крупномасштабной турбулентности при $\sqrt{\overline{w'^2}} / w_0 \gg l_0/l_1$ F связан с известными параметрами турбулентного горения К. И. Щелкина [7] и Коважного [8]

$$\tau_1 / \tau_+ = l_1 w_0 / l_* \sqrt{w'^2}, \quad \tau_1 / \tau_0 = l_1 w_0 / l_0 \sqrt{\overline{w'^2}}$$

а именно

$$\tau_1 / \tau_+ = F^2, \; \tau_1 / \tau_0 = {\omega_0}^2 F^2$$

Здесь $\tau_1 = l_1 / \sqrt{\overline{w'^2}}$ — время турбулентного смешения, $\tau_0 = l_0 / w_0$ — время тепловой релаксации ламинарного пламени.

В дальнейшем подробно рассматривается реакция первого порядка. Переходя к новым переменным (для краткости знак осреднения и индекс 1 опускаем)

$$u = \frac{\langle\theta\rangle}{\theta_0}, \quad p = -\frac{du}{d\xi} \tag{1.9}$$

задачу о скорости распространения пламени сведем к краевой задаче

$$dp / du = \Phi / p - \omega, \; 0 < u < 1 \tag{1.10}$$

$$P(0) = 0 \tag{1.11}$$

$$P(1) = 0 \tag{1.12}$$

$$2\Phi =$$

$$= \begin{cases} (u + Fp) \exp\left[\dfrac{-\theta_0 (u + Fp)}{1 - \sigma(u + Fp)}\right] + (u - Fp) \exp\left[\dfrac{-\theta_0 (u - Fp)}{1 - \sigma(u - Fp)}\right], & 0 < u < \varepsilon \\ 0, & \varepsilon \leqslant u \leqslant 1 \end{cases} \tag{1.13}$$

В силу четности Φ знак модуля p в (1.13) не пишется. По физическому смыслу задачи

$$\omega > 0, \; F > 0, \; \theta_0 > 0, \; \sigma = \beta\theta_0 = 1 - T_- / T_+ < 1$$

Поскольку уравнение (1.10) первого порядка, то, вообще говоря, не существует решения, удовлетворяющего сразу двум условиям (1.11), (1.12), кроме, быть может, некоторых значений ω.

2. Существование и единственность. Пределы распространения. Точка (0, 0) является особой точкой типа седла для уравнения (1.10). Из нее выходят два решения: $p_1(u)$ и $p_2(u)$. Наклоны интегральных кривых в особой точке являются корнями уравнения

$$\lambda^2 + \omega\lambda - 1 = 0 \tag{2.1}$$

$$\frac{dp_1(0)}{du} = \lambda_1 = -\frac{\omega}{2} + \sqrt{\frac{\omega^2}{4} + 1}, \quad \frac{dp_2(0)}{du} = \lambda_2 = -\frac{\omega}{2} - \sqrt{\frac{\omega^2}{4} + 1}$$

Предложение 1. Пусть $(0, u_*)$ — область непродолжаемого решения ([9], стр. 173) $p_1(u)$. Тогда для любых ω, F можно указать такое $k = k(u_*, \omega, F) > 0$, что в интервале $(0, u_*)$ будет выполняться неравенство

$$p_1(u) - ku > 0 \tag{2.2}$$

Подберем k таким образом, чтобы удовлетворялось неравенство

$$L \equiv {}^1/_2 (1 - Fk) \exp\left[\frac{-\theta_0 (1 - Fk) u}{1 - \sigma(1 - Fk) u}\right] + {}^1/_2 (1 + Fk) \exp\left[\frac{-\theta_0 (1 + Fk) u}{1 - \sigma(1 + Fk) u}\right] - 2\omega k - k^2 > 0 \tag{2.3}$$

Так как

$$L > {}^1/_2(1 - Fk)\exp\left[\frac{-\theta_0(1-Fk)u}{1-\sigma(1-Fk)u}\right] - 2\omega k - k^2 > \{\text{при } (1 - Fk) > 0\} > (1 - Fk)A - 2\omega k - k^2, \quad 2A = \exp\left[\frac{-\theta_0 u_*}{1-\sigma u_*}\right]$$

