

## НЕКОТОРЫЕ ПОСТАНОВКИ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ $L$ -ПЛАСТИЧНОСТИ

*А. Ф. Ревуженко, Е. И. Шемякин*

*(Новосибирск)*

4. Построение математических моделей деформируемой среды сводится обычно к описанию связей тензоров напряжений и (скоростей) деформаций. Такой подход основан на двух гипотезах: 1) среда предполагается сплошной; 2) при построении модели любой бесконечно малый объем среды наделяется свойствами макрообразца, если последний деформируется при некоторых граничных условиях, допускающих однородное распределение напряжений. Так, если образец деформируется упруго, то предполагается, что и каждый элементарный объем его деформируется упруго. Это предположение позволяет описание упругости свести к описанию упругого поведения элементарного объема. По аналогии правомерность такого перехода предполагается и при исследовании пластического поведения. Поэтому, как и в теории упругости, задача построения пластической модели сводится к описанию пластического поведения элементарного объема сплошной среды.

Можно, однако, указать класс материалов, для которых гипотеза о тождественности свойств образца и его элементарного объема не выполняется даже приближенно. Действительно, пусть некоторый образец при определенных нагрузках обнаруживает пластические свойства. Возможна ситуация, когда при указанных нагрузках образец разбивается дискретными поверхностями скольжения на отдельные части (блоки). В этом случае пластические свойства образца в целом связаны не только с неупругими деформациями блоков, но и с их относительными проскальзываниями друг по другу. Если блоки деформируются упруго, то пластические свойства образца зависят только от их относительных проскальзываний.

Таким образом, в общем случае можно выделить три стадии деформирования материала: 1) упругое деформирование, 2) пластическое деформирование, 3) деформирование в условиях локализации сдвигов. Деформирование материала на третьей стадии будем называть  $L$ -пластическим.

Естественно, что для определенных материалов некоторые из стадий деформирования могут отсутствовать. Кроме того, реализация той или иной стадии зависит от конкретных условий нагружения.

Методы теоретического анализа упругого и пластического деформирования базируются на двух указанных выше гипотезах и близки в том смысле, что в обоих случаях построение модели сводится к описанию связей напряжений и (скоростей) деформаций, характеризующих состояние элементарного объема. Для  $L$ -пластической стадии деформирования переход к элементарному объему невозможен, и поэтому при описании  $L$ -пластичности возникают новые задачи: формулировка критерия появления поверхностей скольжения, определение связи между проскальзыванием размерности длины по поверхности скольжения и соответствующими напряжениями, описание свойств материала, от которых может зависеть расстояние между поверхностями скольжения и т. д. Эксперименты с различными грунтами, сыпучими телами, горными породами, металлами и пр. показывают, что во многих случаях эти материалы ведут себя как  $L$ -пластические, т. е. при достаточных напряжениях материалы удовлетворяют накладываемым граничным условиям не только путем появления пластических областей,

но и скольжением по отдельным поверхностям [1—6]. Переход к  $L$ -пластической стадии может быть обусловлен различными причинами: потерей устойчивости процесса деформирования без локализации [6] (в частности, при условиях нагружения, допускающих однородное деформирование [4]), исходной неоднородностью материала (есть ослабления по изолированным поверхностям) и т. д.

Свойство локализации играло основополагающую роль на первых этапах развития механики грунтов. В частности, предельное условие сухого трения было введено Кулоном для поверхностей локализации и имело смысл только на этих поверхностях. Затем Кеттер ввел гипотезу о выполнении предельного условия Кулона в каждой точке деформируемой массы. Эта гипотеза дала толчок к новым постановкам и решениям задач в механике грунтов. В настоящее время в механике грунтов развиваются оба направления [7]. Причем результаты, полученные в рамках первого направления, считаются приближенными, инженерными, а результаты, полученные в рамках гипотезы Кеттера, — точными. Следует, однако, отметить, что в данном случае имеется в виду точность не в смысле более адекватного описания реальных процессов, а в смысле методов решения поставленной математической задачи. Приближенность результатов первого направления связана не с его основами, а с тем фактом, что в рамках этого направления обычно не рассматривается деформирование материала вне поверхностей локализации, а сами поверхности с некоторым произволом предполагаются заранее известными. В то же время в рамках моделей, основанных на гипотезе Кеттера, математическая задача решается обычно без введения дополнительных гипотез, и поэтому методы решения и результаты считаются точными. Если же понятию точности придавать смысл степени адекватности описания реальных процессов, то в некоторых случаях «приближенные» решения первого направления могут оказаться гораздо более точными, чем «точные» решения второго направления. Кроме того, в рамках первого направления можно часть дополнительных гипотез снять, и тогда «точность» результатов обоих направлений будет сравнима и в смысле строгости используемых математических методов.

