

К ТЕОРИИ ЭНТРОПИЙНОГО СЛОЯ

Ю. Л. Жилин (Москва)

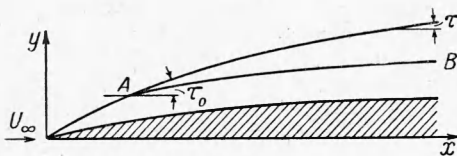
В работах [1,2] было показано, что при обтекании тонких затупленных тел гиперзвуковым потоком газа аналогия с нестационарным движением поршня (закон плоских сечений) справедлива с меньшей точностью, чем τ^2 в области течения, прилегающей к телу. Согласно работам [1,2], эта область потока образована линиями тока, пересекающими скачок уплотнения вблизи затупления, и называется энтропийным слоем. Ниже показывается, что и при обтекании тонких заостренных тел на достаточно больших расстояниях от носика тела возникает энтропийный слой, образование которого связано с искривлением скачка. При этом любая линия тока с увеличением расстояния попадает в энтропийный слой.

В работе приводятся оценки точности известных автомодельных решений для обтекания тел степенной формы, а также анализируется применимость аналогии с сильным взрывом к обтеканию заостренной плоской пластинки или цилиндра.

1. Рассмотрим обтекание тонкого заостренного тела потоком идеального газа с бесконечно большой сверхзвуковой скоростью (фиг. 1). Пусть некоторая линия тока AB пересекает скачок уплотнения в точке A . Угол наклона скачка в этой точке обозначим через τ_0 . Давление p и плотность ρ газа в точке A за скачком уплотнения при $\tau_0 \ll 1$ соответственно равны

$$p_2 = \frac{2}{\kappa + 1} \rho_\infty u_\infty^2 \tau_0^2, \quad \rho_2 = \frac{\kappa + 1}{\kappa - 1} \rho_\infty$$

Здесь κ — отношение удельных теплоемкостей, индекс 2 относится к параметрам потока за скачком, индекс ∞ — к параметрам невозмущенного потока, скорость которого равна u_∞ . Вычислим плотность газа на рассматриваемой линии тока в некотором сечении вдали от точки A . Будем считать, что в этом сечении давление



Фиг. 1

$$p \approx \frac{2}{\kappa + 1} \rho_\infty u_\infty^2 \tau^2$$

где τ — местный угол наклона скачка. Воспользовавшись уравнением адиабаты, нетрудно получить, что плотность газа на линии тока AB в рассматриваемом сечении имеет порядок

$$\rho \approx \frac{\kappa + 1}{\kappa - 1} \rho_\infty \left(\frac{\tau}{\tau_0} \right)^{2/\kappa} \quad (1.1)$$

В дальнейшем будем рассматривать обтекание таких тел, для которых τ стремится к нулю при удалении от носика тела. Из соотношения (1.1) следует, что плотность газа также стремится к нулю при удалении от скачка вдоль каждой линии тока. Из уравнения сохранения энергии можно получить, что

$$\frac{\Delta u}{u_\infty} \approx \frac{2\kappa}{(\kappa + 1)^2} \left(\frac{\tau_0}{\tau} \right)^{2/\kappa} \tau^2 + O(\tau^2) \quad (1.2)$$

Здесь Δu — возмущение скорости вдоль оси x в рассматриваемом сечении.

Если обозначить через τ_{\max} максимальный угол наклона скачка, то во всем потоке

$$\frac{\Delta u}{u_\infty} \leq O(\tau_{\max}^2)$$

При выводе закона плоских сечений [3] и уравнений гиперзвуковой теории малых возмущений эта величина пренебрегается по сравнению с единицей. Однако при обтекании достаточно длинных тел, когда τ может быть значительно меньше τ_{\max} , критерием точности естественно будет величина местного угла наклона скачка уплотнения τ , а не τ_{\max} . Из соотношения (1.2) следует, что порядок отношения $\Delta u / u_\infty$ и, следовательно, точность приближенных уравнений теории малых возмущений является величиной переменной и в разных областях потока может быть различной. На очень больших расстояниях от точки A (при $\tau \ll \tau_0$) порядок этого отношения равен $\tau^{2-2/\kappa}$, т. е. становится таким же, как и в энтропийном слое при обтекании затупленных тел [1,2]. Это можно объяснить тем, что при обтекании произвольного тела потоком газа с бесконечно большой сверхзвуковой скоростью на больших расстояниях в первом приближении справедлива аналогия с сильным взрывом [4] независимо от того, имеет ли тело затупления или нет. Появление энтропийного слоя при обтекании тонких заостренных тел связано с непрерывным уменьшением угла наклона скачка уплотнения при удалении от носика тела, т. е. связано с искривлением скачка.