то (2.3) имеет место, если k удовлетворяет уравнению

$$(1 - Fk)A - 2\omega k - k^2 = 0 \tag{2.4}$$

где

$$k = -(\omega + AF/2) + \sqrt{(\omega + AF/2)^2 + A} \tag{2.5}$$

его положительный корень. Покажем, что с этим k выполняется (2.2). Перепишем (2.4) в виде

$$[k^2 + \omega k - 1] + [(\omega + AF)k + (1 - A)] = 0$$

Предположим, что $k \geqslant \lambda_1$, тогда в силу (2.1) выражение в первых квадратных скобках неотрицательно, а во вторых — положительно, а значит левая часть строго положительна. Но это невозможно. Следовательно, $k < \lambda_1$. Поэтому в окрестности $u = 0$ выполняется (2.2). Если предположить, что при некотором $0 < u_0 < u_*$ имеет место равенство

$$p_1(u_0) - ku_0 = 0$$

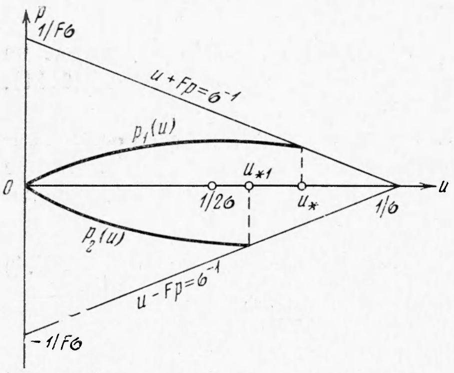
то в точке u_0 необходимо

$$\frac{dp_1}{du} = \frac{\Phi(u_0, p_1(u_0))}{p_1(u_0)} - \omega\,\Big|_{p_1(u_0)=ku_0} \leqslant k$$

что невозможно, так как последнее неравенство противоречит (2.3).

Следствие. При $u \to u_*$ точка интегральной кривой $(u, p_1(u))$ неограниченно приближается к линии $u + Fp = \sigma^{-1}$ (фиг. 1).

Действительно, $p_1(u)$ заключена между линиями $p = 0$ и $u + Fp = \sigma^{-1}$, на которых правая часть (1.10) терпит разрыв. При $u \to u_*$ точка интегральной кривой $(u, p_1(u))$ должна неограниченно приближаться к одной из указанных линий ([9], стр. 175). В силу (2.2) этой линией не может быть $p = 0$.



Фиг. 1

Замечание. Если $(0, u_{*1})$ — область непродолжаемого решения $p_2(u)$, то можно показать существование такого числа $k_1 < 0$ (например, отрицательный корень (2.4)), что в этой области будет выполняться неравенство $p_2(u) - k_1 u < 0$ и при $u \to u_{*1}$ точка интегральной кривой $(u, p_2(u))$ неограниченно приближается к линии $u - Fp = \sigma^{-1}$ (фиг. 1).

Исследуем п ведение функции Φ на решении $p_1(u)$. Так как $\Phi(0, p_1(0)) = 0$, а

$$\frac{d\Phi}{du} = \frac{\partial\Phi}{\partial u} + \frac{\partial\Phi}{\partial p_1}\frac{dp_1}{du}\Big|_{u=0} = 1$$

то Φ положительна в окрестности $u = 0$. Пусть $\Phi > 0$ при $0 < u < u_0$ и $\Phi(u_0, p_{10}) = 0$, $p_{10} = p_1(u_0)$. Тогда необходимо

$$\frac{d\Phi}{du}\Big|_{u=u_0} \leqslant 0 \tag{2.6}$$

Очевидно, что

$$2\frac{\partial \Phi}{\partial u}(u_0, p_{10}) > \left\{1 - \frac{\theta_0 (u_0 + F p_{10})}{[1 - \sigma (u_0 + F p_{10})]^2}\right\} \exp\left[\frac{-\theta_0 (u_0 + F p_{10})}{1 - \sigma (u_0 + F p_{10})}\right] + 1$$

Выражение, стоящее в правой части этого неравенства, перепишем в виде

$$\varphi(\zeta) = 1 - (\beta\zeta^2 + \zeta - 1)\exp(-\zeta)$$

$$\zeta = \frac{\theta_0 (u_0 + F p_{10})}{1 - \sigma (u_0 + F p_{10})}, \quad 0 < u_0 + F p_{10} < \sigma^{-1}, \quad 0 < \zeta < \infty$$

Величина $\varphi(\zeta)$ неотрицательна, если

$$\inf_{\zeta > 0} \varphi = 1 - (4\beta + 1) e^{-2} \geqslant 0$$

или

$$\beta \leqslant {}^1/_4 (e^2 - 1) \approx 1.597 \qquad (2.7)$$

Очевидно также, что

$$\frac{2}{F}\frac{\partial \Phi}{\partial p}(u_0, p_{10}) < \left\{1 - \frac{\theta_0 (u_0 + F p_{10})}{[1 - \sigma (u_0 + F p_{10})]^2}\right\} \exp\left[\frac{-\theta_0 (u_0 + F p_{10})}{1 - \sigma (u_0 + F p_{10})}\right] - 1$$

