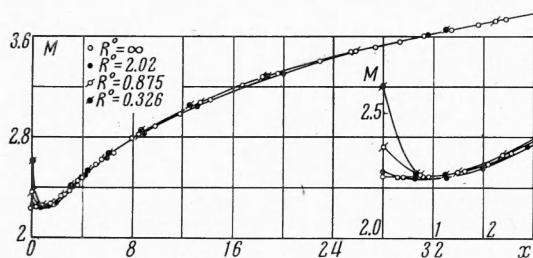


На базе рассчитанных вееров волн разрежения было рассчитано семейство сопел с угловой точкой с равномерным и параллельным оси потоком с $M_0 \approx 4$. Эти сопла отличались формой линии перехода в трансзвуковой части и, следовательно, — значениями R° . Распределения чисел M по стенке сопел приведено на фиг. 6. Примечательным является тот факт, что для сопел с криволинейной звуковой линией в сверхзвуковой части сопла в окрестности угловой точки имеется положительный градиент давления (минимум в распределении чисел M). При этом, чем больше R° , тем меньше величина градиента давления. Для сопла с прямолинейной звуковой линией положительный градиент давления отсутствует.

Немонотонность изменения числа M на контуре сопла с равномерным и параллельным оси потоком связана с немонотонностью поведения числа M на характеристиках веера волн разрежения, о которой говорилось выше. Действительно, так как характеристика на выходе из сопла



Фиг. 6

характеристика на выходе из сопла прямолинейна и параметры на ней постоянны, то все характеристики первого семейства также прямолинейны и параметры на них постоянны, следовательно, немонотонность изменения параметров на характеристиках веера волн разрежения переносится на контур сопла и на все промежуточные линии тока, лежащие выше точки пересечения последней характеристики — веера волн разрежения с характеристикой C_+^0 . Из сказанного выше следует, что в

сопле с угловой точкой положительный градиент будет отсутствовать, если в трансзвуковой области угловую точку располагать вниз по потоку от точки пересечения данной линии тока с характеристикой C_+^0 , т. е. вниз по потоку от точки D (см. фиг. 1).

Рассчитаем течение в заданном контуре сопла с угловой точкой, имеющего различные радиусы кривизны R° в трансзвуковой части сопла в точке $\theta = 0$. Такие расчеты были выполнены для сопла, контур которого рассчитан в предположении о прямолинейной звуковой линии на входе и равномерном и параллельном оси потоке на выходе сопла с $M_0 = 4$. Расчеты показывают, что и в этом случае, при наличии криволинейной поверхности перехода, вблизи угловой точки распределения чисел M для различных R° различны и существует положительный градиент давления. Однако на остальной части сопла распределения чисел M довольно близки, несмотря на различие в форме трансзвуковой области.

Поступила 15 VII 1966

ЛИТЕРАТУРА

1. Франкль Ф. И. Истечение сверхзвуковой струи из сосуда с плоскими стенками. Докл. АН СССР, т. 58, 1947, № 3.
2. Гудерлей К. Г. Теория околосзвуковых течений. Изд. Иностран. лит., 1960.
3. Зауэр Р. Течение сжимаемой жидкости. Изд. Иностран. лит., 1954.
4. Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В. Теоретическая гидромеханика, Ч. 2, Физматгиз, 1963.
5. Градштейн Н. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. Физматгиз, 1963.
6. Кацкова О. Н., Наумова И. П., Шмыглевский Ю. Д., Шулишина Н. П. Опыт расчета плоских и осесимметричных сверхзвуковых течений газа методом характеристик. ВЦ АН СССР, 1961.
7. Кацкова О. Н., Шмыглевский Ю. Д. Осесимметричное сверхзвуковое течение свободно расширяющегося газа с плоской поверхностью перехода. Сб. Вычислительная математика, Изд. АН СССР, 1957.

ДВИЖЕНИЕ ЗАРЯЖЕННОГО ГАЗА, ЗАПОЛНЯЮЩЕГО ЦИЛИНДРИЧЕСКУЮ ПОЛОСТЬ С СЕЧЕНИЕМ В ВИДЕ ПРОИЗВОЛЬНОГО ЭЛЛИПСА

В. А. Левин (Москва)

Рассмотрим движение однокомпонентного заряженного газа во внешнем магнитном поле и без него, который в начальный момент времени заполняет цилиндрическую полость с сечением в виде произвольного эллипса. Постоянное магнитное поле приложено вдоль оси цилиндра, а индуцированным магнитным полем пренебрегаем, так как рассматривается нерелятивистский случай, и электрические токи, которые возникают, малы. Движение газа является существенно двумерным, т. е. зависит от координат

x, y, t . Найти решение в общем виде не представляется возможным, но, тем не менее, в одном практически интересном случае задачу можно исследовать до конца и сделать определенные выводы. А именно, будем искать решение, описывающее однородную относительную деформацию газа в общем виде.