Основная причина, по которой противопоставление этих направлений в общем случае некорректно, связана с тем, что в их рамках описываются различные стадии деформирования материала: кулоновское направление относится к  $L$ -пластической стадии деформирования и, по существу, представляет собой совокупность инженерных методов решения задач  $L$ -пластичности, кеттеровское же направление относится ко второй, пластической стадии деформирования.

В металлах факты локализации выражены не так отчетливо, как в грунтах, и поэтому направление, аналогичное кулоновскому, в теории пластичности практически не развивалось. Математическая теория пластичности с момента своего возникновения стала развиваться по второму пути, основанному на гипотезе о выполнении некоторого условия пластичности в каждой точке деформируемой среды.

Вместе с тем существует достаточно много экспериментальных фактов по локализации сдвиговых деформаций в металлах. Эти данные показывают, что  $L$ -пластическая стадия деформирования играет существенную роль и для металлов и направление, аналогичное кулоновскому направлению в механике грунтов, должно развиваться и в теории пластичности.

Стадия деформирования в условиях локализации сдвигов тесно связана с разрушением. Разрушение можно условно считать последней, четвертой стадией деформирования материала. Под разрушением понимается процесс разделения материала на части, который вследствие исчерпания взаимодействия по соответствующим поверхностям существенно влияет на

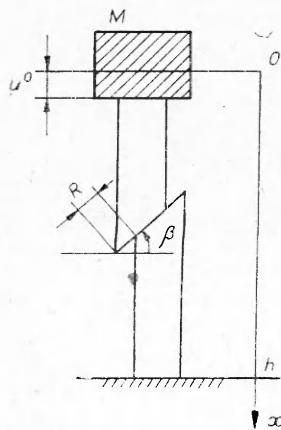
функциональные черты материала (конструкции). *L*-пластическая стадия означает локализацию деформации в условиях, когда на поверхностях локализации существуют достаточные силы взаимодействия и в целом материал (конструкция) не меняет своих функциональных признаков. Например, сжатие образцов при определенных условиях приводит к появлению у сжимающихся плит областей тесненного деформирования (ядер уплотнения, областей непосредственного влияния плит), которые отделены от области, примыкающей к свободной поверхности образца (областей влияния свободной поверхности), некоторыми поверхностями локализации [2] (*L*-пластическая стадия деформирования). Образец на этой стадии деформирования продолжает оказывать сопротивление сжатию и внешне ведет себя так же, как и при пластическом сжатии. Дальнейшее *L*-пластическое деформирование образца приводит к образованию новых поверхностей (вертикальных вследствие расклинивающего действия областей, примыкающих к плитам, или наклонных, иногда совпадающих с поверхностями локализации), по которым взаимодействия между частицами материала уже нет: образец меняет свои функциональные признаки. Это — стадия разрушения.

Таким образом, существует широкий класс задач, в которых *L*-пластическая стадия деформирования играет существенную роль и должна учитываться при теоретических расчетах; *L*-пластические постановки необходимы в задачах об одноосном и многоосном сжатии, вдавливании штампа, внедрении клина, опрокидывании свай и подпорных стен, в задачах о движении материалов в сходящихся каналах [6], деформировании горных пород вокруг выработок, задачах обработки металлов и порошков давлением и т. д.

Из определения следует, что модели *L*-пластичности примыкают к классу моделей разрушения, в которых учитывается взаимодействие между берегами трещины [8—11].

Рассмотрим некоторые постановки краевых задач *L*-пластичности в случае плоской деформации или плоского напряженного состояния. Решение краевых задач можно свести к отысканию разрывных функций, доставляющих экстремум определенным функционалам, которые зависят как от поведения функции в областях гладкости, так и от величин их разрывов.

2. Такой подход можно проиллюстрировать на следующем примере. Пусть упругий образец в условиях плоской деформации сжимается тяжелым телом *M* (фиг. 1).



Ф и г. 1

Высота образца равна  $h$ , ширина  $l$ , смещение в точке  $x = h$  отсутствует, в точке  $x = 0$  равно  $u^0$ . Предположим, что при некоторых граничных условиях в образце появляется одна линия скольжения с углом наклона  $(\pi/2 - \beta)$  к оси образца. Обозначим через  $R$  величину проскальзывания по линии. Тогда общее смещение точки  $x = 0$  складывается из двух частей: смещения  $u_e$  вследствие упругих деформаций образца и смещения  $R \sin \beta$  вследствие проскальзывания, т. е.

$$(2.1) \quad u^0 = u_e + R \sin \beta.$$

Предположим, что диссипация энергии  $U$  на единице длины линии скольжения зависит только от величины проскальзывания  $R$ . При активном нагружении, если пренебречь тепловыми эффектами, диссипацию  $U(R)$  можно условно счи-