Правую часть этого неравенства представим в виде

$$\psi(\zeta) = -1 - (\beta\zeta^2 + \zeta - 1)\exp(-\zeta) = \varphi(\zeta) - 2$$

Нетрудно убедиться, что $\psi(\zeta) < 0$ при $\zeta > 0$. Таким образом, если β удовлетворяет условию (2.7), то

$$\frac{\partial \Phi}{\partial u}(u_0, p_{10}) > 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial p_1}(u_0, p_{10}) < 0$$

Учитывая, что

$$\frac{dp_1}{du}(u_0) = -\omega$$

получим

$$\left.\frac{d\Phi}{du}\right|_{u=u_0} > 0$$

Поскольку это неравенство противоречит (2.6), то это означает, что при выполнении условия (2.7) $\Phi(u, p_1)$ не может обратиться в нуль. Аналогично показывается, что (2.7) является достаточным условием для положительности Φ на решении $p_2(u)$. Функция Φ по физическому смыслу не отрицательна. Поэтому в дальнейшем полагаем, что β удовлетворяет условию (2.7). Физически ограничение (2.7) всегда выполнимо, ибо $\beta < 1$.

Предложение 2. Если $(0, u_*)$ — область непродолжаемого решения $p_1(u)$, то $u_* \geqslant 0.5\,\sigma^{-1}$.

В силу следствия предложения 1

$$\lim_{u \to u_*}(u + F p_1) = \sigma^{-1}$$

или

$$\lim_{u \to u_*} F p_1 = \sigma^{-1} - u_*$$

Поскольку

$$\lim_{u \to u_*}(u + F p_1)\exp\left[\frac{-\theta_0 (u + F p_1)}{1 - \sigma (u + F p_1)}\right] = 0$$

поэтому

$$\lim_{u \to u_*} \Phi = (u_* - 0.5\sigma^{-1}) \exp \left[\frac{-\theta_0 (u_* - 0.5\sigma^{-1})}{1 - \sigma u_*} \right]$$

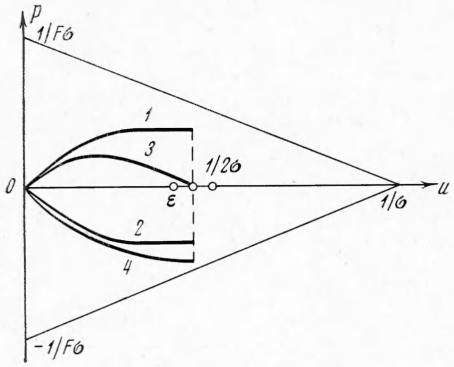
Если предположить, что $u_* < 0.5\,\sigma^{-1}$, то, как видно из последнего выражения, найдется такая окрестность точки $u = u_*$, в которой Φ будет отрицательна, но это невозможно, так как $\Phi\,(u,\ p_1) > 0$.

Замечание. Если $(0,\ u_{*1})$ — область непродолжаемого решения $p_2(u)$, то можно показать, что $u_{*1} \geqslant 0.5\sigma^{-1}$.

Следствие. Для любого $F > 0$ существует единственное $\omega > 0$, при котором решение уравнения (1.10) удовлетворяет условиям (1.11), (1.12), если

$$0.5\ \sigma^{-1} \geqslant \varepsilon \tag{2.8}$$

Доказательство проводится по методу Я. Б. Зельдовича [10]. Будем обозначать через $p_\varepsilon\,(u)$ решения (1.10) с условием (1.11), когда $0 < u < \varepsilon$. В силу предложения 2 и (2.8) $u_* \geqslant \varepsilon$, поэтому имеют смысл пределы



Фиг. 2

$$\lim_{u \to \varepsilon} p_{j\varepsilon}(u) = p_{j\varepsilon}(\varepsilon), \quad j = 1, 2$$

При $\omega = 0$ в силу положительности $\Phi\ p_{1\varepsilon}\ (\varepsilon) > 0$ и $p_{2\varepsilon}\ (\varepsilon) < 0$. Введем в рассмотрение производную решения p (пока безразлично $p_{1\varepsilon}$ или $p_{2\varepsilon}$)

$$q = \frac{\partial p\,(\omega, u)}{\partial \omega}$$

Так как, $p\ (\omega,\ 0) = 0$, то $q\ (0) = 0$. Уравнение для q получается дифференцированием (1.10) по ω

$$\frac{dq}{du} = q \frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{\Phi}{p}\right) - 1$$