Выделим область потока, в которой закон плоских сечений справедлив с точностью τ^ε , где $2 - 2/\kappa \leq \varepsilon \leq 2$. В рассматриваемом сечении эта область образована линиями тока, для которых выполняется условие

$$\tau_0 \leq \tau^{1+1/2(\varepsilon-2)\kappa} \quad (1.3)$$

В остальной части потока, которая прилегает к телу и которую в дальнейшем будем называть энтропийным слоем, точность закона плоских сечений будет хуже, чем τ^ε . Из соотношения (1.3) следует, что при достаточном удалении от точки пересечения со скачком любая линия тока попадает в энтропийный слой. Таким образом, с увеличением расстояния от носика тела расход газа через энтропийный слой неограниченно возрастает.

При обтекании тонких затупленных тел в образовании энтропийного слоя участвуют как линии тока, пересекающие скачок уплотнения вблизи затупления, где явно нарушается основное предположение теории малых возмущений о малости угла наклона скачка ($\tau_0 = O(1)$), так и линии тока, для которых нарушается условие (1.3). Так как расход газа через ту часть поверхности скачка уплотнения, на которой угол наклона скачка немал, конечен, а расход газа через весь энтропийный слой неограниченно возрастает при увеличении расстояния, то следует ожидать, что на достаточном больших расстояниях от носика тела толщина энтропийного слоя не зависит непосредственно от формы самого носика тела.

2. В связи с этим определим порядок толщины энтропийного слоя на примере известных автомодельных решений для обтекания тонких тел степенной формы потоком идеального газа с бесконечно большой сверхзвуковой скоростью [5,6]. Для фиксированной линии тока уравнение неразрывности можно записать в виде

$$\rho_\infty u_\infty R^\nu dR \approx \rho u r^\nu d\delta \quad (r \gg \delta) \quad (2.1)$$

Здесь $y = R(x)$ — уравнение скачка уплотнения, r — радиус тела в рассматриваемом сечении, δ — толщина энтропийного слоя; $\nu = 0$ в плоском случае и $\nu = 1$ в случае осевой симметрии. Подставляя в уравнение (2.1) значение плотности из (1.4) и отбрасывая малые более высоких порядков, нетрудно получить следующее соотношение для толщины энтропийного слоя при обтекании тонкого заостренного тела

$$\delta \approx \frac{\kappa - 1}{\kappa + 1} \left[\frac{1}{R'(x)} \right]^{2/\kappa} \frac{1}{r^\nu(x)} \int_0^{x_0(x)} R^\nu R'^{(1-2/\kappa)} dx \quad (2.2)$$

Здесь точка на скачке $x = x_0$ определяется из условия (1.3). В случае автомодельных решений

$$r \sim R \sim x^n, \quad \frac{2}{3 + \nu} \leq n \leq 1$$

При этом из соотношения (2.2) следует, что при достаточном удалении от носика

$$\delta \sim x^m, \quad m = 2 - \varepsilon + n [\kappa(1 + \nu)(1/2\varepsilon - 1) + \varepsilon - 1] \quad (2.3)$$

Здесь $m = n$ при $\varepsilon = 2$, что и следовало ожидать, исходя из автомодельности решения. Таким образом, энтропийный слой на больших расстояниях от носика тела нарастает значительно интенсивнее, чем по сделанным ранее оценкам [1,2], которые учитывали только линии тока, пересекающие скачок уплотнения вблизи затупления. Соотношение (2.3) позволяет оценить, с какой точностью справедлив закон плоских сечений в случае автомодельных решений для тел степенной формы. Очевидно, что эта точность будет порядка τ^ε , если при обтекании некоторого тела выполняется условие

$$\frac{\delta}{r} \leq O(\tau^\varepsilon)$$

Отсюда следует, что в случае автомодельных решений ¹

$$\varepsilon = 2 \frac{\kappa(1 + \nu)n - 2(1 - n)}{\kappa(1 + \nu)n}$$

При обтекании клина или конуса ($n = 1$) закон плоских сечений справедлив с точностью τ^2 . С уменьшением n (а также и κ) точность автомодельных решений ухудшается

¹ Если считать, что энтропийный слой образован только линиями тока, пересекающими скачок уплотнения вблизи затупления, то, согласно результатам работы [2], точность автомодельных решений порядка τ^2 при