тать «потенциальной» энергией тела, запасенной на линии разрыва. Тогда общая «потенциальная» энергия системы образец—тяжелое тело имеет вид

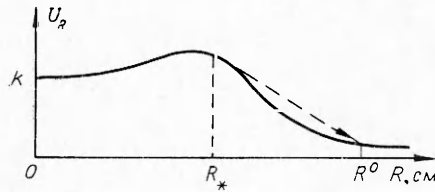
$$(2.2) \quad W = mg[h - (u_e + R \sin \beta)] + \frac{W(R)}{\cos \beta} + \frac{1}{2} \frac{E}{h} \frac{1}{1 - \nu^2} (u_e)^2,$$

где  $mg$  — вес тела;  $E$ ,  $\nu$  — упругие постоянные. Энергия  $W$  представляет собой функцию двух переменных:  $u_e$  и  $R$ . Предположим, что из всевозможных значений  $u_e$ ,  $R$  действительными будут те, которые доставляют энергии  $W$  минимум. В дальнейшем на переменные  $u_e$ ,  $R$  будем накладывать условие (2.1), где величина  $u^0$  (параметр нагружения) задана. Требование стационарности выражения (2.2) приводит к конечному уравнению относительно  $R$

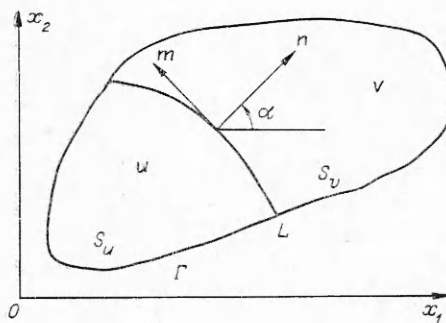
$$(2.3) \quad U_R(R) = -\frac{\lambda}{h} R + \frac{\lambda}{h \sin \beta} u^0,$$

где  $\lambda = \frac{E}{1 - \nu^2} \sin^2 \beta \cos \beta > 0$ . Выражение для второй вариации показывает, что равновесие (2.3) будет устойчивым при  $U_{RR} > -\lambda/h$  и неустойчивым или безразличным в остальных случаях. Производная  $U_R$  имеет смысл касательного напряжения на линии скольжения (фиг. 2). Условие, связывающее касательное напряжение с проскальзыванием размерности длины, вводилось в работе [9] и при обобщении континуальных моделей [12, 13] в работе [14]. Решение уравнения (2.3) удобно исследовать графически на плоскости  $(U_R, R)$ . Пусть параметр нагружения монотонно увеличивается от нуля. Тогда при  $0 \leq u^0 < u_1$  сдвиги по линии скольжения отсутствуют и весь образец деформируется целиком упруго. При дальнейшем нагружении  $u_1 \leq u^0 < u_2$  линия скольжения начинает функционировать и проскальзывания монотонно увеличиваются от 0 до  $R_*$  (см. фиг. 2). Деформирование образца на этом этапе устойчиво. В дальнейшем возможно два существенно различных режима деформирования. Если для заданных упругих свойств образца и диаграммы напряжение—проскальзывание длина образца меньше некоторой критической ( $h < -\lambda/U_{RR}$ ), то деформирование на падающей ветви будет устойчивым, т. е. при  $u \geq u_2$  проскальзывание  $R$  будет монотонно увеличиваться, причем малому увеличению параметра нагружения будет соответствовать малое увеличение проскальзывания  $R$ . Для достаточно длинного образца (или достаточно крутой падающей ветви, если длина образца и его упругие характеристики фиксированы) устойчивость процесса деформирования нарушится и величина проскальзывания изменится скачком от  $R_*$  до некоторого значения  $R^0$  (см. фиг. 2). Возможны также ситуации, когда на одних участках падающей ветви деформирование устойчиво, на других — неустойчиво. Все параметры  $u_1$ ,  $u_2$ ,  $R_*$ ,  $R^0$  можно определить из уравнения (2.3).

Рассмотрим механический смысл неустойчивости. На падающей ветви одновременно происходит два процесса: диссипация энергии на линии скольжения и уменьшение потенциальной упругой энергии материала вне линии. Если освобождается энергии меньше, чем диссипируется, то процесс деформирования устойчив и может продолжаться только при подводе энергии извне. Если же освобождается энергии больше, чем диссипируется, то деформирование неустойчиво и проскальзывания увеличиваются за счет внутренних ресурсов материала. При этом часть энергии переходит в кинетическую. Аналогичные эффекты имеют место и в континуальной модели [14]. В принципе реализация подобного эксперимента с контроли-



Ф и г. 2



Ф и г. 3

руемыми смещениями на границе позволит определить диаграмму  $U(R)$ .