а его решение с учетом условия при $u = 0$ имеет вид

$$q = -\exp\left(\int_0^u \frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{\Phi}{p}\right) du\right) \int_0^u \exp\left(-\int_0^u \frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{\Phi}{p}\right) du\right) du$$

Отсюда следует отрицательность q. Решения (1.10) с условием (1.11) в области $(0,\ 1)$ суть

$$p_j = \begin{cases} p_{j\varepsilon}(u), & 0 < u < \varepsilon \\ p_{j\varepsilon}(\varepsilon) - \omega\,(u - \varepsilon), & \varepsilon \leqslant u < 1 \end{cases}$$

причем

$$p_j\ (\omega,\ 1) = p_{j\varepsilon}\ (\omega,\ \varepsilon) - \omega\ (1 - \varepsilon)$$

Поскольку

$$\frac{dp_j\,(\omega, 1)}{d\omega} = q_j\,(\varepsilon) - (1 - \varepsilon) < -(1 - \varepsilon)$$

то $p_j\ (\omega,\ 1)$ с ростом ω монотонно и неограниченно убывает. Поскольку

$$p_1\ (0,\ 1) = p_{1\varepsilon}\ (0,\ \varepsilon) = -\,p_{2\varepsilon}\ (0,\ \varepsilon) = -\,p_2\,(0,\ 1) > 0$$

(фиг. 2, кривые *1, 2*), то с увеличением ω $p_2(\omega, 1)$ останется отрицательным, а $p_1(\omega, 1)$ при некотором единственном ω обратится в нуль (фиг. 2, кривые *3*, *4*). Учитывая, что $\varepsilon \approx 1$, соотношение (2.8), представим в виде приближенного неравенства $\sigma \leqslant 0.5$.

Рассмотрим теперь случай, когда

$$0.5 \quad \sigma^{-1} < \varepsilon \tag{2.9}$$

Пусть $(0, u_{*1})$ — область непродолжаемого решения $p_2(u)$. Так как при $u \to u_{*1}$ точка $(u, p_2, (u))$ неограниченно приближается к линии $u - Fp = \sigma^{-1}$, то

$$u_{*1} - Fp_2(\omega, u_{*1}) = \sigma^{-1}, \quad p_2(\omega, u_{*1}) = \lim_{u \to u_{*1}} p_2(\omega, u) \tag{2.10}$$

Считая u_{*1} функцией ω, после дифференцирования (2.10) по ω найдем

$$\frac{du_{*1}}{d\omega} = Fq_2(u_{*1})\left[1 - F\frac{dp_2}{du}(u_{*1})\right]^{-1} < 0 \tag{2.11}$$

поскольку $q_2(u_{*1}) < 0$ и $\dot{p}_2(u_{*1}) < 0$. Неравенство (2.11) означает, что u_{*1} с увеличением ω монотонно убывает. Если $u_{*1} < \varepsilon$ при $\omega = 0$, то в силу (2.11) неравенство сохранится и при $\omega > 0$. В этом случае решение $p_2(u)$ не существует в области (0,1). Если же $u_{*1} > \varepsilon$ при $\omega = 0$, то, как уже показывалось, $p_2(\omega, 1)$ монотонно убывает с увеличением ω, оставаясь отрицательным, пока не станет $u_{*1} < \varepsilon$. Таким образом, доказано утверждение о том, что при любом ω либо $p_2(u)$ не существует в (0,1), либо $p_2(\omega, 1)$ отрицательно. Поэтому в дальнейшем ограничимся рассмотрением лишь решений $p_1(u)$.

Предложение 3. Для любого F можно указать такие ω, что решение $p_1(u)$ будет существовать в области (0,1).

Для доказательства надо показать существование ω таких, что $u_* \geqslant \varepsilon$. Очевидно

$$\max_{0<u<\varepsilon} \Phi \leqslant \max_{y>0}\left[y \exp\left(\frac{-\theta_0 y}{1 - \sigma y}\right)\right] =$$

$$= \frac{2}{\theta_0(1 + 2\beta + \sqrt{1+4\beta})} \exp\left(\frac{-2}{1 + \sqrt{1+4\beta}}\right) = \Phi_m$$