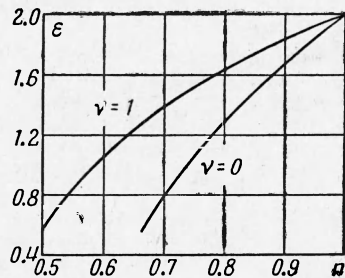
$$n \geq \frac{2 + 2\kappa}{2 + (3 + \nu)\kappa}$$

и в предельном случае становится равной

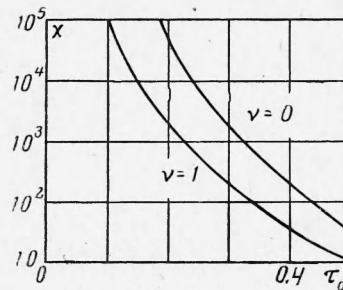
$$\varepsilon = 2 - \kappa/2 \text{ при } n = 2/(3 + \nu)$$

Зависимости ε от n при $\kappa = 1.4$ приведены на фиг. 2.

3. Выше уже отмечалось, что и при обтекании тонких заостренных тел достаточной длины может возникнуть энтропийный слой как область потока, в которой закон плоских сечений справедлив с меньшей точностью, чем τ^2 . Чтобы оценить на каких расстояниях от заостренного носика тела возникает энтропийный слой, рассмотрим обтекание плоской пластинки (или цилиндра) с носовой частью в виде клина (или конуса)



Фиг. 2



Фиг. 3

потоком идеального газа с бесконечно большой сверхзвуковой скоростью. Согласно аналогии с сильным взрывом, форма скачка уплотнения на больших расстояниях от носика тела не зависит от его формы и определяется зависимостью [7, 8]

$$\frac{R}{d} = \gamma(\kappa, \nu) C_x \frac{1}{x} \left(\frac{x}{d}\right)^{\frac{2}{3+\nu}} \quad (3.1)$$

где d — поперечный размер пластинки или цилиндра, C_x — коэффициент волнового сопротивления носика, γ — функция, известная из решения задачи о сильном взрыве [9]. Обозначим синус угла полураствора скачка уплотнения в носике тела через τ_0 (очевидно, что при этом остаются в силе соотношения (1.1) и (1.2)). Подставляя в (1.3) выражение τ из (3.1) и полагая $C_x = 2\tau_0^2$, нетрудно получить, что при

$$\left(\frac{x}{d}\right)^{\frac{1+\nu}{3+\nu}} \geq \left(\frac{x_{\max}}{d}\right)^{\frac{1+\nu}{3+\nu}} = 2^{\frac{4+\nu}{3+\nu}} \frac{\gamma}{3+\nu} \left(\frac{1}{\tau_0}\right)^{\frac{2}{2+(\varepsilon-2)\kappa} - \frac{2}{3+\nu}}$$

закон плоских сечений становится несправедливым с точностью порядка τ^ε в области потока, образованной линиями тока, пересекающимися скачком уплотнения вблизи носика тела. На фиг. 3 представлены графики зависимости x_{\max}/d от τ_0 при $\varepsilon = 1$ и $\kappa = 1.4$, из которых видно, что эта величина сильно уменьшается при увеличении τ_0 . В случае осевой симметрии, например, при $\tau_0 = 0.3$ закон плоских сечений становится несправедливым с точностью $O(\tau)$ уже при $x/d \sim 200$.

Поступила 30 VII 1962

ЛИТЕРАТУРА

1. Cheng H. K. Similitude of hypersonic real gas flow over slender bodies with blunted noses. J. Aeronaut. Sci., 1959, vol. 26, No 9.
2. Сычев В. В. К теории гиперзвуковых течений газа со скачками уплотнения степенной формы. ПММ, 1960, т. XXIV, вып. 3.
3. Hayes W. D. On hypersonic similitude. Quart. Appl. Math., 1947, vol. 5, No 1.
4. Lin S. C. Cylindrical shock wave produced by instantaneous energy release. J. Appl. Phys., 1954, vol. 25, No 1.
5. Гродзовский Г. Л., Крашенинникова Н. Л. Автомодельные движения газа с ударными волнами, распространяющимися по покоящемуся газу. ПММ, 1959, т. XXIII, вып. 5.
6. Lees L., Kubota T. Inviscid hypersonic flow over blunt nosed slender bodies. J. Aeronaut. Sci., 1954, vol. 24, No 3.
7. Cheng H. K., Pallone A. J. Inviscid leading-edge effect in hypersonic flow. J. Aeronaut. Sci., 1957, vol. 24, No 3.
8. Черный Г. Г. Течение газа с большой сверхзвуковой скоростью. Физматгиз, 1959.
9. Седов Л. И. Методы подобия и размерности в механике. Гостехиздат, 1957.