Отметим, что все рассмотренные выводы следуют из принятого вариационного принципа и могли быть получены прямыми методами минимизации энергии  $W$ . Таким образом, применение вариационного принципа позволяет определить момент, при котором по линии скольжения начинаются сдвиги, решить задачу об устойчивом развитии линии скольжения, определить параметры нагружения, при которых начинается неустойчивое развитие, вычислить часть упругой энергии, которая переходит в кинетическую при неустойчивом процессе, и рассмотреть дальнейшее деформирование, когда скольжение опять переходит в устойчивый режим. Указанные возможности сохраняются

и в общей ситуации плоского и пространственного деформирования.

3. Рассмотрим плоское деформирование  $L$ -пластического материала. Пусть  $L$  — линия возможного разрыва,  $n$ ,  $m$  — нормальный и касательный к линии векторы,  $\alpha$  — угол между вектором  $n$  и осью  $Ox_1$ . Обозначим через  $u_1$ ,  $u_2$ ,  $v_1$ ,  $v_2$  компоненты вектора смещений в областях  $S_u$ ,  $S_v$  (фиг. 3). На линии  $L$  нормальная компонента смещений непрерывна

$$(3.1) \quad (v_1 - u_1) \cos \alpha + (v_2 - u_2) \sin \alpha = 0,$$

а касательная может испытывать разрыв  $R$

$$(3.2) \quad R = -(v_1 - u_1) \sin \alpha + (v_2 - u_2) \cos \alpha.$$

Величину разрыва будем называть проскальзыванием. Предположим, что диссипация энергии  $U$  на единице длины линии скольжения зависит только от величины проскальзывания (3.2) и координат:  $U = U(R, x_1, x_2)$ . Обозначим через  $F(u_i, p_{ij}, x_i)$ ,  $F(v_i, q_{ij}, x_i)$  потенциальную энергию единицы «объема» материала вне линий скольжения. Здесь  $i, j = 1, 2$ ;  $p_{ij} = \partial u_i / \partial x_j$ ;  $q_{ij} = \partial v_i / \partial x_j$ ,  $F_{p_{12}} \equiv F_{p_{21}}$ ,  $F_{q_{12}} \equiv F_{q_{21}}$ . Пусть на некоторых участках  $\Gamma_u$ ,  $\Gamma_v$  внешнего контура областей  $S_u$ ,  $S_v$  задан вектор напряжений  $\{X_i\}$  как функция граничных смещений, причем существует потенциал  $\Phi(u_1, u_2)$ :  $d\Phi = X_1(u_1, u_2) du_1 + X_2(u_1, u_2) du_2$ . Аналогичное условие выполняется и на  $\Gamma_v$ . Случай, когда функции  $X_i(u_j)$  сводятся к постоянным, соответствует заданным граничным напряжениям. Тогда полная «потенциальная» энергия системы имеет вид

$$(3.3) \quad W = \int_{S_u} F(u_i, p_{ij}, x_i) ds + \int_{S_v} F(v_i, q_{ij}, x_i) ds + \int_L U(R, x_i) dl - \\ - \int_{\Gamma_u} \Phi(u_i) dl - \int_{\Gamma_v} \Phi(v_i) dl.$$

Если линий возможного скольжения несколько, то в (3.3) должны стоять соответствующие суммы. Для сокращения записей ограничимся случаем одной линии. В общем случае результаты аналогичны. Выражение (3.3) представляет собой функционал относительно линии возможного разрыва  $L$  и поля перемещений. Предположим сначала, что линия  $L$  известна из дополнительных соображений и не варьируется. Введем следующий вариационный принцип: из всех кинематически возможных полей смещений, удовлетворяющих условию непрерывности (3.1) и граничным условиям относительно перемещений, действительным будет то, которое доставляет минимум функционалу  $W$ . Необходимое условие минимальности приводит к следующим уравнениям в областях  $S_u, S_v$ :

$$(3.4) \quad F_{u_i} - \frac{\partial}{\partial x_j} \{F_{p_{ij}}\} = 0_i, \quad F_{v_i} - \frac{\partial}{\partial x_j} \{F_{q_{ij}}\} = 0_i,$$

граничным условиям на  $\Gamma_u, \Gamma_v$

$$(3.5) \quad \begin{aligned} F_{p_{i1}} \cos \psi + F_{p_{i2}} \sin \psi &= X_i(u_1, u_2), \\ F_{q_{i1}} \cos \psi + F_{q_{i2}} \sin \psi &= X_i(v_1, v_2) \end{aligned}$$

