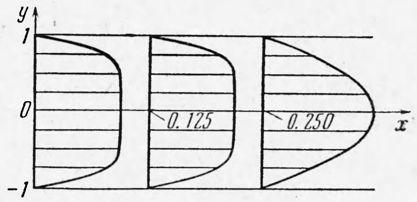
При $\lambda \to \infty$ формула (8) переходит в известное решение задачи Гартмана для однородного магнитного поля

$$u = \frac{\operatorname{ch} My - \operatorname{ch} M}{M^{-1} \operatorname{sh} M - \operatorname{ch} M} \qquad (9)$$




Любопытно отметить, что в точках $x = {}^1/_2 n$, где $\cos 2\pi x = (-1)^n$, также получаем профиль Гартмана. В точках ${}^1/_4 (2n+1)$, где $\cos 2\pi x = 0$, формула (8) дает обычный профиль Пуазейля $u = {}^3/_2 (1 - y^2)$.

Таким образом, при движении жидкости в периодическом внешнем магнитном поле, длина волны которого значительно больше высоты канала, распределение скоростей определяется формулой (8), которая аналогична формуле (9), взятой с некоторым эффективным числом Гартмана $M \,|\cos 2\pi x|$. При этом профиль скоростей периодически деформируется от гартмановского при $|\cos 2\pi x| = 1$ до пуазейлевского при $\cos 2\pi x = 0$. Поперечная скорость $v$ может быть найдена из последнего уравнения (5) по известной составляющей $u$.

Для определения распределения давления в канале имеем соотношение

$$\frac{dp}{dx} = \frac{1}{R}\left[\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - (M \cos 2\pi x)^2\, u\right]$$

Вычисляя его правую часть при помощи (8), находим

$$\frac{dp}{dx} = \frac{(M \cos 2\pi x)^2}{R} \frac{\operatorname{ch} (M \cos 2\pi x)}{(M \cos 2\pi x)^{-1} \operatorname{sh} (M \cos 2\pi x) - \operatorname{ch} (M \cos 2\pi x)} \qquad (10)$$

На приведенной фигуре показано изменение профиля скоростей в зависимости от продольной координаты $x$.

Поступила 13 V 1963

## ЛИТЕРАТУРА

1. Р е г и р е р С. А. Об одном точном решении уравнений магнитной гидродинамики. ПММ. 1960, т. 24, № 2.
2. S a k u r a i T., N a i t o M. Steady two-dimensional channel flow of an incompressible perfect fluid with small electric conductivity in the presence of nonuniform magnetic fields. J. Phys. Soc. Japan, 1962, vol. 17, No. 4.
3. S h e r m a n A. Viscous magnetohydrodynamic boundary layer. Phys. of Fluids, 1961, vol. 4, № 5.
4. T u r c o t t e D. L., L y o n s J. M. A periodic boundary-layer flow in magnetohydrodynamics. J. Fluid mech., 1962, vol. 13, Pt. 4.

---

# О МОДЕЛИРОВАНИИ МАГНИТОГИДРОДИНАМИЧЕСКОГО ТЕЧЕНИЯ В КАНАЛЕ НА ЭЛЕКТРОЛИТИЧЕСКОЙ ВАННЕ

***В. В. Назаренко (Москва)***

Для течения электропроводной несжимаемой жидкости в плоском канале в присутствии магнитного поля при значениях магнитного числа Рейнольдса $\mathrm{Re}_m \ll 1$ можно пренебречь влиянием индуцированного магнитного поля на движение жидкости. Кроме того, в ряде случаев гидродинамическая задача может быть отделена от электродинамической [1]. При этом скорость жидкости $\mathbf{V}$ может определяться из гидродинамических уравнений или задаваться, а распределение плотности тока $\mathbf{j}$ и электрического потенциала $\varphi$ в канале находится из закона Ома и уравнения неразрывности для $\mathbf{j}$

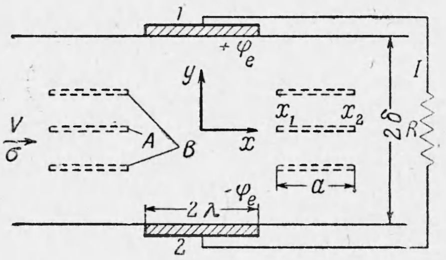
$$\mathbf{j} = \sigma\left(-\nabla\varphi + \frac{1}{c}\,\mathbf{V}\times\mathbf{B}\right), \quad \operatorname{div} \mathbf{j} = 0 \qquad (1)$$

Здесь $\mathbf{B}$ — напряженность магнитного поля, $\sigma$ — электропроводность жидкости, $c$ — скорость света в пустоте. При этом $\mathbf{V}$ и $\mathbf{B}$ считаются заданными функциями координат. Задача сводится к уравнению Пуассона для функции $\varphi$.