Решение уравнения

$$\frac{dp_3}{du} = \frac{\Phi_m}{p_3} - \omega, \quad p_3(0) = 0 \tag{2.12}$$

ограничивает сверху $p_1(u)$ ([11], стр. 268). Нетрудно показать, что $p_3 < \Phi_m/\omega$, а значит, и $P_3 < \Phi_m / \omega$. Подберем ω так, чтобы $p = \Phi_m / \omega$ и $u = \varepsilon$ пересеклись в точке, находящейся не выше, чем точка пересечения линий $u = \varepsilon$ и $u + Fp = \sigma^{-1}$. Для этого необходимо

$$\Phi_m/\omega \leqslant F^{-1}(\sigma^{-1} - \varepsilon)$$

откуда

$$\omega \geqslant F\Phi_m \sigma(1 - \sigma\varepsilon)^{-1}$$

При таких ω в области $(0, \varepsilon)$ точка $(u, p_1(u))$ может неограниченно приблизиться к линии $u + Fp = \sigma^{-1}$ при условии пересечения интегральной кривой $p_1(u)$ линии $p = \Phi_m / \omega$, но это невозможно, значит $u_* \geqslant \varepsilon$.

Замечание. В силу предложения 3 в области (0,1) всегда можно построить решение $p_1(u)$. Если $p_1(\omega, 1) > 0$, то, увеличивая ω, всегда можно добиться выполнения условия (1.12). Если $p_1(\omega, 1) < 0$, естественно уменьшать ω. Однако возможен такой случай, когда $p_{1\varepsilon}(u)$ достигает линии $u + Fp = \sigma^{-1}$ раньше, чем $p_1(\omega, 1)$ обратится в нуль. Иными словами, возможен такой случай, когда какое бы ω ни брали, будет либо $u_* < \varepsilon$, либо $p_1(\omega, 1) < 0$, т. е. не существует такого ω, при котором $p_1(\omega, 1) = 0$. Поскольку неравенство (2.2) представляет интерес лишь в пределах области (0, ε), то в дальнейшем в (2.5) полагаем

$$2A = \exp\left(\frac{-\theta_0\varepsilon}{1 - \sigma\varepsilon}\right)$$

Покажем существование такого F_1, что для любых $F \leqslant F_1$ имеется единственное ω, при котором решение уравнения (1.10) удовлетворяет условиям (1.11), (1.12). Рассмотрим систему

$$\frac{\Phi_m}{\omega} = F^{-1}(\sigma^{-1} - \varepsilon) \qquad (2.13)$$

$$k\varepsilon - \omega(1 - \varepsilon) \geqslant 0 \qquad (2.14)$$

и ее решение

$$\omega = F\Phi_m \sigma (1 - \sigma\varepsilon)^{-1}$$

$$F \leqslant (1 - \sigma\varepsilon)\varepsilon A^{1/2} \{\Phi_m \sigma (1 - \varepsilon)[\Phi_m \sigma (1 + \varepsilon) + A\varepsilon(1 - \sigma\varepsilon)]\}^{-1/2} = F_1$$

При выполнении (2.13) функция $p_1(u)$ существует во всей области $0 < u < 1$. Из (2.14), учитывая (2.2), следует:

$$p_{1\varepsilon}(\omega, \varepsilon) - \omega(1 - \varepsilon) > 0$$

или

$$p_1(\omega, 1) > 0$$

Увеличивая ω, можно добиться выполнения (1.12) при некотором единственном ω.

Покажем теперь существование такого F_2, что если $F \geqslant F_2$, то решение уравнения (1.10), удовлетворяющее условиям (1.11), (1.12), не существует ни при каких ω. Рассмотрим систему

$$F\omega(1 - \varepsilon) = (\sigma^{-1} - \varepsilon) \qquad (2.15)$$

$$Fk\varepsilon - (\sigma^{-1} - \varepsilon) \geqslant 0 \qquad (2.16)$$

которая при условии (2.9) имеет решение

$$\omega = (1 - \sigma\varepsilon)[F\sigma(1 - \varepsilon)]^{-1}$$

$$F \geqslant \frac{1 - \sigma\varepsilon}{\sigma}\left[\frac{1 + \varepsilon}{A\varepsilon(1 - \varepsilon)(2\varepsilon - \sigma^{-1})}\right]^{1/2} = F_2$$

Выполнение неравенства (2.16) показывает, что прямые $p = ku$ и $u = \varepsilon$ пересекаются в точке, находящейся не ниже линии $u + Fp = \sigma^{-1}$ (фиг. 3). Это значит, что $u_* < \varepsilon$. Увеличением ω можно добиться, чтобы было $u_* \geqslant \varepsilon$ (см. предложение 3), т. е. такого положения, когда $p_{1\varepsilon}(\varepsilon) \leqslant F^{-1}(\sigma^{-1} - \varepsilon)$, но при этом $\omega(1 - \varepsilon) > F^{-1}(\sigma^{-1} - \varepsilon)$ и $p_{1\varepsilon}(\varepsilon) - \omega(1 - \varepsilon) < 0$. Возникает ситуация, о которой говорилось в замечании к предложению 3. Поскольку величина ε близка к единице, то (2.9) заменяем приближенным неравенством $\sigma > 0.5$.