и условиям на линии возможного разрыва

$$(3.6) \quad F_{p_{i1}} \cos \alpha + F_{p_{i2}} \sin \alpha = F_{q_{i1}} \cos \alpha + F_{q_{i2}} \sin \alpha = \Sigma_i;$$

$$(3.7) \quad -\sin \alpha \Sigma_1 + \cos \alpha \Sigma_2 = U_R,$$

где фигурные скобки означают полную производную; индекс в правой части (3.4) показывает, что суммирование проводится только по немому индексу  $j$ ;  $\psi$  — угол между нормалью к внешнему контуру и осью  $Ox_1$ . Уравнения (3.4) представляют собой уравнения равновесия в перемещениях, (3.5) — граничные условия для напряжений, (3.6) — условия непрерывности касательной и нормальной к линии  $L$  компонент тензора напряжений. Слева в условии (3.7) стоит предел касательного напряжения в областях  $S_u, S_v$  при подходе к линии  $L$ , справа — касательное напряжение  $U_R = T$ , которое развивается на линии вследствие проскальзывания  $R$ .

Таким образом, минимизация функционала  $W$  при условии непрерывности нормального смещения приводит к замкнутой системе уравнений, естественным граничным условиям и естественным условиям непрерывности на линии возможного скольжения. Полученные следствия подтверждают применимость введенного вариационного принципа.

Рассмотренная выше постановка является, по существу, полубратной, так как линии возможного скольжения предполагаются известными либо из экспериментальных данных, либо из условий симметрии, либо из дополнительных соображений. В точной постановке линии должны определяться в процессе решения задачи. Если линия заранее не фиксируется, то полная «потенциальная» энергия  $W$  представляет собой функционал относительно поля перемещений и линии возможного разрыва. Минимум функционала, который достигается на поле перемещений (3.4), представляет собой функционал относительно линии возможного скольжения. Естественно рассмотреть такие линии, которые доставляют полную «потенциальной» энергии наиболее глубокий минимум. В этом случае задача сводится к отысканию минимума функционала  $W$  в условиях, когда допускаются вариации как поля перемещений, так и положения линии скольжения.

Пусть  $x_i = x_i(t)$ ,  $t \in [t_1, t_2]$  — параметрические уравнения кривой  $L$ ,  $a = \sqrt{(x_1')^2 + (x_2')^2}$ . Символом  $\delta$  обозначим вариации функций при фиксированных аргументах, символом  $\bar{\delta}$  — вариации при условии, что аргументы также варьируются. Вариации самих аргументов обозначим через  $\bar{\delta}x_i$ . Варьированную линию  $L'$  будем считать близкой к  $L$  в смысле близости первого порядка ( $\bar{\delta}x_i \ll 1, \bar{\delta}x_i' \ll 1$ ). Через  $S'_u, S'_v$  обозначим варьированные области  $S_u, S_v$ . Каждое из пересечений  $(S'_u \cap S'_v), (S'_v \cap S'_u)$  распадается на ряд односвязных областей  $P_k, N_k$  (фиг. 4). Из вариации  $\delta W$  выделим суммы двойных интегралов по областям  $P_k, N_k$  и преобразуем их к виду

$$\sum_k \int_{P_k} [F(u_i \dots) - F(v_i \dots)] ds + \sum_k \int_{N_k} [F(v_i \dots) - F(u_i \dots)] ds = \\ = \int_{t_1}^{t_2} Q (\cos \alpha \bar{\delta}x_1 + \sin \alpha \bar{\delta}x_2) a(t) dt,$$

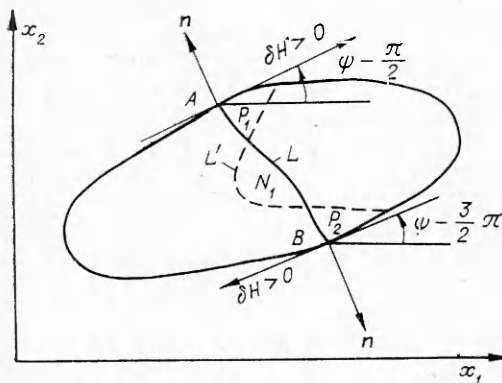
где  $Q = F(u_i \dots) - F(v_i \dots)$ . Рассмотрим ограничения на линии возможного скольжения. Условие сплошности (3.1) приводит к одной связи на вариации

$$(3.8) \quad (\bar{\delta}v_1 - \bar{\delta}u_1) \cos \alpha + (\bar{\delta}v_2 - \bar{\delta}u_2) \sin \alpha + R \bar{\delta}\alpha = 0,$$

где  $\bar{\delta}\alpha = \frac{x_1' \bar{\delta}x_2' - x_2' \bar{\delta}x_1'}{(x_1')^2 + (x_2')^2}$ . Причем

$$(3.9) \quad \bar{\delta}u_i = \delta u_i + p_{ir} \bar{\delta}x_r, \quad \bar{\delta}v_i = \delta v_i + q_{ir} \bar{\delta}x_r,$$