Если канал составлен из участков проводников и диэлектриков, то граничными условиями будут постоянство потенциала $\varphi$ на проводниках и отсутствие нормальной составляющей плотности тока на диэлектриках $j_n = 0$.

Для течения с переменной скоростью $\mathbf{V}\{V(y), 0\}$ в постоянном магнитном поле ($y$—координата в поперечном оси канала направлении) задача также сводится к решению уравнения Лапласа для некоторой вспомогательной функции $u$, определяемой соотношением

$$u = \varphi - \frac{1}{c} B \int_0^y V dy \qquad (2)$$



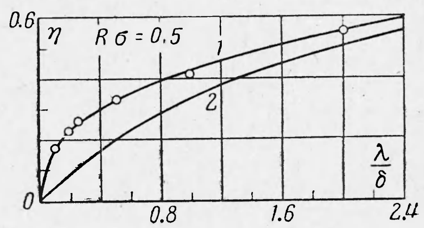

Фиг. 1

Некоторые частные задачи, сводящиеся к уравнению Лапласа, рассмотрены в работе [2]. Представляется целесообразным для решения подобного рода задач в тех случаях, когда получение аналитического решения затруднительно, использовать методы электрического моделирования, в частности — электролитическую ванну [4].

Ниже приводятся некоторые результаты исследования течения несжимаемой электропроводной жидкости в плоском канале при помощи электролитической ванны.

Моделировалось течение в канале шириной $2\delta$, стенки которого были составлены из участков проводников и диэлектриков (фиг. 1). Скорость течения жидкости $\mathbf{V}$ считалась заданной, не зависящей от $x$, и произвольной четной функцией $y$. Пара симметрично расположенных электродов длиной $2\lambda$ была соединена некоторой внешней нагрузкой $R$. На всем протяжении канала, перпендикулярно его плоскости, было приложено постоянное магнитное поле напряженности $\mathbf{B}\{0, 0, -B\}$.

При движении жидкости в канале на электродах возникает разность потенциалов $2\varphi_e$ и во внешней цепи течет электрический ток $I$. При этом на внешней нагрузке $R$ выделяется мощность $N = 2\varphi_e I$.




Фиг. 2

В указанных предположениях функция $u$, определяемая уравнением (2), удовлетворяет уравнению Лапласа [2]

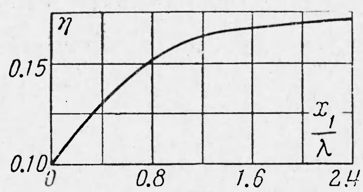
$$\Delta u = 0 \qquad (3)$$

с граничными условиями: (4)

$u = \pm u_1$ при $y = \pm \delta$ на электродах

$\partial u / \partial y = 0$ при $y = \pm \delta$ на диэлектриках

Значение функции $u$ на электроде определяется из следующего соотношения:




Фиг. 3

$$u_1 = \varphi_1 - \frac{B}{c} \int_0^\delta V dy \qquad (\varphi_1 - \varphi_2 = 2\varphi_e > 0)$$

где $\varphi_1$ — значение потенциала на электроде 1.

Выделяемая на внешней нагрузке мощность может быть определена следующим выражением

$$N^\circ = \frac{N}{\sigma E^2} = \frac{1}{R\sigma}\left(\frac{2\varphi_e}{E}\right)^2 \left(E = \frac{B}{c} \int_{-\delta}^{\delta} V dy\right) \qquad (5)$$

Выражение для джоулевой диссипации $Q$ в канале, приведенное в работе [3], в рассматриваемом случае имеет вид

$$Q^\circ = \frac{Q}{\sigma E^2} = -\frac{1}{R\sigma}\left(\frac{2\varphi_e}{E}\right)^2 + \frac{\lambda}{\delta}\left(1 - \frac{2\varphi_e}{E}\right) + \frac{2\varphi_e}{E} \int_\lambda^\infty \left[\frac{E}{2\varphi_e} - 2\left(\varphi^\circ - \frac{1}{2}\right)\right] dx^\circ \qquad (6)$$

$$\varphi^\circ = \frac{\varphi - \varphi_2}{2\varphi_e} \quad \text{при } y = \delta, \ x^\circ = \frac{x}{\delta}$$

Определяя коэффициент полезного действия $\eta$ как отношение мощности к сумме мощности и джоулевой диссипации, имеем

$$\eta = \frac{N}{N + Q} = \frac{N^\circ}{N^\circ + Q^\circ} \qquad (7)$$

Отметим, что для определения мощности, диссипации и к. п. д. достаточно знать величину $2\varphi_e$ и распределение потенциала на диэлектрической стенке канала при заданных $V$, $B$, $R$ и $\sigma$. Вследствие симметрии задачи значение $\varphi$ (или $\varphi^\circ$) достаточно знать на участке $\lambda < x < \infty$, $y = \delta$.