Пусть множество $\{F_1\}$ такое, что если $F \in \{F_1\}$, то для него существует единственное ω, при котором решение (1.10) удовлетворяет условиям (1.11), (1.12)[1]. В силу существования F_2 множество $\{F_1\}$ ограничено свер-

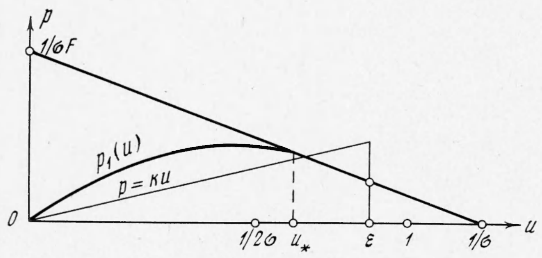
[1] Можно показать, что $\{F_1\}$ как множество на числовой оси является связным.

ху и, следовательно, имеет точную верхнюю грань. Величину $F_* = \sup\{F_1\}$ назовем критической, она определяет предел распространения турбулентного пламени.

Итак, в результате анализа получено следующее:

1) Φ неотрицательно, если $\beta \leqslant 0.25\ (e^2 - 1) \approx 1.597$;

2) задача о нахождении скорости горения имеет единственное решение при любых F, когда $0 \leqslant \sigma \leqslant 0.5$; для $0.5 < \sigma < 1$ решение существует лишь при $0 \leqslant F < F_*$, где $F_* = \sup\{F_1\}$.



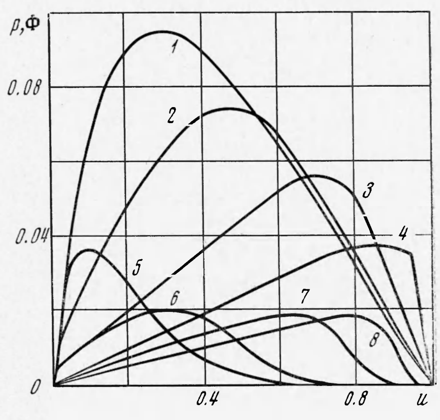
Фиг. 3

3. Анализ результатов. Для выяснения количественных характеристик турбулентного горения и структуры фронта пламени проведен счет задачи (1.10) — (1.12) на ЭВМ. Диапазон изменения параметров

$$6 \leqslant \theta_0 \leqslant 14,\quad 0 \leqslant \sigma \leqslant 0.9,\quad 0 \leqslant \beta \leqslant 0.15$$

Для $0 \leqslant \sigma \leqslant 0.5$, $0 \leqslant F < \infty$, при $\sigma > 0.5$ отыскивались предельные значения F_*.

Интегральные кривые $p\ (u)$ и закономерности изменения тепловыделения $\Phi\ (u)$ при $\theta_0 = 10$, $\beta = 0$, $\varepsilon = 0.95$ для различных F приведены на фиг. 4. Кривые *1*, *2*, *3*, *4* соответствуют $p\ (u)$ с разными значениями $F : F = 0, 3, 5, 10, 20$, а кривые *5*, *6*, *7*, *8* соответствуют $\Phi\ (u)$ при тех же F. В отличие от ламинарного ($F = 0$) турбулентное пламя ($F \neq 0$) растянуто (с ростом F уменьшается максимальный градиент p_m), а максимум осредненного тепловыделения существенно смещен в сторону начальной температуры.



Фиг. 4

Реакция протекает вблизи начальной температуры, а зона прогрева в турбулентном пламени намного уже зоны реакции. Это видно из фиг. 5, на которой дано распределение температуры u и тепловыделения Φ от ξ (для $F = 0$ и $F = 10$, $\theta_0 = 10$, $\beta = 0$). (Начало отсчета на фиг. 5 условно, ибо уравнение (1.1) инвариантно относительно преобразования $\xi \pm \text{const}$.)

При $F > 4$ наблюдается асимптотическое поведение Φ_m. Закономерности изменения характерных величин горения: p_m, Φ_m и их положения u_p, u_Φ, а также скорость распространения ω_1 в зависимости от F показаны на фиг. 6. Аналогичные качественные результаты получены и для $\sigma \neq 0$.