где значения всех функций можно брать на  $L$ . Уравнения (3.8), (3.9) совместно с уравнением  $-(\delta v_1 - \delta u_1) \sin \alpha + (\delta v_2 - \delta u_2) \cos \alpha = \delta R$  образуют



Фиг. 4

замкнутую систему относительно разностей  $(\delta v_i - \delta u_i)$ . Преобразуем криволинейный интеграл по  $L$  в обыкновенный определенный интеграл. Тогда  $W$  можно рассматривать как функционал относительно  $v_i(x_j), u_i(x_j)$  и  $x_i(t)$ . Причем вне линии скольжения все вариации  $\delta u_i, \delta v_i$  независимы, а на линии связаны одним условием (3.8). Следовательно, из шести вариаций  $\delta u_i, \delta v_i, \bar{\delta}x_i$  независимыми на линии будут только пять. В качестве независимых удобно выбрать следующие вариации:  $(\delta u_i + \delta v_i), \bar{\delta}x_i$  и  $\bar{\delta}R$ .

Опуская дальнейшие выкладки, приведем окончательные результаты. Экстремум полной «потенциальной» энергии достигается, если разрывное поле перемещений удовлетворяет соотношениям (3.4) — (3.7), а линии разрыва — уравнениям

$$(3.10) \quad \frac{d}{adt} \left( \sum_n R \cos \alpha + U \sin \alpha \right) + U_{x_i} + Q \cos \alpha + \Lambda_1 = 0,$$

$$\frac{d}{adt} \left( \sum_n R \sin \alpha - U \cos \alpha \right) + U_{x_1} + Q \sin \alpha + \Lambda_2 = 0,$$

где

$$\begin{aligned} \Sigma_n &= \Sigma_1 \cos \alpha + \Sigma_2 \sin \alpha; \Lambda_1 = (q_{11} - p_{11})\Sigma_1 + (q_{21} - p_{21})\Sigma_2; \\ \Lambda_2 &= (q_{12} - p_{12})\Sigma_1 + (q_{22} - p_{22})\Sigma_2. \end{aligned}$$

Уравнения (3.10) получены в результате приравнивания нулю коэффициентов при вариациях  $\bar{\delta}x_1, \bar{\delta}x_2$ . Так как обе вариации при  $t_1 < t < t_2$  считаются независимыми, то в (3.10) должна содержаться информация и о варьировании линии разрыва вдоль себя. Естественно, что при таком варьировании никаких условий на  $L$  получиться не должно. Действительно, систему (3.10) можно преобразовать к виду

$$\begin{aligned} (3.11) \quad & \frac{d}{adt} (R\Sigma_n) + U \frac{d\alpha}{adt} + U_{x_1} \cos \alpha + U_{x_2} \sin \alpha + Q + \Lambda_1 \cos \alpha + \\ & + \Lambda_2 \sin \alpha = 0, \\ & - \frac{dU}{adt} + R\Sigma_n \frac{d\alpha}{adt} - U_{x_1} \sin \alpha + U_{x_2} \cos \alpha - \Lambda_1 \sin \alpha + \Lambda_2 \cos \alpha = 0, \end{aligned}$$

причем непосредственной проверкой можно показать, что последнее равенство выполняется тождественно.

Рассмотрим естественные граничные условия для линии (3.11). Прежде всего отметим, что концы линии должны лежать на внешнем контуре т. е. в точках  $t = t_1, t_2$

$$(3.12) \quad \bar{\delta}x_1 = \bar{\delta}H \sin \psi, \quad \bar{\delta}x_2 = -\bar{\delta}H \cos \psi,$$

где  $\delta H > 0$  соответствует смещению точки  $t_1$  в сторону области  $S_u$ , а точки  $t_2$  в сторону области  $S_v$  (см. фиг. 4). Из выражения для вариации полной «потенциальной» энергии  $W$  можно выделить слагаемые, представляющие собой значение некоторых функций в точках  $t_1, t_2$ . Требование минимальности функционала  $W$  при ограничениях (3.12) приведет к определенным граничным условиям в точках  $t_1, t_2$ . Рассмотрим условия в точке  $t_2$ . Для точки  $t_1$  результаты аналогичны. Из условия  $\delta W = 0$  следует, что при  $t = t_2, \delta H \neq 0$

$$(3.13) \quad -[U(R, x_1, x_2) \cos(\psi - \alpha) + \Sigma_n R \sin(\psi - \alpha)] + c = 0,$$