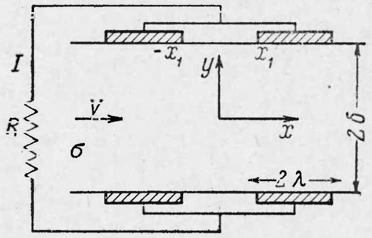
На электролитической ванне, геометрически подобной рассматриваемому каналу, моделировалась функция $u$, определяемая выражением (2), при тех же граничных условиях, что и в канале. При этом значения $u$ в соответствующих точках канала и ванны совпадают. Используя закон Ома для электролитической ванны и внешней цепи канала, получаем следующие соотношения между параметрами канала и ванны

$$\frac{1}{\sigma} I = \frac{1}{\sigma_m} I_m, \qquad \frac{2\varphi_e}{E} = \frac{\sigma R}{\sigma R + \sigma_m R_m} \qquad (8)$$

$$u_1 - u_2 = 2\varphi_e - E$$

где $\sigma_m$ и $I_m$ — электропроводность жидкости и сила тока для ванны, а $R_m$ — сопротивление электролита между электродами ванны.

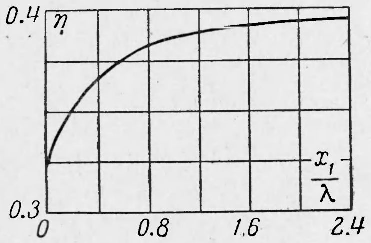
По найденным экспериментально значениям $u$ находится распределение потенциала $\varphi$ в канале при заданном $E$ (или $R\sigma$).




Фиг. 4

Для оценки точности моделирования было проведено сравнение определенных на электролитической ванне величин с аналогичными величинами, полученными из теоретических решений [2, 3]. На фиг. 2 нанесены теоретические и экспериментальные величины коэффициента полезного действия $\eta$ в зависимости от $\lambda / \delta$ при $R\sigma = 0.5$. Там же приведено приближенное решение для $\eta$, которое получается в предположении того, что электрическое поле считается постоянным между электродами и равным нулю вне электродов, т. е. решения, не учитывающего продольные краевые эффекты «растекания» тока. В последнем случае

$$\eta = \frac{R\sigma 2\lambda / \delta}{2 + R\sigma 2\lambda / \delta} \qquad (9)$$




Фиг. 5

В некоторых случаях для уменьшения «растекания» электрического тока применяются тонкие диэлектрические пластины параллельные оси канала (фиг. 1). В работе исследовалось влияние этих перегородок на электрический ток, мощность и к.п.д. в канале. При этом к граничным условиям (4) добавляется условие $\frac{j_n}{\sigma} = -\frac{\partial u}{\partial y} = 0$ на поверхности перегородок.

При определении суммарной джоулевой диссипации в этом случае интегрирование производится также и по поверхности перегородок, на которых $\varphi$ терпит разрыв.

Исследовались симметричные группы пластин $A$ и $B$ различной длины $a$ и при разных расстояниях по оси $x$ между пластинами.

Установлено, что при смыкании перегородок происходит уменьшение как электрического тока и мощности в канале, так и коэффициента полезного действия, тем более интенсивное, чем больше размер пластин $a$ и чем больше пластин в группе. На фиг. 3 дана зависимость $\eta$ от расстояния $x_1 / \lambda$ между перегородками для симметричных перегородок типа $B$ (фиг. 1) размером $a / \delta = 1.0$ в канале с $\lambda / \delta = 0.5$ при $R\sigma = 0.5$.

Как показывает эксперимент, применение диэлектрических перегородок для целей повышения снимаемой с электродов мощности и к. п. д. в рассматриваемом случае нерационально. Кроме того, было проведено исследование влияния расстояния между двумя парами симметричных электродов с $\lambda / \delta = 0.25$, соединенных параллельно (фиг. 4), на мощность и к. п. д. в канале.

Установлено, что с увеличением расстояния между электродами мощность и к. п. д. монотонно возрастают от теоретических значений, соответствующих сплошному электроду суммарной протяженности $\lambda / \delta = 0.5$ при $R\sigma = 0.5$. Зависимость $\eta$ от расстояния между электродами приведена на фиг. 5.

Поступила 12 VI 1963

## ЛИТЕРАТУРА


1. Ватажин А. Б., Регирер С. А. Приближенный расчет распределения тока при течении проводящей жидкости по каналу в магнитном поле. ПММ, 1962, т. XXVI, вып. 3.
2. Ватажин А. Б. К решению некоторых краевых задач магнитогидродинамики. ПММ, 1961, т. XXV, вып. 5.
3. Ватажин А. Б. Определение джоулевой диссипации в канале магнитогидродинамического генератора. ПМТФ, 1962, № 5.
4. Тетельбаум И. М. Электрическое моделирование. Физматгиз, 1959.