Найдем оценку скорости распространения пламени ω_1 при $F \gg 1$, $\theta_0 \gg 1$. В этом случае в окрестности u, близкой к параметру обрезания ε, $u + Fp \approx \sigma^{-1}$, поэтому Φ можно определить приближенным равенством

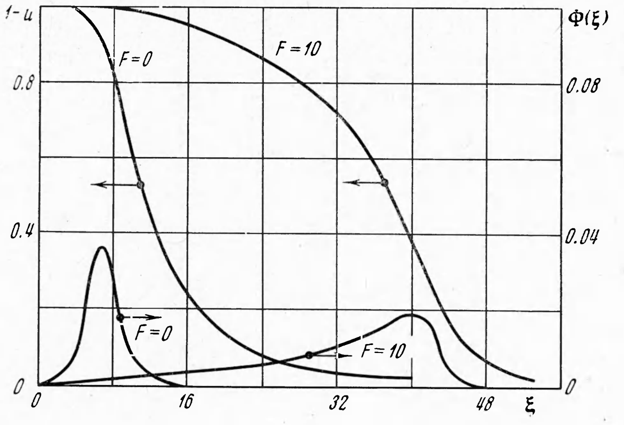
$$2\Phi = (u - Fp) \exp\left[\frac{-\theta_0 (u - Fp)}{1 - \sigma (u - Fp)}\right], \quad p > 0 \tag{3.1}$$

Отсюда следует, что Φ_m достигается при

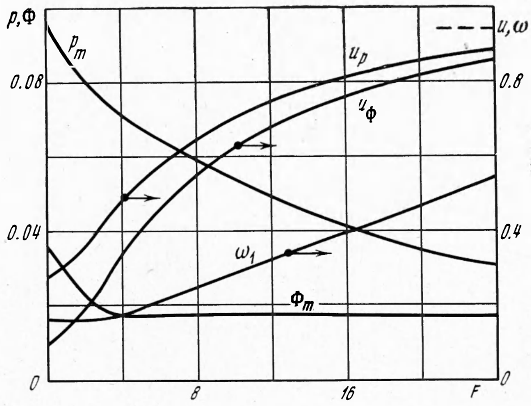
$$(u - Fp)_m = 2\theta_0^{-1} (1 + 2\beta + \sqrt{1 + 4\beta})^{-1} \tag{3.2}$$

и равно половине Φ_m при ламинарном горении

$$\Phi_m = \theta_0^{-1} (1 + 2\beta + \sqrt{1 + 4\beta})^{-1} \exp\left(\frac{-2}{1 + \sqrt{1 + 4\beta}}\right) \tag{3.3}$$



Фиг. 5



Фиг. 6

Поскольку при $F \gg 1$ происходит асимптотическое сближение максимумов p_m и Φ_m (фиг. 5), а $u \to \varepsilon$, то из (1.10) с учетом (3.2), (3.3) следует:

$$\omega_1 (F \gg 1) = F\,[\theta_0 \varepsilon (1 + 2\beta + \sqrt{1 + 4\beta}) - 2]^{-1} \exp\left(\frac{-2}{1 + \sqrt{1 + 4\beta}}\right) \tag{3.4}$$

Например, при $\theta_0 = 10$, $\beta = 0$, $\varepsilon = 0.95$, $F = 26$ из (3.4) получаем $\omega_1 = 0.564$, счет на ЭВМ дает $\omega_1 = 0.590$ (расхождение $\sim 5\%$).

На основе анализа многочисленных вариантов счета установлено, что ω_1 для $F \geqslant 5$ с ошибкой не хуже 1% представляется линейной зависимостью $\omega_1 = N + MF$, где N, M — функции θ_0, σ.

В физических переменных кинетическая скорость распространения пламени запишется в виде

$$w_1 = \frac{N}{\omega_0}\sqrt{1 + \frac{l_1\sqrt{w'^2}}{a_0}w_0 + \frac{M}{\omega_0^2}\frac{l_1 w_0^2}{a_0}} \tag{3.5}$$

При $F > 5$, $\tau_1 / \tau_+ > 25$, поэтому, принимая во внимание эстафетный механизм передачи горения [7], получаем

$$w_\Sigma = \sqrt{\overline{w'^2}} + \frac{N}{\omega_0}\sqrt{1 + \frac{l_1\sqrt{\overline{w'^2}}}{a_0}w_0 + \frac{M}{\omega_0^2}\frac{l_1 w_0^2}{a_0}} \tag{3.6}$$

Здесь w_Σ — суммарная скорость распространения пламени, N / ω_0, M / ω_0^2 — функции θ_0, σ. Интерполяционная формула (3.6) линейно «объединяет» ранее известные механизмы горения: первое слагаемое дает вклад поверхностной модели [7], второе — объемной [5] и третье — микрообъемной [5] или очаговой [12]. Для $F \gg 1$, $\sigma \leqslant 0.5$ горение осуществляется в основном по микрообъемному механизму.