В обычной газовой динамике такие решения были получены в [1,2], в магнитной гидродинамике [3] и в газовой динамике — с учетом сил взаимного тяготения в [4].

Движение заряженного газа описывается следующей системой уравнений

$$m \frac{d\mathbf{u}}{dt} = q \text{grad } \varphi - \frac{q}{c} \mathbf{u} \times \mathbf{H}_0, \quad \frac{\partial n}{\partial t} + \text{div } n\mathbf{u} = 0, \quad \Delta \varphi = 2\pi q n \quad (1)$$

Здесь m — масса частицы, q — заряд, c — скорость света, n — плотность, φ — потенциал электрического поля, \mathbf{H}_0 — постоянное магнитное поле, приложенное вдоль оси Oz .

В начальный момент времени $t = 0$ газ с постоянной плотностью n_0 и линейным по координатам распределением скоростей заполняет цилиндр с сечением в виде эллипса $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$. Тот факт, что в сечении находится эллипс, обеспечивает квадратичный вид для потенциала φ , а это, в свою очередь, приводит к тому, что зависимость скорости от координат остается линейной с течением времени. Поэтому плотность будет однородной в каждый момент времени во всем сечении, которое будет оставаться в форме эллипса. Однако с течением времени размеры эллипса, характеризующиеся отношением полуосей, и ориентация его в пространстве будут изменяться.

Преобразуем систему уравнений (1). Для этого введем новые безразмерные переменные по формулам

$$n = n_0 N, \quad u = \sqrt{2\pi q^2 n_0 / m} a U, \quad \varphi = 2\pi q n_0 a^2 \Phi \\ t = \frac{\tau}{\sqrt{2\pi q^2 n_0 / m}}, \quad x = a\xi, \quad y = a\eta \quad (2)$$

В переменных Лагранжа (ξ_0, η_0, τ) получим

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \right)_{\xi_0, \eta_0} - \sigma V, \quad \frac{\partial \xi}{\partial \tau} = U \left(\sigma = \frac{qH_0}{mc} \sqrt{\frac{2\pi q^2 n_0}{m}} \right) \\ \frac{\partial V}{\partial \tau} = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \right)_{\xi_0, \eta_0} + \sigma U, \quad \frac{\partial \eta}{\partial \tau} = V \quad (3) \\ N \frac{\partial (\xi, \eta)}{\partial (\xi_0, \eta_0)} = i, \quad \Delta \Phi = N$$

Здесь символ $()_{\xi_0, \eta_0}$ означает, что сила в уравнениях движения записана в переменных ξ_0, η_0 . Решение ищем в виде

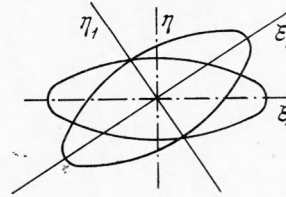
$$\xi = \xi_0 \mu_1(\tau) + \eta_0 \psi_1(\tau), \quad \eta = \xi_0 \psi_2(\tau) + \eta_0 \mu_2(\tau) \quad (4)$$

Для плотности N получим

$$N^{-1} = \mu_1 \mu_2 - \psi_1 \psi_2 = D \quad (5)$$

Проследим, как меняется форма сечения (фиг. 1). В момент времени $\tau = 0$ эллипс имел уравнение

$$\xi_*^2 + \beta^{-2} \eta_*^2 = 1 \quad (\beta = b/a)$$



Фиг. 1

С течением времени оси эллипса будут изменяться и изменять свою ориентацию относительно первоначального положения.

Уравнением эллипса в любой момент времени относительно первоначального положения осей будет

$$(\xi \mu_2 - \eta \psi_1)^2 D^{-2} + \beta^{-2} (\eta \mu_1 - \xi \psi_2)^2 D^{-2} = 1 \quad (6)$$

Видно, что граница осталась эллиптической, и в системе координат, связанной с главными осями, имеет место уравнение

$$\xi_1^2/a_1^2 + \eta_1^2/b_1^2 = 1$$

Здесь a_1 и b_1 — полуоси эллипса в подвижной системе координат, которая повернулась относительно неподвижной на угол θ .