где  $c$  — отнесенное к  $\delta H$  слагаемое, которое может появиться при вычислении вариации

$$\delta I_0 = - \int_{\Gamma'_u} \Phi(u_i + \delta u_i) dl + \int_{\Gamma_u} \Phi(u_i) dl - \int_{\Gamma'_v} \Phi(v_i + \delta v_i) dl + \int_{\Gamma_v} \Phi(v_i) dl,$$

где  $\Gamma'_u, \Gamma'_v$  — контуры  $\Gamma_u, \Gamma_v$  после варьирования линии  $L$ . Пусть в двусторонней окрестности точки  $t_2$  заданы непрерывные смещения. Тогда  $\Gamma'_u = \Gamma_u, \Gamma'_v = \Gamma_v$  и  $c = 0$ . Если в двусторонней окрестности точки  $t_2$  заданы непрерывные напряжения или потенциал  $\Phi$ , то  $c = -\Phi(u_i) + \Phi(v_i)$ . Предположим теперь, что положение конца линии скольжения  $L$  известно (например,  $t_2$  совпадает либо с точкой разрыва граничных перемещений или напряжений, либо с точкой смены типа граничных условий и т. д.). В этом случае  $\delta H = 0$  и условие (3.13) заменяется на следующее:  $x_i(t_2) = x_i^0$ , где значения  $x_i^0$  заданы.



Таким образом, усиленный вариационный принцип позволяет определять как разрывное поле смещений, так и положение линий разрыва. Однако в общем случае линии, полученные непосредственно из вариационного принципа, не могут рассматриваться как действительные, так как при таком подходе не учитывается история нагружения материала. Так, в случае одноосного сжатия угол наклона линии скольжения равен  $\pi/4$  только для  $mg = 2kl$ . Если вычислить  $\beta$  непосредственно для  $mg > 2kl$  без учета постепенного увеличения  $mg$ , то окажется, что угол  $\beta \neq \pi/4$  и зависит от  $mg$ . Тем не менее линии (3.11) могут служить для оценок реального процесса  $L$ -пластического деформирования.

Выше в качестве функционала использовалась полная «потенциальная» энергия. Можно рассмотреть аналогичные постановки и для других функционалов (типа дополнительной работы и т. д.). Все результаты легко обобщаются на случай, когда наряду с касательной допускается разрыв и нормальной к линии компоненты смещения (задачи о развитии трещин нормального разрыва и др.) [15]. Кроме того, аналогичные результаты имеют место и в случае пространственного деформирования (разрывы перемещений допускаются на изолированных поверхностях).

4. В заключение рассмотрим случай, когда задачу  $L$ -пластичности можно свести к краевой задаче для аналитических функций. Пусть области вне линий скольжения деформируются линейно-упруго,  $\varphi, \psi$  — комплексные потенциалы в области  $S_u$ ,  $\xi, \eta$  — потенциалы в области  $S_v$ . Обозначим штрихами компоненты смещений и напряжений в локальных координатах с направлениями осей по векторам  $\mathbf{n}, \mathbf{m}$  (см. фиг. 3). Тогда

$$(4.1) \quad \begin{aligned} 2u'_1 &= (u_1 + iu_2)e^{-i\alpha} + (u_1 - iu_2)e^{i\alpha}, \\ 2\sigma'_{11} + 2i\sigma'_{12} &= (\sigma_{11} + \sigma_{22}) + (\sigma_{11} - \sigma_{22} + 2i\sigma_{12})e^{-2i\alpha}. \end{aligned}$$

Аналогичные формулы верны и в области  $S_v$ . Выражение для скачка касательной к линии скольжения компоненты смещения  $R = v'_2 - u'_2$  с учетом условия непрерывности  $u'_1 = v'_1$  можно преобразовать к виду

$$(4.2) \quad iR = (v_1 + iv_2)e^{-i\alpha} - (u_1 + iu_2)e^{-i\alpha}.$$

По известной функции  $U_R(R, x_i)$  можно построить обратную функцию и перейти к функции  $\Omega$

$$(4.3) \quad iR = \Omega(2i\sigma'_{12}, z), \quad z = x_1 + ix_2.$$

Таким образом, на линии возможного скольжения должны выполняться условия непрерывности выражений в левых частях (4.1) и условие сопряжения (4.3). Выразим по формулам Колосова—Мусхелишвили [16] компоненты смещений и напряжений в областях  $S_u, S_v$  и воспользуемся соотношениями (4.1) — (4.3). Тогда все условия сопряжения на линии  $L$  можно представить в виде