При $0.7 \leqslant \sigma \leqslant 0.9$ найдены предельные величины F_*, ω_*, а также параметры τ_1 / τ_+, τ_1 / τ_0 (таблица). Их значения зависят от кинетики химической реакции.

σ	θ_0	F_*	τ_1/τ_+	τ_1/τ_0	ω_0	ω_*
0.7	6	10.5	110	5.17	0.2168	0.4490
	14	14	196	1.92	0.0984	0.2336
0.9	6	5.25	27.6	1.11	0.2004	0.2772
	14	8.25	68.1	0.61	0.0948	0.1581

В заключение отметим, что в данной работе не исследована устойчивость рассматриваемой модели турбулентного горения. Возможно, что в области $0 \leqslant \sigma \leqslant 0.5$ требование устойчивости наложит ограничения на параметр F.

4. Алгоритм вычисления ω. Если ω удовлетворяет уравнению

$$\Phi_m / \omega - \omega(1 - \varepsilon) = 0 \tag{4.1}$$

то в силу неравенства $p_{1\varepsilon} - \Phi_m / \omega < 0$ имеем

$$p_1(\omega, 1) = p_{1\varepsilon}(\omega, \varepsilon) - \omega(1 - \varepsilon) < 0$$

и, следовательно, решение (4.1) дает верхнюю границу интервала для корня уравнения

$$p_1(\omega, 1) = 0 \tag{4.2}$$

Искомое ω заключено в пределах $0 < \omega < \sqrt{\Phi_m / (1 - \varepsilon)}$. Корень уравнения (4.2) находится методом половинного деления. Пусть на s-м шаге получен интервал (ω_A^s, ω_B^s) внутри которого заключен корень (4.2). Тогда

$$(\omega_A^{s+1}, \omega_B^{s+1}) = \begin{cases} (\omega_A{}^s, \alpha), & \text{если} \quad p_1(\alpha, 1) < 0 \\ (\alpha, \omega_B{}^s), & \text{если} \quad u_* < \varepsilon \text{ или } p_1(\alpha, 1) > 0 \end{cases}$$

$$\alpha = 0.5(\omega_A{}^s + \omega_B{}^s)$$

Уравнение (1.10) решается разностным методом. Вычисления ведутся до выполнения неравенства

$$\omega_B{}^s - \omega_A{}^s < \delta \tag{4.3}$$

Во всех расчетах принималось $\delta = 10^{-4}$. Если неравенство (4.3) выполнено и $p_1(\omega_A^s, 1) > 0$, $p_1(\omega_B^s, 1) < 0$, то полагается, что $F < F_*$, если же (4.3) выполнено, а $p_{1\varepsilon}(\omega_A^s, u)$ продолжаемо до $u_* < \varepsilon$, то $F > F_*$.

Поступила 21 X 1917

ЛИТЕРАТУРА

1. Зельдович Я. Б. К теории горения неперемешанных газов. Ж. техн. физ., 1949, т. 19, вып. 10.
2. Karman Th. von, Millan G. Thermal theory of a laminar flame front near a cold wall. 4-th Sympos. (Internat.) on Combust. Cambridge, 1952; Baltimore, Williams and Wilkins Co., 1953.
3. Вулис Л. А. О влиянии пульсаций температуры на скорость турбулентного горения. Изв. АН КазССР, Сер. энерг., 1959, вып. 1.
4. Щелкин К. И. Гидродинамика горения. Физика горения и взрыва, 1968, т. 4, № 4.
5. Щетинков Е. С. Физика горения газов. М., «Наука», 1965.
6. Вилюнов В. Н., Дворяшин А. А. О закономерностях горения пороха *Н* в потоке газа. Физика горения и взрыва, 1971, т. 7, № 1.
7. Щелкин К. И., Трошин Я. К. Газодинамика горения. М., Изд-во АН СССР, 1963.
8. Kovasznay L. S. G. A comment on turbulent combustion. Jet Propulsion, 1956, vol. 26, No. 6.
9. Понтрягин Л. С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М., «Наука», 1965.
10. Зельдович Я. Б. К теории распространения пламени. Ж. физ. хим., 1948, т. 22, вып. 1.
11. Березин И. С., Жидков Н. П. Методы вычислений, т. 2. М., Физматгиз, 1962.
12. Соколик А. С., Карпов В. П., Семенов Е. С. О турбулентном горении газов. Физика горения и взрыва, 1967, т. 3, № 1.