Величины a_1, b_1 и θ вычисляются по известным формулам аналитической геометрии. Потенциал в подвижной системе координат определяется формулой

$$\Phi(\xi_1, \eta_1, \tau) = \Phi_0 + \frac{a_1 b_1 N}{2(a_1 + b_1)} \left(\frac{\xi_1^2}{a_1} + \frac{\eta_1^2}{b_1} \right) \quad (7)$$

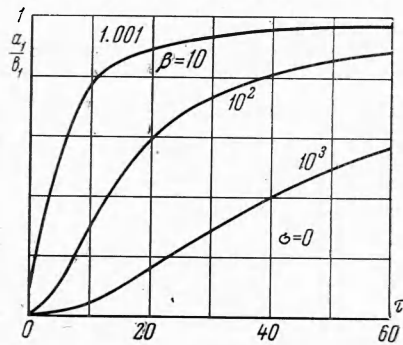
Подставляя выражение (7) в уравнения движения и используя формулы перехода от подвижной системы отсчета к неподвижной, для функций $\mu_1, \mu_2, \psi_1, \psi_2$ можно получить уравнения

$$\begin{aligned}\mu_1'' &= \frac{a_1 b_1 N}{2(a_1 + b_1)} \left[\mu_1 \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{b_1} \right) + \left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{b_1} \right) (\mu_1 \cos 2\theta + \psi_2 \sin 2\theta) \right] - \sigma \psi_2' \\ \mu_2'' &= \frac{a_1 b_1 N}{2(a_1 + b_1)} \left[\mu_2 \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{b_1} \right) + \left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{b_1} \right) (\psi_1 \sin 2\theta - \mu_2 \cos 2\theta) \right] + \sigma \psi_1' \\ \psi_1'' &= \frac{a_1 b_1 N}{2(a_1 + b_1)} \left[\psi_1 \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{b_1} \right) + \left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{b_1} \right) (\mu_2 \sin 2\theta + \psi_1 \cos 2\theta) \right] - \sigma \mu_2' \\ \psi_2'' &= \frac{a_1 b_1 N}{2(a_1 + b_1)} \left[\psi_2 \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{b_1} \right) + \left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{b_1} \right) (\mu_1 \sin 2\theta - \psi_2 \cos 2\theta) \right] + \sigma \mu_1'\end{aligned} \quad (8)$$

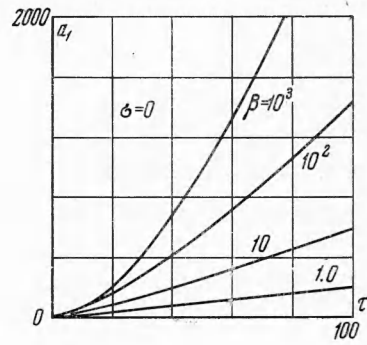
С начальными данными

$$\mu_i(0) = 1, \quad \psi_i(0) = 0, \quad \mu_i'(0) = \alpha_i, \quad \psi_i'(0) = \beta_i \quad (i = 1, 2)$$

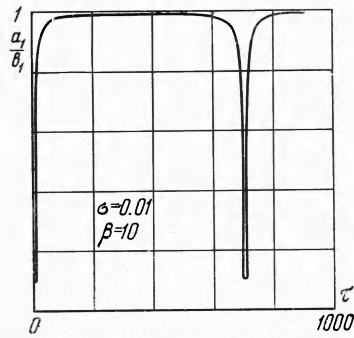
Величины a_1, b_1, N, θ выражаются известным образом через $\mu_1, \mu_2, \psi_1, \psi_2$.



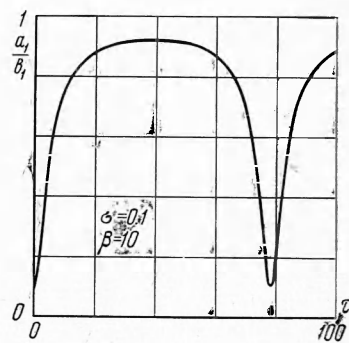
Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5

Если магнитное поле отсутствует ($\sigma = 0$) и в начальный момент времени $\psi_i'(0) = 0$, то можно получить решение в явном виде. В этом случае $\psi_1 = \psi_2 = \theta = 0$, а для величин μ_i из системы (8) получим

$$\mu_1'' = \frac{\beta}{\mu_1 + \beta \mu_2}, \quad \mu_2'' = \frac{1}{\mu_1 + \beta \mu_2} \quad (9)$$