$$(4.4) \quad \begin{aligned} &(\kappa\varphi - \bar{z}\bar{\varphi}' - \bar{\psi})e^{-i\alpha} + (\kappa\bar{\varphi} - z\varphi' - \psi)e^{i\alpha} = \\ &= (\kappa\xi - \bar{z}\bar{\xi}' - \bar{\eta})e^{-i\alpha} + (\kappa\bar{\xi} - z\xi' - \eta)e^{i\alpha}, \\ &(\varphi' + \bar{\varphi}') - (z\bar{\varphi}'' + \bar{\psi}')e^{-2i\alpha} = \\ &= (\xi' + \bar{\xi}') - (z\bar{\xi}'' + \bar{\eta}')e^{-2i\alpha}, \\ &[\kappa(\xi - \varphi) - z(\bar{\xi}' - \bar{\varphi}') - (\bar{\eta} - \bar{\psi})]e^{-i\alpha} = \\ &= 2\mu\Omega[-(z\bar{\varphi}'' + \bar{\psi}')e^{-2i\alpha} + (\bar{z}\varphi'' + \psi')e^{2i\alpha}, z], \end{aligned}$$

где  $\mu$  — модуль сдвига;  $\kappa = (3 - \nu)/(1 + \nu)$  для плоского напряженного состояния и  $\kappa = 3 - 4\nu$  для плоской деформации;  $\alpha$  — известная функция (полуобратная постановка, линии возможного скольжения известны).

Таким образом, задача  $L$ -пластичности сводится к отысканию аналитических функций  $\varphi$ ,  $\psi$ ,  $\xi$ ,  $\eta$ , удовлетворяющих на внешнем контуре граничным условиям, определяемым формулами Колосова—Мухелишвили, и на линии  $L$  — условиям сопряжения (4.4).

Аналогично формулируется задача и в случае нескольких линий возможного скольжения. Пример решения краевой задачи рассмотрен в [17].

Поступила 8 V 1978

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Губкин С. И. Пластическая деформация металлов. М., Metallurgizdat, 1961.
2. Зеленин А. Н., Ломизе Г. М. О напряженном состоянии образцов при сжатии и малых пластических деформациях грунта. — В кн.: Доклады к V Международному конгрессу по механике грунтов и фундаментостроению. М., Госстройиздат, 1961.
3. Надаи А. Пластичность и разрушение твердых тел. М., «Мир», 1969.
4. Ревуженко А. Ф., Стажевский С. Б., Шемякин Е. И. О механизме деформирования сыпучего материала при больших сдвигах. — ФТПРПИ, 1974, № 3, с. 130—133.
5. Roscoe K. H. The influence of strains in soil mechanics. — «Geotechnique», 1970, vol. 20, N 2, p. 129—170. Рус. пер. Роско К. Значение деформаций в механике грунтов. — Сб. пер. Механика, 1971, № 3.
6. Ревуженко А. Ф., Стажевский С. Б., Шемякин Е. И. О несимметрии пластического течения в сходящемся симметричном канале. — ФТПРПИ, 1977, № 3, с. 3—9.
7. Николаевский В. И. Механические свойства грунтов и теория пластичности. — В кн.: Механика твердых деформированных тел. Т. 6. М., ВИНТИ, 1972.
8. Черепанов Г. П. О развитии трещин в сжатых телах. — ПММ, 1966, т. 30, № 61, с. 82—93.
9. Palmer A. C., Rice J. R. The growth of slip surfaces in the progressive failure of over-consolidated clay. — «Proc. Roy. Soc.», Ser. A, 1973, vol. 332, p. 527—548. Рус. пер. Палмер А., Райс Дж. Рост поверхностей скольжения при постепенном оползании переуплотненной глины. — Сб. пер. Механика, 1974, № 6.
10. Баренблатт Г. И. Математическая теория равновесных трещин, образующихся при хрупком разрушении. — ПМТФ, 1961, № 4, с. 3—56.
11. Леонов М. Я., Панасюк В. В. Развитие найдрібніших тріщин в твердому тілі. — ПМ, 1959, т. 5, вып. 4, с. 391—401.
12. Ревуженко А. Ф. Предельное равновесие сыпучей среды с нарушенной структурой. — ФТПРПИ, 1974, № 2, с. 9—15.
13. Ревуженко А. Ф., Шемякин Е. И. Кинематика деформирования сыпучей среды с невязким трением. — ПМТФ, 1974, № 4, с. 119—124.
14. Ревуженко А. Ф., Шемякин Е. И. К вопросу о плоском деформировании упрочняющихся и разупрочняющихся пластических материалов. — ПМТФ, 1977, № 3, с. 156—174.
15. Крамаренко В. И., Ревуженко А. Ф. Некоторые задачи разрушения в вариационных постановках. — ФТПРПИ, 1978, № 6.
16. Мухелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. 5-е изд. М., «Наука», 1966.
17. Крамаренко В. И. Развитие линии скольжения в бруске при изгибе. — ПМТФ, 1979, № 2.