Решение этой системы можно записать в виде

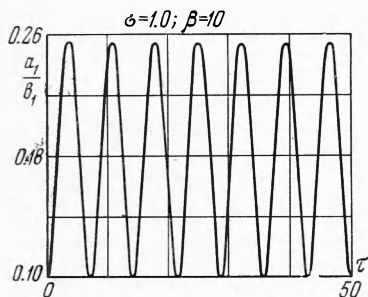
$$\mu_1 = \beta \mu_2 + (\alpha_1 - \beta \alpha_2) \tau + (1 - \beta)$$

$$\tau = \int_{1+\beta}^z \frac{dz}{\sqrt{(\alpha_1 + \beta \alpha_2)^2 + 4\beta \ln [z / (1 + \beta)]}}, \quad z = 2\beta \mu_2 + (\alpha_1 - \beta \alpha_2) \tau + (1 - \beta) \quad (10)$$

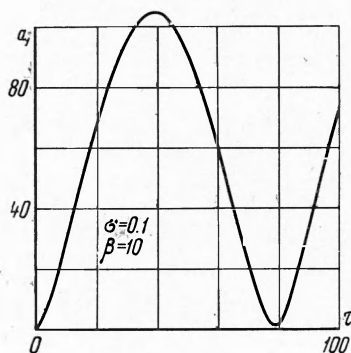
Отношение полуосей изменяющегося эллипса будет

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{\beta\mu_2 + (\alpha_1 - \beta\alpha_2)\tau + (1 - \beta)}{\beta\mu_2} \quad (11)$$

Из решения (10) следует, что первоначальный эллипс с любым отношением полуосей при $\tau \rightarrow \infty$ превращается в окружность, т. е. $a_1 / b_1 \rightarrow 1$ при $\tau \rightarrow \infty$. На фиг. 2, 3 изображено поведение величин a_1 / b_1 и a_1 в зависимости от времени для случая $\alpha_i = 0$ и для некоторых β . Полученный результат можно использовать для описания поведе-



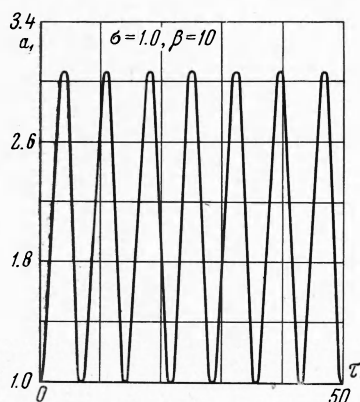
Фиг. 6



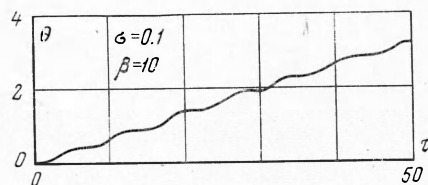
Фиг. 7

ния ленточных пучков заряженных частиц с сечением в виде эллипса, если условия таковы, что применима гипотеза плоских сечений. Тогда, каков бы ни был ленточный пучок с начальным сечением в виде эллипса, по мере распространения он стремится к кругу. При наличии магнитного поля $\sigma \neq 0$ система (8) интегрировалась численно для $\alpha_i = \beta_i = 0$. На фиг. 4—9 приведены результаты расчета для случая $\beta = 10$ и различных напряженностей магнитного поля. Во всех случаях, когда присутствует магнитное поле, отношение полуосей эллипса, так же как и сами полуоси, совершает

периодические колебания. Однако характер колебаний существенно зависит от напряженности магнитного поля. Чем больше напряженность, тем меньше период и амплитуда колебаний. Ориентация главных осей также изменяется. Они поворачиваются на угол θ относительно неподвижной системы отсчета. Изменения угла в зависимости от времени приведены на фиг. 9.



Фиг. 8



Фиг. 9

Если перенести эти результаты на пучки, то оказывается, что пучок имеет периодическую структуру и его главные оси поворачиваются при движении вдоль пучка. Автор благодарит Б. В. Кудашкина за проведение необходимых расчетов.

Поступила 2 XII 1966

ЛИТЕРАТУРА

1. Овсянников Л. В. Новое решение уравнений гидродинамики. Докл. АН СССР, 1956, т. 111, № 1.
2. Немчинов И. В. Разлет трехосного газового эллипсоида в регулярном режиме. ПММ, 1964, т. 29, вып. 1.
3. Куликовский А. Г. О движениях с однородной деформацией в магнитной гидродинамике. Докл. АН СССР, 1958, т. 120, № 5.
4. Зельдович Я. Б. Ньютоновское и эйнштейновское движения однородного вещества. Астрономический ж., 1964, т. 41, № 5.